

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



Бахнэ Сергей

УДК 662.215.121

**Моделирование горения струй водорода в высокоскоростном ограниченном
поперечном потоке горячего воздуха методом IDDES**

Специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н.

Власенко Владимир Викторович

Москва – 2025

Содержание

Введение.....	4
Содержание диссертации	10
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	14
1.1 Основные математические модели высокоскоростных течений с горением в каналах	14
1.2 Стабилизация горения в высокоскоростном потоке	22
1.3 Экспериментальные данные по высокоскоростным течениям с горением в каналах. Примеры моделирования в рамках подходов RANS и LES... 28	
1.4 Особенности высокоскоростных течений в прямоугольных каналах и связанные проблемы RANS/LES-моделирования	37
ГЛАВА 2. ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩИЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ.....	44
2.1 Описание решаемых уравнений	44
2.2 Численный метод. Современные тенденции	48
2.2.1 Формулировка базовой схемы WENO5.....	50
2.2.2 Выбор современных методов семейства WENO.....	51
2.2.3 Формулировка WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6.....	56
2.2.4 Сравнение схем в модельных задачах	57
2.3 Методика выбора численного метода с помощью задачи о распаде однородной изотропной турбулентности.....	65
2.3.1 Расчётная область, граничные и начальные условия. Согласование полей параметров турбулентности и скорости.....	67
2.3.2 Результаты расчётов	72
2.4 Проверка выбора численного метода в задаче об эволюции турбулентного слоя смешения.....	80
2.4.1 Постановка задачи	81
2.4.2 Результаты расчётов	83
2.5 Проверка выбора численного метода в задаче об отрыве турбулентного пограничного слоя из-под скачка уплотнения.....	90
2.5.1 Постановка задачи	90
2.5.2 Результаты расчётов	96
2.6 Выводы по главе.....	102

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ ИНЖЕКЦИИ ВОДОРОДА В ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ НАБЕГАЮЩИЙ ПОТОК ВОЗДУХА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ.....	103
3.1 Математическая постановка	107
3.1.1 Решаемая система уравнений и численный метод.....	107
3.1.2 Расчётная область и граничные условия	118
3.2 Граничные условия шероховатости и «инжектора». Результаты расчетов подогревателя	122
3.2.1 Модель шероховатости	122
3.2.2 Расчёты подогревателя.....	132
3.2.3 Граничное условие «инжектор»	134
3.3 Обзор проведённых расчётов экспериментальной установки ONERA	146
3.4 Первая серия расчётов целевой задачи.....	148
3.5 Вторая серия расчётов	155
3.5.1 Влияние температуры стенок	155
3.5.2 Вихреразрешающий расчёт при $T_w = 1413$ К.....	156
3.5.3 Оценка возможной температуры стенок	161
3.6 Третья серия расчётов.....	163
3.6.1 Влияние стёкол на боковых стенках.....	163
3.6.2 Влияние вторичных токов	164
3.6.3 Влияние высоты шероховатости	167
3.6.4 Влияние разрешённой турбулентности на входе в канал.....	169
3.6.5 Результаты последнего IDDES-расчёта.....	171
3.7 Выводы по влиянию физических факторов	174
3.8 Механизм стабилизации горения	175
Заключение	180
Список литературы	183

Введение

Актуальность темы исследования. Исследование горения в турбулентном потоке – сложная проблема, решение которой необходимо для организации рабочего процесса в энергетических устройствах (в силовых установках различных типов, а также в газотурбинных установках, которые используются в тепловых электростанциях, в компрессорных станциях магистральных газопроводов, в морском и железнодорожном транспорте и пр.). Возможности аналитического описания турбулентных течений с горением крайне ограничены, поэтому теория может лишь формулировать обоснованные физико-математические модели для описания подобных течений. Экспериментальные исследования крайне дороги, а интерпретация результатов эксперимента неоднозначна из-за взаимодействия многих физических эффектов. Поэтому изучение подобных течений невозможно без привлечения численного моделирования. В настоящее время широко распространены подходы к численному моделированию турбулентных течений, основанные на осреднении по времени (уравнения Рейнольдса – RANS, замкнутые различными полуэмпирическими моделями турбулентности), и методы моделирования крупных вихрей (LES), в которых крупномасштабная турбулентность воспроизводится в расчете напрямую. Методы LES достигли в последнее время больших успехов, позволив описать многие классы течений без специальной настройки модели течения (что не удастся сделать в рамках подхода RANS). Однако горение в турбулентном потоке определяется процессами, которые протекают на уровне мельчайших вихрей и не воспроизводятся даже в LES-расчетах. Впрочем, по сравнению с подходом RANS метод LES имеет важное преимущество – возможность более точного определения локальных условий для горения. Поэтому развитие вихреразрешающих методов, позволяющих описывать высокоскоростные течения с горением, является **актуальным**.

Несмотря на все свои преимущества, метод LES не гарантирует необходимую точность описания горения. В особенности это относится к гибридным RANS-LES подходам, когда в пристенной области течения происходит переход от LES к RANS. Поэтому требуется настройка параметров вихреразрешающих расчетов с использованием данных, полученных из эксперимента. К сожалению, пригодных для данной цели экспериментов немного. В настоящей работе используется новая база экспериментальных данных, полученная во Французской Аэрокосмической Лаборатории — ONERA [1]. В этих экспериментах с поперечной инжекцией струй водорода продемонстрирована возможность стабилизации горения в высокоскоростном потоке без использования специальных механических устройств.

В диссертации выбран и откалиброван вихреразрешающий метод. Продemonстрирована адекватность его применения к рассматриваемому классу задач. Проведено исследование влияния различных физических факторов на структуру течения в эксперименте ONERA. В рамках выбранной физико-математической модели течения установлен механизм стабилизации горения.

Степень разработанности темы. К настоящему времени выполнен ряд экспериментов с детальным изучением структуры течения с высокоскоростным горением струй топлива – как спутных, так и поперечных. Имеется много работ, в которых эти эксперименты моделируются как на базе уравнений Рейнольдса, так и с помощью вихреразрешающих методов. Более сложной проблемой как для экспериментального, так и для расчетного исследования является высокоскоростное горение в ограниченном потоке, что характерно для камер сгорания различных энергетических устройств. Такого рода эксперименты являются крайне трудоёмкими, и количество опубликованных в открытой печати экспериментальных работ по данному классу течений является весьма ограниченным. Помимо рассматриваемого в данной работе эксперимента ONERA, есть еще порядка десятка неплохих экспериментов, среди которых следует отметить эксперименты Fotia [2], Driscoll [3] и Micka [4].

Непосредственно по моделированию течения в исследуемом режиме установки ONERA существует две работы, а именно работа Pelletier [5], в которой применяется RANS-подход, и работа Fureby [6], в которой применяется метод крупных вихрей. Однако результаты, представленные в данных работах, носят ограниченный характер и не претендуют на детальное физическое описание структуры течения. Также остаётся открытым вопрос о взаимодействии газодинамических структур и горения.

Цели данной работы:

- выбрать и откалибровать вихреразрешающий метод, применимый к описанию горения струй водорода в высокоскоростном ограниченном поперечном потоке горячего воздуха;
- установить влияние различных физических факторов на структуру таких течений;
- в рамках выбранной физико-математической модели течения предложить механизм стабилизации горения в рассмотренном эксперименте.

В рамках данной работы решены следующие задачи:

1. Выполнен обзор экспериментальных и расчетных данных по высокоскоростным турбулентным течениям с горением, направленный на выявление данных для сопоставления с собственными расчетами и на выработку предварительных предположений о физике течения.

2. Выполнен выбор и модификация численного метода для IDDES-расчетов, модифицировано граничное условие шероховатых стенок с прилипанием, откалиброваны константы подсеточной модели турбулентности. Все это реализовано в научном расчётном модуле zFlare, используемом в ЦАГИ.

3. Выполнено численное моделирование течений из базы данных ONERA, проведено сопоставление с экспериментом и расчётами других авторов, осуществлён физический анализ полученных расчетных данных.

Научная новизна:

- предложена оригинальная процедура согласования начальных полей параметров подсеточной модели турбулентности с начальным полем скорости;
- впервые применительно к выбранному в диссертации вихреразрешающему численному методу выполнена калибровка констант метода LES;
- предложена оригинальная модификация граничного условия, моделирующего шероховатость стенок;
- впервые проведен анализ определяющих физических факторов и механизма стабилизации высокоскоростного горения в экспериментальной модели ONERA.

Теоретическая значимость:

Предложен способ согласования начальных полей параметров турбулентности с полями скорости для вихреразрешающих расчётов.

Разработана модификация граничного условия прилипания для шероховатых стенок с теплообменом.

Выявлены ключевые факторы, влияющие на структуру течения с высокоскоростным горением в расширяющемся канале при поперечной подаче топлива.

На основе вихреразрешающих расчетов установлен возможный механизм стабилизации высокоскоростного горения в расширяющемся канале с поперечной подачей топлива.

Практическая значимость:

Разработанные численные методы реализованы в программных модулях и применяются для численного моделирования течений в каналах с горением.

Методология и метод исследования заключается в использовании подходов, основанных на решении уравнений гибридного метода RANS-LES с учётом протекающих в газе неравновесных химических реакций. Для численного решения осреднённых или отфильтрованных уравнений используется низкодиссипативный конечно-объёмный метод второго порядка аппроксимации

по всем переменным. В некоторых разделах работы также используются одномерные модели для выявления особенностей численного метода. Исследование основано на численном моделировании современного эксперимента с использованием различных упрощающих предположений, сопоставлении и анализе полученных результатов.

На защиту выносятся:

- методика выбора численной технологии, применимой для вихреразрешающих расчётов;
- результаты исследования влияния различных факторов на газодинамическую структуру высокоскоростного горения в канале с поперечной инжекцией;
- механизм стабилизации высокоскоростного горения в расширяющемся канале с поперечной подачей топлива, полученный в вихреразрешающих расчетах.

Соответствие паспорту специальности 01.02.05 заключается в том, что «Механика жидкости, газа и плазмы – область естественных наук, изучающая на основе идей и подходов кинетической теории и *механики сплошной среды процессы и явления, сопровождающие течения однородных и многофазных сред при механических, тепловых, электромагнитных и прочих воздействиях, а также происходящие при взаимодействии текучих сред с движущимися или неподвижными телами*». Решённые в работе задачи лежат в следующих областях исследований:

- п.4. – Ламинарные и турбулентные течения.
- п.5. – Течения сжимаемых сред и ударные волны.
- п.9. – Физико-химическая гидромеханика (течения с химическими реакциями, горением, детонацией, фазовыми переходами, при наличии излучения и др.).
- п.12. – Пограничные слои, слои смешения, течения в следе.

п.19. – Точные, асимптотические, приближенные аналитические, численные и комбинированные методы исследования уравнений континуальных и кинетических моделей однородных и многофазных сред.

Достоверность результатов обосновывается сопоставлением полученных расчётных результатов с экспериментальными данными, опубликованными независимыми авторами, а также с данными расчётов других авторов; использованием компьютерной программы, ориентированной на корректное моделирование нестационарных процессов, и протестированной на большом наборе задач.

Апробация работы. Результаты работы прошли апробацию на международных, всероссийских и отраслевых конференциях:

- 1) СЕАА 2018, Россия, Светлогорск, 17-22 сентября 2018
- 2) ПМ XIV, Россия, Новосибирск-Шерегеш, 2-4 марта 2020 (два доклада)
- 3) ICPCD 2020, Россия, Санкт-Петербург, 19 – 22 октября 2020
- 4) XXXI Научная конференция по аэродинамике ЦАГИ, Россия, Ногинск, 29-30 октября 2020
- 5) COMBEX 2021, Россия, Москва, 10-12 февраля 2021
- 6) ПМ XV, Россия, Новосибирск-Шерегеш, 3 марта 2021
- 7) iTi 2021, Virtual Event, 25-26 февраля 2021
- 8) СЕАА 2020, Россия, Геленджик, 20-25 сентября 2021
- 9) COMBEX 2022, Россия, Москва,
- 10) СПАСУЛА 2021, Россия, Жуковский, декабрь 2021
- 11) СЕАА 2022, Россия, Светлогорск, сентябрь-октябрь 2022
- 12) ISMAR 2022, Россия, Новосибирск, август 2022
- 13) ICPCD 2022, Россия, Санкт-Петербург
- 14) Военмех XXVI, Россия, Санкт-Петербург, июнь 2022
- 15) XIII всерос. съезд по механике, Санкт-Петербург, август 2023
- 16) СЕАА 2024, Россия, Светлогорск, сентябрь-октябрь 2024
- 17) NEPCAR 2024, Россия, Сочи, октябрь 2024

Содержание диссертации

В **Главе 1** сделан обзор источников литературы по теме диссертации. В разделе 1.1 приведены основные физические и математические модели для описания течения с горением в канале в условиях высокоскоростного потока. Приводится описание дискретизации исходной задачи, проблемы, возникающие при отыскании численного решения, и сходимости последнего к решению исходной задачи¹. Здесь же рассмотрены основные подходы к решению поставленной задачи (и связанные с ними проблемы), а именно прямое численное моделирование, использование осреднённых по Рейнольдсу [7] уравнений Навье-Стокса (RANS), а также метод крупных вихрей (LES) [8], [9], [10], который вместо осреднения по времени использует фильтрацию по пространству.

В разделе 1.2 представлен обзор по различным способам стабилизации горения в высокоскоростном потоке.

В разделе 1.3 представлен обзор экспериментальных данных по высокоскоростным течениям с горением в каналах, по которым присутствуют примеры моделирования в рамках RANS- и LES-подходов.

В разделе 1.4 рассмотрены основные проблемы применения метода крупных вихрей, а также его модификации — метода отсоединённых вихрей (DES) при моделировании высокоскоростных течений в каналах. Особое внимание уделено проблеме описания вторичных вихрей и его влияния на описание структуры отрывов в канале.

Глава 2 посвящена уравнениям, рассматриваемым в рамках метода крупных вихрей, и их численной аппроксимации. Для простоты рассуждений рассматривается воздушная среда без химических реакций (уравнения для реагирующей смеси представлены в следующей главе). Анализируется обширный набор разностных схем (пространственных и временных) для аппроксимации конвективных членов уравнений. Проводится методический анализ построения

¹ Строго говоря, рассматривается сходимость численного решения к проекции точного решения исходной задачи на дискретную сетку.

численной технологии и калибровки констант подсеточной модели для корректного применения вихреразрешающего подхода.

В разделе 2.1 приведена исходная система дифференциальных уравнений движения сжимаемого вязкого совершенного газа (без горения). Анализируются используемые замыкающие соотношения.

В разделе 2.2 детально рассматривается набор пространственных схем для конвективного оператора, а также их взаимодействие с временными аппроксимациями. На первом этапе аналитически исследуется применимость данных схем к вихреразрешающим расчётам: анализ устойчивости, определение дисперсионных и диссипативных ошибок. Отобранные на первом этапе схемы применяются для решения ряда модельных одномерных задач. На втором этапе (разделы 2.3–2.5) отобранные пространственные схемы применяются для решения трёхмерных задач: распад изотропной турбулентности (раздел 2.3), турбулентный слой смешения (раздел 2.4), отрыв из-под скачка уплотнения (раздел 2.5). В разделе 2.3 представлена разработанная автором методика выбора численного метода для вихреразрешающих расчетов.

В главе 3 рассматривается моделирование течения в установке ONERA, а также связанные с этой задачей предварительные тесты.

В разделе 3.1 представлена математическая постановка: уравнения для реагирующей смеси газов, геометрия расчётной области, граничные условия. Также обозначены проблемы задания граничных условий инжекции топлива и шероховатой поверхности, которые исследуются в следующем разделе.

В разделе 3.2 представлены граничное условие для шероховатых стенок, которое содержит оригинальную модификацию, предложенную автором, и граничное условие “инжектор”. Описаны модельные задачи, позволяющие по отдельности рассмотреть шероховатость и поперечную инжекцию. Также здесь представлены расчёты подогревателя, результаты которых используются в решении целевой задачи в качестве граничного условия на входе в канал модели.

В разделе 3.3 представлен краткий обзор всех расчётов экспериментальной установки ONERA. Объяснена логика исследований, которая потребовала провести три серии RANS- и LES-расчетов.

В первой серии расчетов (раздел 3.4) исследовано влияние различных параметров физико-математической модели течения. Установлено влияние высоты шероховатости на продольные распределения давления на стенке. Исследованы влияние адиабатического граничного условия, переход к схеме 1-го порядка, грубость сетки в окрестности инъекции в сопоставлении с сеткой, использованной в ONERA. В разделе 3.5 описана вторая серия расчётов целевой задачи. Здесь исследованы зависимость давления от температуры стенки, нестационарная картина течения в рамках вихреразрешающего подхода, условия образования локального частичного запираания. Также проведён анализ степени прогрева стенок канала за время эксперимента. В разделе 3.6 Осуществлён учёт оптических стёкол на боковых поверхностях установки. Установлено влияние вторичных токов на газодинамическую структуру. Выявлено воздействие принудительной турбулизации пограничного слоя на входе в канал, и влияние этой турбулентности на течение в окрестности инжектируемой струи. Представлен вихреразрешающий расчёт с учётом всех рассмотренных физических факторов.

В разделе 3.7 на основании проведённых расчётов представлены выводы о влиянии физических факторов на течение в прямоугольном канале с поперечной инъекцией и горением.

Наконец, в разделе 3.8 обсуждается механизм стабилизации горения в данном течении. Далее приведены основные выводы о моделировании целевой задачи диссертации.

Обозначения и сокращения

ПС	—	пограничный слой
ПСУ	—	прямой скачок уплотнения
КСУ	—	косой скачок уплотнения
LES	—	large eddy simulation (метод крупных вихрей)
ILES	—	implicit (неявный) LES
DES	—	detached eddy simulation (метод отсоединённых вихрей)
DDES	—	delay DES
IDDES	—	improved DDES
RANS	—	Reynolds-averaged Navier–Stokes equations
WENO	—	weighted essentially non-oscillatory
CD	—	central difference
STG	—	synthetic turbulence generator

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1.1 Основные математические модели высокоскоростных течений с горением в каналах

Для описания высокоскоростных течений с горением в каналах, как правило, используется физическая модель вязкого сжимаемого многокомпонентного совершенного (без учета сил межмолекулярного взаимодействия) газа. Данная модель подразумевает, что все компоненты топлива и окислителя пребывают в газообразном состоянии. Действительно, для водородного топлива (в исследовании будет рассматриваться только оно) топлива испарение происходит при очень низких температурах и данное предположение оказывается оправданным. Что же касается углеводородного топлива, то, как показано в [11], это предположение может быть применено для температур выше 1000 К. Также не стоит забывать, что данная модель выведена в предположении о сплошносредности: длина свободного пробега молекул λ существенно меньше характерного линейного размера $L_{хар}$ (высота/диаметр канала). В современной науке принято рассматривать их отношение, так называемое число Кнудсена [12]: $Kn = \lambda / L_{хар}$. Однако предположение о малости данной величины теоретически может быть нарушено на масштабе мельчайших вихревых структур, характерный размер которых, так называемый колмогоровский масштаб длины η_K [13] (перепечатка работы 1941 года) можно оценить следующим образом: $\eta_K \sim L_{хар} / Re_{L_{хар}}^{3/4}$, где $Re_{L_{хар}} = UL_{хар} / \nu$, U — средняя скорость течения, ν — коэффициент кинематической вязкости. Грубая оценка показывает, что отношение $L_{хар} / \eta_K$ может достигнуть значений $10^4 - 10^5$. Однако согласно [14], обычно выполняется предположение, что $\lambda / \eta_K \ll 1$.

Основываясь на вышеизложенных физических представлениях, можно составить математическую модель — систему сжимаемых уравнений Навье—Стокса для высокоскоростных течений с горением (включающая уравнения для

концентраций компонент смеси и уравнение состояния), которая достаточно широко представлена в литературе, например [15]. Однако для данной системы в большинстве случаев не удаётся отыскать аналитическое решение. Тем не менее, поскольку решение на практике необходимо знать с той или иной степенью точности, возникает вопрос о введении дополнительных упрощений и приближённом вычислении решения. Дополнительные предположения о характере решения, накладываемые на систему, принято называть моделями. Естественным, что каждая модель ограничивает класс вычисляемого решения. Начнём с того, что для зависимости коэффициента молекулярной вязкости ν от температуры используется приближённая формула Сазерленда [16]. Для его связи с коэффициентом диффузии k -ой компоненты смеси D_k также используются модельные соотношения, включающие эмпирические значения чисел Прандтля Pr и Шмидта Sc_k . Также существуют модели, учитывающие диффузию компонент смеси друг в друга, а не только в воздух [15], [17]. В таком случае каждый из коэффициентов D_k необходимо заменить на набор коэффициентов k -ой компоненты смеси в j -ую D_{kj} . Для нахождения энтальпии k -ой компоненты смеси $h_k(T)$ при заданном значении температуры необходимо взять интеграл, который в общем случае нельзя вычислить аналитически. Поэтому зависимость $h_k(T)$ приближается полиномами от температуры. Различные варианты описаны в работах [18], [19], [20]. Также, как правило, реальный процесс горения с множеством элементарных прямых и обратных реакций заменяется моделью, учитывающей только ключевые реакции. При этом в уравнениях для концентраций компонент смеси в правой части присутствует источниковый член, в который входят скорости прямых и обратных реакций. Эти скорости обычно приближаются эмпирическим законом Аррениуса [21]. Во многих публикациях, например [22], [23], [24], представлены модели только для скоростей прямых реакций. Скорости обратных определяются как произведения скоростей прямых реакций на константы равновесия химических реакций, которые являются

константами при заданной температуре и определяются термодинамическими свойствами смеси [25].

К сожалению, даже с учётом всех выше представленных упрощений для высокоскоростного течения в канале с горением не удаётся найти аналитического решения. Поэтому следующим шагом к получению приближённого решения является дискретизация. Как это описано в [26], для исходной дифференциальной краевой задачи $Lu = f$, где L — дифференциальный оператор, u — искомое решение, f — совокупность начальных и граничных условий, поставленной в некоторой области D с границей Γ , необходимо выбрать дискретное множество точек D_h (расчётную область, $D_h \subset D \cup \Gamma$), ввести линейное нормированное пространство U_h функций, определённых на D_h и установить соответствие между решением u и $[u]_h \in U_h$ (его проекцией на сетку). Важно понимать, что именно отыскание проекции $[u]_h$ — цель численных методов, и что такая проекция может быть задана не единственным образом; в частности, она не обязана совпадать со значениями u где бы то не было. Для приближённого отыскания $[u]_h$ вместо исходной задачи используется её разностный аналог $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$, где L_h — разностный оператор, $f^{(h)}$ — проекция f на сетку, а $u^{(h)}$ — численное решение в пространстве U_h . Разностная задача также может быть построена множеством способов, каждый из которых позволяет получить своё $u^{(h)}$. Поэтому вводится понятие сходимости численного решения, которое заключается в существовании и равенстве нулю следующего предела: $\lim_{h \rightarrow 0} \|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} = 0$, где h — максимальное расстояние между двумя соседними узлами сетки в каждом из сеточных направлений.

Обсудим, какими физическими особенностями отличается рассматриваемый класс течений, и какие требования к пространственной и временной дискретизации следуют из этих особенностей. Во-первых, поскольку коэффициент вязкости ν имеет порядок 10^{-6} - 10^{-7} м²/с, характерный линейный

размер $L_{хар} \sim 0.1-1$ м, а величина средней скорости $U \sim 300-1000$ м/с, то число Рейнольдса $Re_{L_{хар}} > 10^7$. Во-вторых, поток внутри канала оказывается существенно турбулизированным (не только в ПС). Этому способствует взаимодействие скачков с ПС, слои смешения, образованные в результате впрыска топлива, шероховатость стенок. В-третьих, структура течения существенно перестраивается при возникновении зон тепловыделения в результате горения. Эти факторы приводят к тому, что в потоке выстраивается непрерывный турбулентный спектр, содержащий масштабы длины и времени от самых крупных вихревых структур, соизмеримых с диаметром канала $L_{хар}$, вплоть до масштабов Колмогорова $\eta_K \sim L_{хар} / Re_{L_{хар}}^{3/4}$, на которых молекулярная вязкость становится существенной. В-четвёртых, оказывается, что в процессе воспламенения ключевую роль играет степень молекулярного смешения топлива и окислителя, поскольку горение происходит в области их взаимодействия. Таким образом, становится важным описать не только крупные структуры, определяющие среднее течение, но и мелкомасштабные, которые чувствительны к процессам молекулярного смешения и, соответственно, влияют на горение. В работах [2] и [3], посвящённых эксперименту с высокоскоростным горением в канале, демонстрируется, что небольшое изменение объёма впрыскиваемого топлива, влияющее на задержку воспламенения, может существенным образом изменить картину течения, переводя течение из режима сверхзвукового горения в дозвуковой с возникновением прямого скачка в канале. Но для того, чтобы описать все масштабы, соседние узлы сетки должны располагаться на расстоянии порядка $\eta_K \sim 10^{-7}$ м во всей расчётной области. Это приведёт к построению многомиллиардных сеток для рассматриваемого класса задач. Такой подход называется прямым численным моделированием (DNS) и на данный момент не используется для описываемых течений из-за огромных затрат вычислительной мощности.

Другой крайностью является использование осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS), впервые было применено Рейнольдсом для несжимаемых уравнений [7]. Идея заключается в том, чтобы осреднить мгновенную примитивную переменную $a(\mathbf{x}, t)$ на временном интервале T , который должен существенно превышать характерное время турбулентных пульсаций τ_{turb} , но при этом быть существенно меньшим характерного времени изменения среднего течения τ_{mean} :

$$\bar{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} a(\mathbf{x}, \tau) d\tau.$$

Тогда мгновенные величины можно представить как сумму средних и пульсаций относительно этих средних: $a(\mathbf{x}, t) = \bar{a}(\mathbf{x}, t) + a'(\mathbf{x}, t)$, которые удовлетворяют следующему набору аксиом [7]: $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$, $\bar{a'} = 0$, $\overline{\bar{a}b} = \bar{a}\bar{b}$, $\overline{\bar{a}b'} = \bar{a'}b'$, $\frac{\partial \bar{a}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$,

$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}$. Применение осреднения по Рейнольдсу к исходной системе уравнений приводит к возникновению дополнительных членов, связанных с пульсациями. Таким образом, возникает проблема замыкания RANS-системы уравнений — необходимо новые члены каким-либо образом связать с полями средних параметров течения. Такие выражения принято называть моделями турбулентности. Большое количество примеров представлено в [14]. Поскольку модели турбулентности навязывают определённые соотношения, в них входит набор эмпирических констант (калибруются по данным экспериментов или DNS). Как известно, модели турбулентности обладают ограниченной областью применимости. Вне зависимости от конкретной модели данный подход обладает тем недостатком, что осреднение происходит по всем масштабам турбулентности. Тогда как очевидно, что крупномасштабная турбулентность определяется геометрией задачи и структурой среднего течения и, таким образом, принципиально не может быть описана универсальным образом. Как показано в [27], все известные на момент исследования (2017) RANS-модели не могут

описать полный диапазон экспериментальных данных и нуждаются в перенастройке для новых классов задач. Более того, как уже было отмечено выше, процесс воспламенения существенно зависит от степени молекулярного смешения топлива и окислителя. А модели турбулентности, как правило, описывают процессы, которые связаны с крупными вихрями. В результате корректное описание более мелких вихревых структур также становится принципиальным.

Компромиссным решением является использование метода крупных вихрей (LES). К первым работам в этом направлении можно отнести [28], [29], [30], [31], [32], к обзорным — [8], [9], [10]. Метод крупных вихрей основывается на теории Колмогорова [13] о существовании универсального интервала равновесия (описание самого интервала равновесия см. [33]) в развитом турбулентном течении при больших числах Рейнольдса $Re = u'_{rms} L_{turb} / \nu$, где u'_{rms} — среднее квадратичное от пульсаций скорости, L_{turb} — характерный интегральный масштаб турбулентности ($L_{turb} < L_{xap}$). Предполагается, что статистические характеристики вихрей, чей масштаб длины много меньше, чем L_{turb} , определяются скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности $\bar{\varepsilon}$ и молекулярной вязкостью ν , то есть, могут быть описаны универсальным образом. В LES-подходе крупномасштабная турбулентность разрешается напрямую, а эффекты от мелкомасштабной воспроизводятся с помощью моделей турбулентности, которые принято называть подсеточными, поскольку расстояние между узлами сетки зачастую выступает масштабом отсечки разрешаемых вихрей и моделируемых. Существование универсального интервала равновесия в развитой турбулентности подтверждается экспериментально, например [34].

В отличие от RANS-методов в LES-подходе осреднение производится не по времени, а по пространству: $\bar{a}(\mathbf{x}, t) = \int a(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \Delta) d\mathbf{x}'$, где $G(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \Delta)$ — пространственный фильтр, в котором линейный масштаб Δ определяет размер отфильтрованных пульсаций. Чем меньше Δ , тем больший диапазон вихревых

структур воспроизводится в расчёте явным образом. В пределе, при стремящемся к нулю размере фильтра, LES-подход должен переходить в DNS, если подсеточная модель корректна. В первом приближении можно считать, что Δ соответствует расстоянию между соседними узлами h сетки или размеру ячейки. Как было отмечено выше, если $h = \eta_k$, то применим DNS-подход. Тогда на первый взгляд будет справедливым оценить переход от LES к DNS при стремлении размера фильтра к η_k , однако это не так, поскольку в данном случае подсеточная модель будет порождать турбулентную вязкость сопоставимую с молекулярной. Таким образом, чтобы переход всё же происходил при $h = \eta_k$, необходимо устремить к 0 также константу, определяющую влияние подсеточной модели. Например, в модели Смагоринского [28] подсеточная вязкость определяется выражением: $\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}|$, где $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ — норма тензора скоростей деформации, а C_s — константа Смагоринского, определяющая влияние подсеточной модели. В используемой модели в текущей работе роль этой константы выполняет C_{DES2} . Уравнения, которые её содержат, будут представлены далее в соответствующем разделе. Как правило, размер фильтра выбирается из условия $L_{turb} \gg \Delta \gg \eta_k$, что позволяет сделать существенно более грубую сетку в сравнении с DNS, однако следует помнить, что при увеличении Δ падает качество описания турбулентного смешения, что может отразиться на процессе воспламенения. Ещё одним ключевым фактором является то, что процессы молекулярного смешения не описываются в рамках LES-подхода. Это означает, что для описания турбулентного горения нужны полуэмпирические модели горения, которые настолько же ненадежны, как и полуэмпирические модели турбулентного переноса в RANS-подходе.

При моделировании обтекания твёрдых поверхностей семейство вихреразрешающих методов следует разделять на два WRLES (wall resolved) и WMLES (wall modeled). В рамках WRLES-подхода метод крупных вихрей применяется вплоть до стенок, что приводит к вычислительным затратам близким

к прямому численному моделированию. Это существенным образом ограничивает круг задач, для которых может быть применён данный метод. В случае WMLES-подхода пристенная область течения моделируется либо при помощи закона стенки [35], либо с помощью RANS-подхода, а в остальной части расчётной области применяется метод крупных вихрей. WMLES-подход с применением RANS уравнений в пристенной части течения предложил использовать Спаларт в 1997 [36], такой метод стал называться — гибридный RANS/LES-подход. В 1999 [37] данный метод был впервые успешно применён для трёхмерных задач, при этом RANS-область занимала весь ПК. Такой подход получил название DES (Detached-Eddy Simulation), в [38] представлен обзор применения DES в последующие годы к различным задачам. Однако было установлено, что данный подход обладает следующим недостатком — переключение между RANS и LES режимами оказалось зависящим в большей степени от сетки, а не от физики течения. Эта проблема была исправлена в [39], модификация гибридного метода получила название DDES (Delay DES). Модификация, позволяющая внешнюю часть ПК разрешать в рамках LES-подхода, была предложена в [40] и называется IDDES (Improved DDES). Именно этот подход будет использоваться в расчёте ключевой задачи данной диссертации. Следует отметить, что при использовании гибридного метода требуются модели замыкания турбулентных напряжений: подсеточная, работающая в LES-области, и пристенная, работающая в RANS-области. Если модель турбулентности может быть применима как к пристенным течениям, так и к свободным, то можно ограничиться одной моделью для обеих областей. В противном случае помимо пристенной и подсеточной модели придётся организовывать переходную область, в которой решение с возмущениями, характерными для LES, переходит в RANS-решение. Ключевой проблемой стыковки RANS- и LES-областей в рамках гибридного метода является ошибка в логарифмическом участке профиля скорости LLM (Log-layer Mismatch) [41], которая остаётся в общем случае нерешённой на данный момент.

Сами уравнения для гибридного RANS/LES-подхода и их замыкание будут приведены в соответствующей главе диссертации.

1.2 Стабилизация горения в высокоскоростном потоке

Стабилизация горения – локализация горения в определенной области пространства с достижением стационарных в среднем или меняющихся квазипериодически характеристик горения (полноты сгорания, температуры и состава продуктов сгорания и пр.). При этом в работе [42] делается дополнительный акцент: работы по стабилизации горения направлены на достижение как можно более высокой полноты сгорания при локализации горения в определенной области пространства. Различные способы определения полноты сгорания, применимые как для стационарных, так и для квазипериодических процессов, обсуждаются в работе [43].

Проблема стабилизации горения топлива при его подаче в высокоскоростной поток воздуха требует учета следующих явлений: смешения топлива с воздухом за счет турбулентной и молекулярной диффузии; конвективного переноса, определяющего время пребывания смеси в зоне горения; обмена теплом и массой реагентов между зонами прогрева и тепловыделения за счет турбулентной и молекулярной диффузии; пути химических реакций, который реализуется в зоне смешения; волновой и вихревой структуры течения; перехода кинетической энергии в тепловую и обратно; распространения звуковых волн против потока в областях дозвукового течения; влияния турбулентности на средние скорости реакций и влияния тепловыделения на турбулентный перенос; растяжения поверхности пламени; теплообмена на стенках канала; внешних источников тепла (плазменный разряд, луч лазера и пр.); особенностей геометрии обтекаемых тел в окрестности зоны горения. Многие физические явления, влияющие на стабилизацию горения, рассмотрены в [42].

В обзоре [44] предложен критерий стабилизации горения, который можно переписать в терминах числа Дамкелера:

$$Da \equiv \frac{\tau_{res}}{\tau_{mix} + \tau_{chem}} \geq 1$$

где τ_{mix} - характерное время смешения топлива с окислителем, τ_{chem} - характерное время протекания реакций горения и τ_{res} - время пребывания потока в зоне стабилизации (в практических приложениях – в камере сгорания энергетического устройства). Из этого делается вывод, что комплекс мероприятий, направленных на стабилизацию горения, как правило, направлен на ускорение смешения и интенсификацию химических реакций, а также на повышение времени пребывания потока в зоне стабилизации.

Стоит добавить, что после достижения квазистационарного горения переход к слишком малым значениям числа Da ($Da < Da_E$) создает опасность *срыва горения* (extinction), который опасен тем, что для возвращения к стационарному горению (ignition) необходимо поднять число Дамкелера до гораздо большего значения $Da_I \gg Da_E$ — см. известную “S-кривую” на рис. 1, основанном на [42]. Это типичное свойство систем с высокой энергией активации, которое просто объясняется в теории гомогенного реактора [45]. Таким образом, комплекс мер по стабилизации горения должен обеспечить невозможность срыва горения.

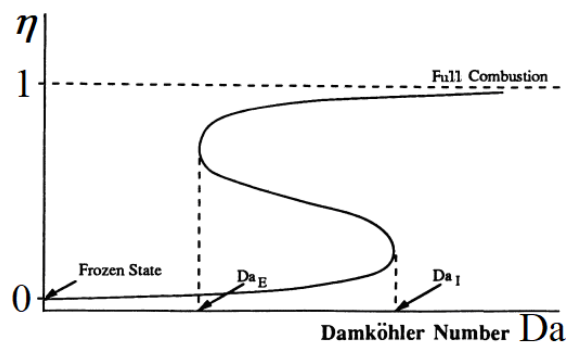


Рисунок 1 — Зависимость полноты сгорания η от числа Дамкелера (на основе [42])

Распространенным способом ускорения смешения топлива и окислителя является введение крупномасштабных вихревых структур в область смешения. Это достигается разными способами, например, с помощью создания продольной закрутки потока (этот способ широко применяется в камерах сгорания

газотурбинных установок [46], [47], [48]), или путем вдува топлива со стенок в поперечной струе, которая порождает сложную трехмерную структуру течения с отрывом, следом и вихревыми структурами, повышающими интенсивность смешения и создающими рециркуляционные зоны с высоким временем пребывания смеси (рис. 2). После 2000 г. был выполнен ряд детальных экспериментов по исследованию структуры течения в поперечных струях [49], [50], [51].

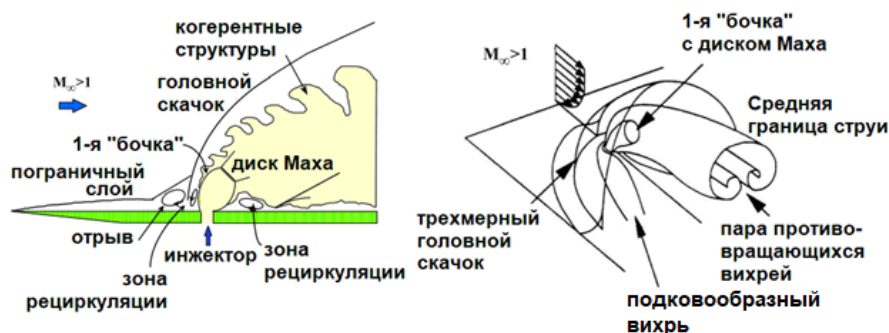


Рисунок 2 — Газодинамическая структура, возникающая при выдуве поперечной струи в сверхзвуковой поток [49]

Для того, чтобы поперечные струи обеспечивали подачу топлива по всему поперечному сечению канала, необходимо обеспечить достаточную пробивную способность струй, которая определяется отношением удельных потоков импульса (скоростных напоров) в струе и в потоке окислителя

$$J = \frac{\rho_{jet} V_{jet}^2}{\rho_{air} V_{air}^2} \quad [49].$$

Чтобы улучшить равномерность смешения топлива с окислителем поперек канала, можно использовать подачу топлива через отверстия в пилонах, расположенных в потоке. При этом можно сделать форму пилон такой, чтобы обеспечить формирование застойной области за пилоном, в которой достигается высокое время пребывания горючей смеси. Застойные зоны за пилонами работают, как реакторы, обеспечивая возникновение горения и возможность управления подачей топлива для предотвращения срыва горения при изменении режима течения. Имеется много экспериментальных и расчетных работ по выбору оптимальной формы пилонов инжекторов, выполненных как в России (в том числе в ЦАГИ) [52], [53], [54], так и за рубежом [55], [56], [57], [58]. Примеры

различных вариантов приведены на рис. 3. Недостатком пилонов-инжекторов является их значительное волновое сопротивление, приводящее к потерям тяги.

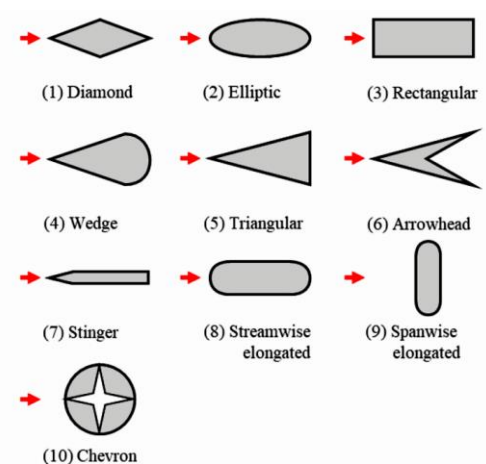


Рисунок 3 — Различные формы пилонов-инжекторов [44]

Еще одним способом стабилизации горения является введение геометрических особенностей канала, создающих крупномасштабные рециркуляционные зоны, отделенные от высокоскоростного потока турбулентными слоями смешения. Слои смешения обеспечивают подвод реагентов в такие зоны и отвод оттуда продуктов сгорания; а медленное течение в рециркуляционной зоне дает большие времена пребывания смеси в зоне горения. Типичными примерами таких геометрических особенностей являются ступенчатое расширение канала и каверны в стенках канала (рис. 4). Ступенчатое расширение исследовалось, например, в работах ИТПМ СО РАН [59], ЦАГИ [60], ЦИАМ и ИТПМ СО РАН [61], ЦАГИ и РАН [62], Французской аэрокосмической лаборатории ONERA [63]). Исследования показывают, что в канале со ступенчатым расширением могут работать весьма сложные механизмы стабилизации, в том числе приводящие к интенсивным квазипериодическим нестационарным процессам в канале [64], [65], [66]. Многочисленные исследования течений с кавернами обобщены в обзорах [67], [68]. Там также возможны нестационарные процессы, связанные с периодическим затеканием потока в каверну и вытеканием из нее. Структура течения сильно зависит от различных способов организации подачи топлива (вверх по потоку от каверны,

внутри каверны). Использование геометрических особенностей сопряжено с большими локальными тепловыми потоками в стенки канала.

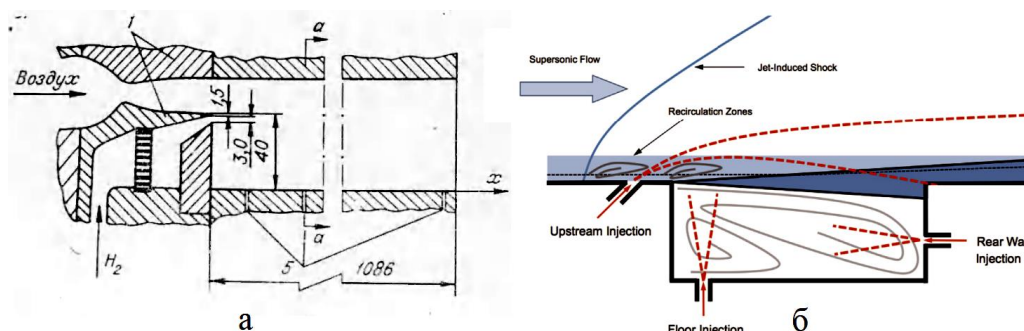


Рисунок 4 — Геометрические особенности для стабилизации горения:
а) ступенчатое расширение канала [59]; б) каверна [68]

Большое количество исследований по стабилизации горения посвящено применению импульсного теплоподвода для интенсификации химических реакций, а также усиления смешения. В качестве примеров приведем: работы ЦАГИ по созданию плазмохимических реакций с помощью продольного разряда [69]; исследования стабилизации пламени разрядом в ОИВТ РАН [70], [71] – рис. 5; эксперименты с неравновесным нестационарным продольно-поперечным пульсирующим разрядом в МГУ [72]; применение импульсно-периодического лазерного излучения для стабилизации горения предварительно перемешанной смеси в работах ИТПМ СО РАН [73]. Имеются и многочисленные зарубежные исследования, например, [74], [75].

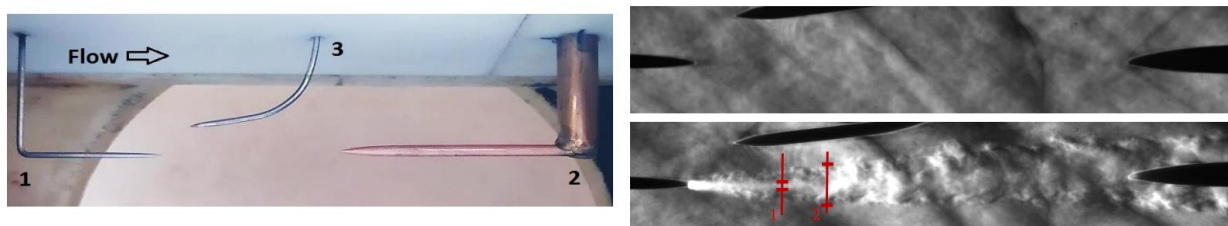


Рисунок 5 — Стабилизация пламени разрядом [71]: 1,2 – основные электроды, 3 – инициирующий электрод

Сложные варианты стабилизации горения в высокоскоростном потоке, связанные с нестационарным взаимодействием горения с ударно-волновыми структурами и отрывами пограничных слоев на стенках канала, описаны в

расчетно-экспериментальном исследовании [76]. Рассмотрим для примера один из представленных в этой работе механизмов стабилизации горения, поскольку полученный в настоящей диссертации механизм стабилизации горения в экспериментальной модели ONERA также связан с нестационарным взаимодействием горения с ударно-волновыми структурами и отрывами пограничных слоев на стенках канала.

Рассмотрено сверхзвуковое течение в канале с расширением с подачей топлива через отверстия инжектора (рис. 6). Горение вызывает заграждение канала с формированием псевдоскачка, включающего большую отрывную зону на нижней стенке канала и ударно-волновые структуры в невязком ядре потока (рис. 6,а,б). Попадание топлива в отрывную зону вызывает ее утолщение из-за расширения газа, и псевдоскачок смещается вперед (рис. 6,в). Отрывная зона оказывается перед сечением инжекции (рис. 6,г). Снабжение её топливом прекращается, и горение исчезает (рис. 6,д). Это приводит к вырождению отрыва и возвращению течения

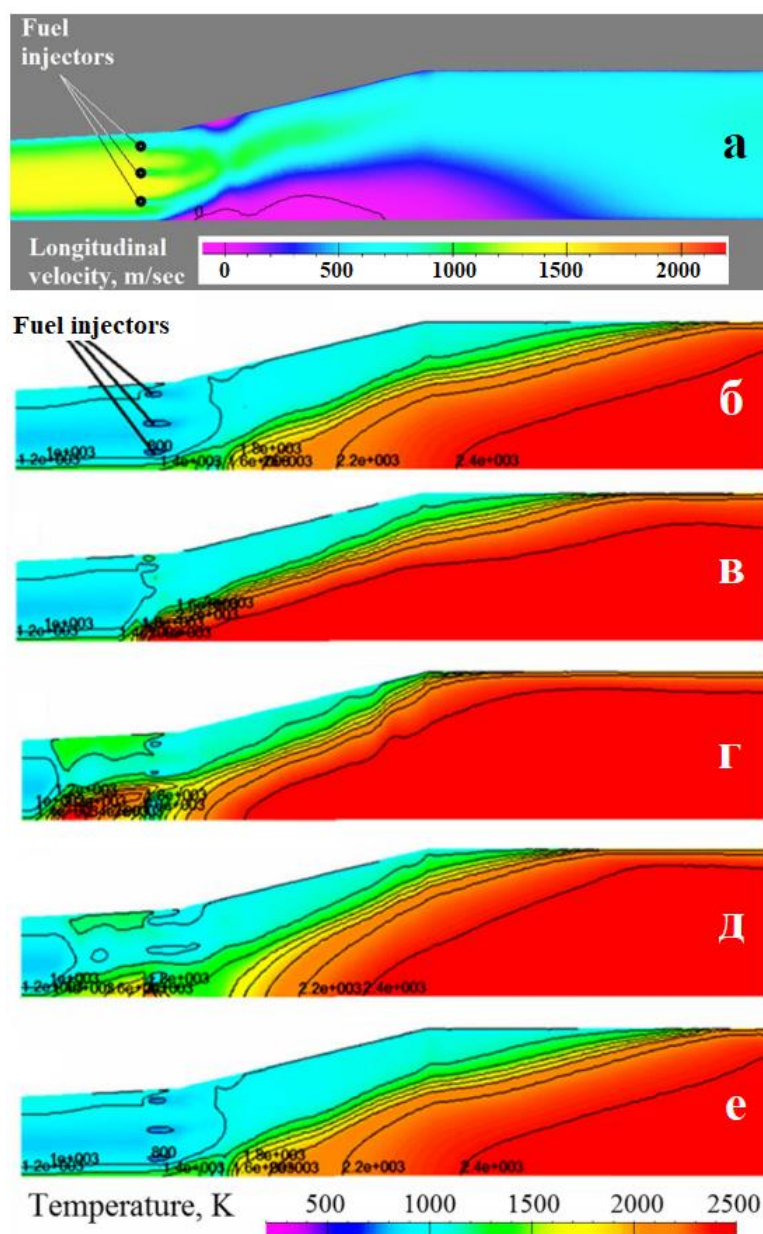


Рисунок 6 — Квазипериодические колебания зоны горения из работы [76]

в исходное состояние (рис. 6,е). Колебания носят устойчивый, незатухающий характер. Данный результат был получен в двумерных нестационарных расчетах на базе уравнений Рейнольдса.

В заключение отметим, что экспериментальная база данных ONERA, рассмотренная в настоящей диссертации, упоминается в новейшем обзоре [44]. Однако ни в этом обзоре, ни в известных автору работах других авторов не высказываются идеи относительно возможного механизма стабилизации горения в этих экспериментах. В настоящей диссертации при помощи вихреразрешающих расчетов делается попытка установить такой механизм.

1.3 Экспериментальные данные по высокоскоростным течениям с горением в каналах. Примеры моделирования в рамках подходов RANS и LES

Возможности экспериментального изучения горячих высокоскоростных потоков в каналах очень ограничены, а в области численного моделирования ещё не достигнут требуемый для практики уровень точности и надежности результатов. В связи с этим особенно актуальна задача дальнейшей разработки, валидации и настройки численных методов. Однако данный процесс крайне затруднителен без доступа к наборам экспериментальных данных, специально предназначенных для валидации математических моделей и основанных на них компьютерных программ.

Объем данных по горению в высокоскоростном потоке в открытых источниках крайне ограничен. Наиболее известными классическими экспериментами с предельно упрощенной постановкой задачи являются эксперименты по осесимметричным соосным струям топлива и воздуха: Коэна и Гайла [77], Эггерса [78], Эванса, Шекснайдера и Бича [79], Ченга, Питца и др. [80]; по пристенным струям топлива, вдуваемым в параллельный поток воздуха: Бэрроуза и Куркова [81], и Шураверы, Мии и Сталкера [82]; и, наконец, по поперечным струям топлива, вдуваемым со стенки в поток окислителя: Бен-Якар

[49], Лин и др. [50] и Гамбы, Миллера и Мунгала [51]. Эксперименты [77], [78], [79], [81] — старые исследования, в которых для измерения профилей концентраций компонент реагирующей смеси использовались пробники-газоанализаторы. Данный способ измерения состава не является вполне надежным, так как измерительные устройства возмущают поток, и к тому же внутри этих устройств могут продолжаться химические реакции и теплообмен. В эксперименте Ченга и Питца использовались невозмущающие оптические средства диагностики, однако по причинам, не объясненным авторами, при симметричной геометрии была получена асимметричная картина течения. Эксперимент Шураверы, Мии и Сталкера был направлен на измерения трения и тепловых потоков; данные по измерениям внутренней структуры течения не были опубликованы.

Для данной работы особый интерес представляют исследования поперечных струй, выдуваемых в сверхзвуковой поток, поскольку такие струи являются существенным элементом исследуемого далее течения. Все три эксперимента по поперечным струям [49], [50], [51] ограничивались только оптическими измерениями. В экспериментах Бен-Якар проводилась высокоскоростная шпирен-видеосъемка и регистрация хемилюминесценции радикалов (ОН-PLIF) в продольной вертикальной проекции (рис. 7).

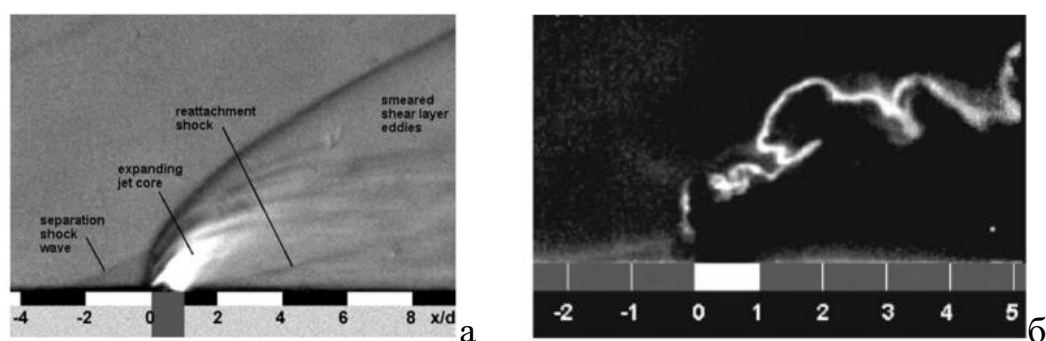


Рисунок 7 — Оптические измерения в экспериментах [49]: а) теневая картина течения; б) визуализация хемилюминесценции ОН

В экспериментах Гамбы и др. были добавлены горизонтальные проекции. Эксперименты Лин и др. были сосредоточены на промерах полей массовой доли

топлива в ряде поперечных сечений при помощи Рамановой спектроскопии (CARS). Во всех трех экспериментах не было промеров давления, трения и тепловых потоков в стенку. К тому же в экспериментах Бен-Якар и Гамбы и др. пограничный слой перед вдувом топлива был ламинарным, что не соответствует практическим случаям. Тем не менее, существует большое количество расчетных работ, в которых указанные классические эксперименты по поперечным струям используются для частичной валидации расчетной методологии. Моделирование экспериментов Бен-Якар в вихреразрешающих расчетах описано в зарубежных работах [83], [84], [85] (метод DES), [86] (метод IDDES). Из отечественных работ можно отметить расчеты ЦАГИ [87] (подход RANS) и [88] (IDDES) и ИТПМ СО РАН [89] (DDES). Отметим, что в IDDES-расчетах [88], выполненных с использованием той же программы, но иной численной схемы, что и IDDES-расчеты из настоящей диссертации, удалось правильно воспроизвести структуру течения, порождаемую поперечной струей, включая размер отрыва перед струей — см. раздел 3.2.3 диссертации.

Значительно больше экспериментальных работ посвящено исследованиям течений в модельных энергетических устройствах, что предполагает наличие канала со смешением топлива и окислителя по всему поперечному сечению, а также более сложную геометрию, которая может включать пилоны-инжекторы (возможно, несколько пилонов в одном сечении канала и даже несколько поясов инъекции), завихрители, ступенчатые расширения канала, каверны, устройства для охлаждения стенок канала и пр.

Исследования высокоскоростного горения в канале со ступенчатым расширением проводились в ИТПМ СО РАН с середины 70-х гг. XX в. (рис. 4,а). В работе [59] описан стационарный режим диффузионного горения в таком канале при высоких значениях интегрального коэффициента избытка окислителя, при котором течение в канале разделяется на слои дозвукового и сверхзвукового потоков, а горение происходит в слое смешения, разделяющем эти слои — см. рис. 8. Значения температуры, указанные на этом рисунке, оценивались по

результатам газового анализа (пробы газа отбирались насадком полного давления).

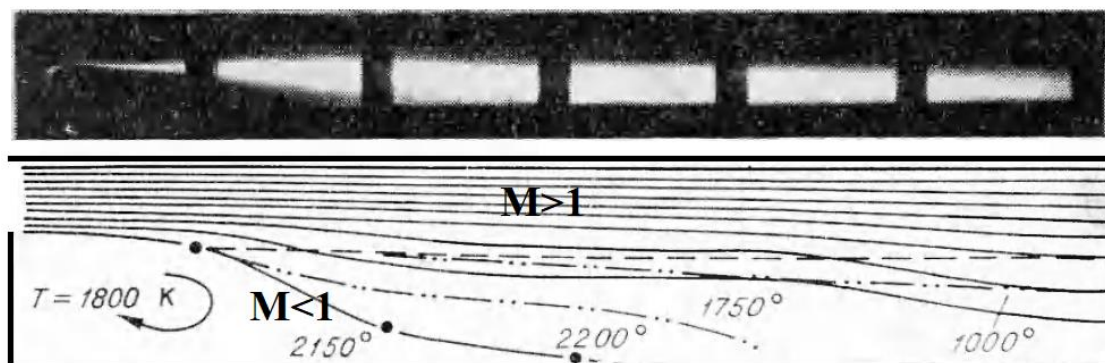


Рисунок 8 — Диффузионное горение в канале со ступенчатым расширением

Последующие исследования, проводившиеся в ИТПМ СО РАН ([64], [90], [66]), в ЦАГИ [60], а также в ЦАГИ с участием институтов РАН ([65], [91]), показали, что в каналах со ступенчатым расширением могут реализовываться режимы горения с интенсивными незатухающими колебаниями. Такие колебания были получены как в экспериментах [66], так и в расчетах [65].

С точки зрения предотвращения интенсивных колебательных процессов, более предпочтительно использование канала с непрерывным расширением. Экспериментальная модель такого типа исследовалась в ЦАГИ [52]. Были получены режимы с горением в дозвуковом потоке. Экспериментальные и численные исследования модельного канала с непрерывным расширением проводились также в ЦИАМ [92]. Стабилизация горения также достигалась в дозвуковом потоке. Еще одна модель с непрерывно расширяющимся каналом исследовалась в МАИ [93]. Модельный канал был снабжен стенками из кварцевого стекла, что позволило авторам наблюдать структуру течения. В зависимости от коэффициента избытка окислителя, авторам удалось получить стабилизацию горения как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом режимах.

Много исследований высокоскоростного горения в каналах было выполнено за рубежом (см., например, [94], [95], [96]).

К сожалению, недостатком большинства экспериментов по высокоскоростным течениям с горением в каналах является то, что приведенные в опубликованных работах данные недостаточны для воспроизведения этих экспериментов в расчете и, следовательно, не годятся для настройки физико-математических моделей течения и основанных на них компьютерных программ. Например, в работе [97] продемонстрированы значительные недостатки ряда известных экспериментов и нехватка информации в опубликованных данных для их моделирования. Для настройки расчётных моделей нужны существенно более детальные измерения, которые должны позволить максимально точно поставить начальные и граничные условия в расчете, а также подробно сравнить структуру полученного в расчете течения с экспериментальной. Рассмотрим теперь несколько примеров экспериментов, которые изначально позиционировались как тестовые случаи для настройки программных кодов.

В эксперименте МакДениела и др. [98], [99] (1991) водород выдувался в канал с $M = 2$ с обратным уступом на входе через два отверстия, расположенные одно за другим по длине канала на нижней стенке, за ступенькой. Измерения включали LDA (laser Doppler anemometry) и PLIF (planar laser induced fluorescence). В работе приведено много данных как по среднему течению, так и по пульсациям. Первая часть включала данные по режимам без горения. Официальная вторая часть с детальными данными, по-видимому, не была опубликована в открытой печати. В 2019 Шарма и др. [100] провели RANS-расчёты с моделью SST [101] режимов эксперимента МакДениела без горения. Однако сравнение с экспериментом выполнено лишь для формы струи. Несмотря на высокое качество многих работ, сложная геометрия экспериментальной модели, использование устройств для инжекции топлива и стабилизации горения (пилоны, ступеньки, каверны и прочее) приводят к взаимодействию многих разномасштабных эффектов, затрудняющих валидацию математических моделей горения.

Из рассмотренного выше ясно, что для проверки адекватности LES-расчёта горения в сверхзвуковых течениях необходимы экспериментальные данные: распределение давления на стенках канала, шпирен фотографии, распределение концентраций отдельных компонент смеси. При этом к извлекаемым экспериментальным данным предъявляются очень высокие требования точности. Например, оптические приборы должны успевать фиксировать перестройку течения. Для этого с учётом средней скорости потока необходимы высокоскоростные камеры и специальные приборы, позволяющие помимо теневого метода одновременно производить и другие оптические измерения. Всё это приводит к тому, что существующий в мировой практике объём экспериментов, подходящий для вышеописанных целей, весьма ограничен.

К ним можно отнести эксперименты Мичиганского университета [102], [3], [2], [4], [103] в которых рассматривается сверхзвуковое (число Маха на входе в канал ~ 2.2) течение в канале прямоугольного сечения (рисунок 9). Установка также содержит каверну, расположенную ниже по потоку от места подачи топлива, что позволяет относительно просто рассматривать режимы как сверхзвукового, так и дозвукового горения, меняя интенсивность подачи топлива. Авторы классифицируют режимы горения в плоскости коэффициента избытка топлива ϕ и температуры торможения набегающего потока T_0 (рисунок 10). Если существенно увеличить интенсивность подачи топлива ($\phi > 0.25$), горение стабилизируется в каверне с образованием прямого скачка вверх по потоку. Если же интенсивность подачи топлива ограничить ($\phi < 0.15$), то при достаточном значении T_0 сверхзвуковое горение будет стабилизироваться в слое смешения. Второй способ влияния на режим горения — нагрев стенок канала (позволяет перейти от сверхзвукового горения в дозвуковое), что, согласно автору [2], действует аналогично уменьшению T_0 . На самом деле подразумевается, что начнёт изменяться второе число Дамкёлера $Q = q / (C_p T_{ex})$ [104], где суммарное тепловыделение состоит из тепла, полученного в результате химических реакций, за исключением тепла, отведённого в стенки канала: $q = q_{sum} - q_{wall}$. Если стенки

нагреваются, то разница между температурой ядра потока и стенками уменьшается, следовательно, q_{wall} понижается, и Q растёт. При этом происходит тепловое запирание. Стоит обратить внимание, что уменьшение T_0 (при адиабатических граничных условиях на стенках) приводит к уменьшению T_{ex} и, следовательно, также вызывает рост Q . Стоит также отметить, что при промежуточных значениях $\phi \sim 0.2$ может возникнуть неустойчивый переходный режим между сверхзвуковым и дозвуковым горениями, состоящий из серии переходов в обе стороны и заканчивающийся дозвуковым режимом. Неустойчивость возникает потому, что при очередном переходе в дозвуковое горение (в результате нагрева стенок) топливо успевает лучше смешаться с окислителем в каверне за прямым скачком. Интенсивность горения увеличивается. Это приводит к тому, что $q_{хим}$ увеличивается, но одновременно повышается и T_0 . В результате Q понижается, и течение в канале снова переходит в режим сверхзвукового горения. Так происходит несколько раз, пока стенки не нагреются достаточно, чтобы зона горения окончательно стабилизировалась в каверне. Такого рода неустойчивое поведение требует детального изучения.

Моделирование течения в вышеописанной установке с помощью метода крупных вихрей представлено в работе [105]. Следует отметить, что автор использует оригинальный LES-подход, включающий замыкающую динамическую модель с одним дополнительным уравнением для кинетической энергии подсеточных пульсаций LDKM (local dynamic k -equation model) [106], модель турбулентного горения PaSR [107] и несколько моделей химической кинетики [23], [108], [109]. Им было показано, что наилучшим согласованием с экспериментом обладает модель из [109], поскольку позволяет получить наиболее точное время задержки воспламенения. В работе [105] получены устойчивые переходы от сверхзвукового к дозвуковому режиму горения и обратно. Также был получен неустойчивый режим. Стоит отметить, что в последнее время неустойчивые режимы сверхзвукового горения приобретают популярность в области численных исследований [110], [111], [112]. В экспериментах же

возникает интерес к спонтанным переходам от сверхзвукового горения к дозвуковому [113].

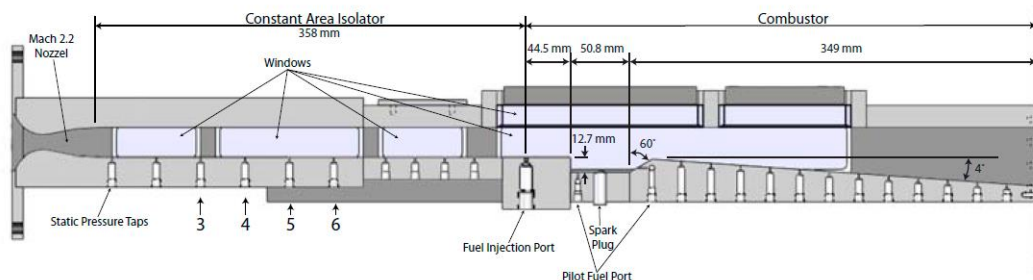


Рисунок 9 — Схема экспериментальной установки из [103]

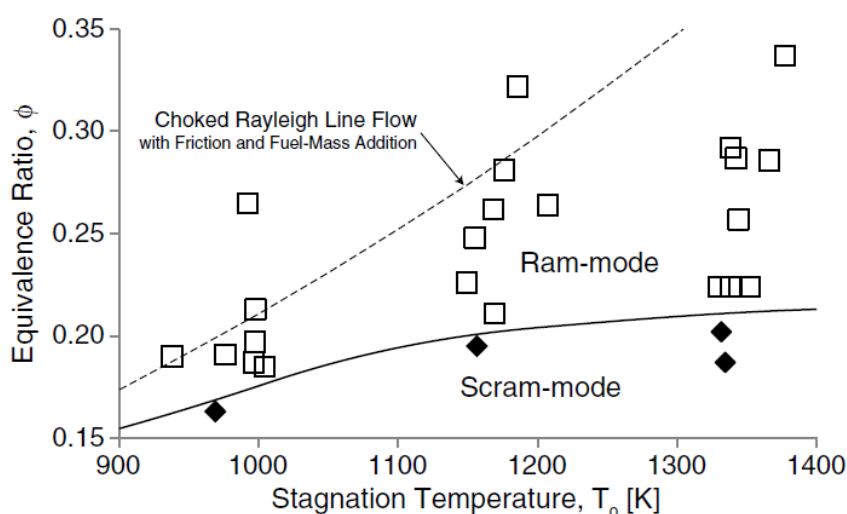


Рисунок 10 — Классификация режимов горения, взято из [2]

Второй эксперимент, который будет здесь рассмотрен, был выполнен в рамках международного проекта. Наземные испытания проводились в Квинсленде [114] и Гёттингене [115], [116], [117]. На рисунке 11 изображена схема установки, которая состоит из сужающейся части воздухозаборника, прямоугольного канала с постоянной площадью сечения длиной 300 мм и расширяющегося участка (под углом 12 градусов). Число Маха на входе в прямоугольный канал приблизительно равно 2.79, что соответствует числу Маха полёта 7.6. Непосредственно на расстоянии 57.5 мм от входа в канал в нижней стенке расположен инжектор. В эксперименте проводились промеры распределения статического давления и тепловых потоков вдоль канала. Также для некоторых режимов проводилась видеосъёмка хемилюминесценции

радикалов OH^* и шпирен. В [118] рассматривается вихреразрывающий расчёт одного из режимов данного эксперимента на сетках до 71 миллиона ячеек. При сопоставлении распределений статического давления в расчёте и эксперименте наблюдается различное поведение, как для продольной, так и для временной зависимости. Тем не менее, вихреразрывающий расчёт подтверждает высокую степень смешения окислителя и топлива, что приводит к полному сгоранию последнего в модельном канале. Быстрое смешение обосновывается увеличением вязких масштабов из-за условий режима течения. В подтверждении данного тезиса приводятся спектры кинетической энергии турбулентности в контрольных точках.

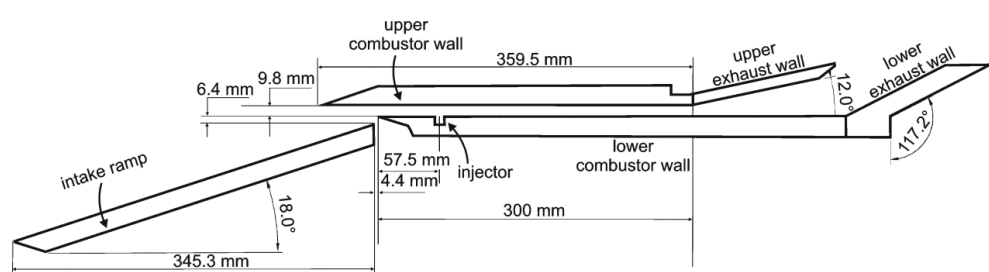


Рисунок 11 — Экспериментальная установка, изображение взято из [115]

В [119] тот же коллектив авторов использует осреднённые результаты LES-расчёта для исследования взаимодействия ПС и ударных волн. Авторам удаётся предсказать образование отрывов, наблюдаемых в эксперименте. Также в расчётах радикалы OH наблюдаются выше по потоку от инжекторов и ниже отрывов. В [120] в рамках LES-расчёта исследуются траектории газовых компонент. Показано, что компоненты O и NO влияют на время задержки воспламенения (O сильнее), а радикалы, образующие HO_2 , формируются в пристеночной области в окрестности инжектора, то есть, в отрыве из-под скачка.

Еще один хороший эксперимент по высокоскоростному течению с горением в расширяющемся канале был выполнен в ONERA в 2014 г. [1]. У автора имелись ограниченные возможности по консультациям с авторами этого эксперимента и с вычислителями из ONERA, которые пытались выполнить численное моделирование этого эксперимента. Поэтому именно этот эксперимент выбран в

данной диссертации как основа для проведения исследования. Подробное описание этого эксперимента будет дано в Главе 3.

Следует отметить, что в 2018-2021 гг. в ЦАГИ были организованы экспериментальные исследования высокоскоростного течения с горением в канале, также ориентированные на валидацию компьютерных моделей и программ [121], [122]. Была создана экспериментальная модель, имеющая сходство с моделью ONERA, но отличающаяся по геометрии, конструкции и режимам течения (рис. 12). Полученный набор экспериментальных данных не рассматривается в настоящей диссертации, поскольку к началу экспериментов ЦАГИ автор уже начал работать с базой экспериментальных данных ONERA.

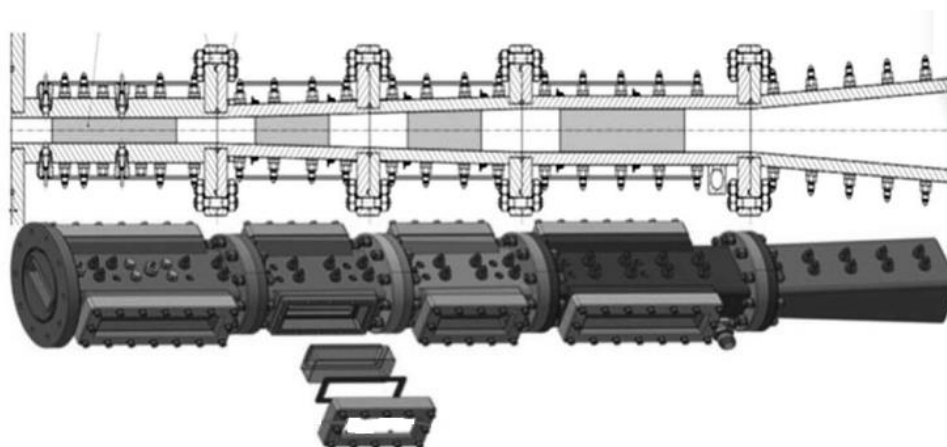


Рисунок 12 — Экспериментальная модель ЦАГИ

1.4 Особенности высокоскоростных течений в прямоугольных каналах и связанные проблемы RANS/LES-моделирования

Одной из ключевых проблем, возникающих при моделировании высокоскоростного течения (без химических реакций) в канале, является описание вторичных токов. Достаточно подробно эта проблема описана в диссертации Кшитийча Сабниса (Kshitij Sabnis) [123]. Для понимания сути рассмотрим несколько модельных примеров.

Начнём с отрывного взаимодействия пограничного слоя (ПС) с прямым скачком уплотнения (ПСУ), рисунок 13. Образованный в некотором сечении ПСУ порождает неблагоприятный градиент давления, который приводит к отрыву ПС.

Получившийся отрыв выполняет роль клина сжатия, на который садится косой скачок уплотнения (КСУ). Однако перепад давления в КСУ оказывается меньшим, чем в ПСУ, поэтому из точки их пересечения выходит обратный КСУ. Таким образом, возникает λ -скачок [124], рисунок 13. Естественно ожидать, что взаимодействие двух отрывных ПС приведёт к возникновению ещё большего отрыва в углу канала. Увеличение размеров отрывной области в углу увеличивает также расстояние между КСУ в λ -скачке над ней. Можно заключить, что чем больше отрывы в углах, тем дальше друг от друга расположены «ножки» λ -скачка, а, значит, неблагоприятный градиент давления уменьшается. Следовательно, уменьшаются размеры отрывной области в центре канала. Это означает, что в случае ПСУ размеры отрывных областей в углах и центре канала обладают обратной зависимостью: чем больше угловые отрывы, тем меньше центральный и наоборот. Поэтому, увеличивая отрывы в углах, можно добиться безотрывного обтекания в центре. Подтверждением этому высказыванию служит рисунок 14, на котором изображены масляные визуализации течения из эксперимента [125]. Представлены два режима течения с числом Маха набегающего потока 1.4 (а, б) и 1.5 (в, г). Красные пунктирные линии обозначают толщину ПС в углах, белый пунктир — примерное расположение ПСУ.

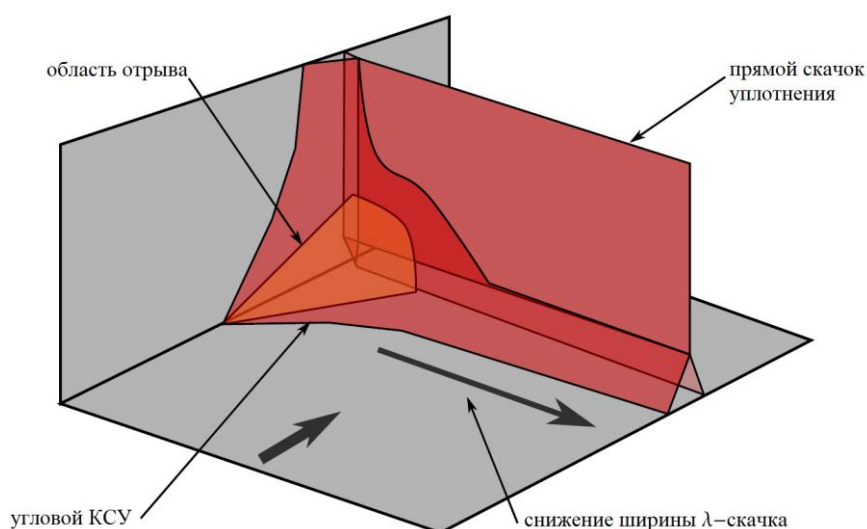


Рисунок 13 — Взаимодействие ПС с ПСУ в прямоугольном канале (серым изображены стенки канала), изображение взято из [123]

На рисунке 14а видно, что в отсутствии отсоса ПС в окрестности ПСУ образуются отрывы в углах, а в центре канала взаимодействие ПСУ и ПС остаётся безотрывным. Если же произвести отсос ПС, то размер угловых отрывов уменьшится (рисунок 14б), и образуется отрыв в центре канала (выделен жёлтым цветом). Обратную картину можно наблюдать на рисунках 14в и 14г — изначально при $M=1.5$ происходит отрывное взаимодействие ПС и ПСУ, однако, если расположить препятствия в углах, то размеры угловых отрывов существенно увеличиваются, а отрыв в центре канала исчезает.

В случае взаимодействия ПС с КСУ структура течения оказывается более сложной. На рисунке 16 представлена схема взаимодействия. Коническая ударная волна, образованная угловым отрывом (поскольку течение за отражённым КСУ, как правило, остаётся сверхзвуковым) может проходить через падающий и отражённый КСУ (изображено чёрным пунктиром). Эти конические ударные волны с противоположных углов пересекаются в плоскости симметрии канала. Положение точки пересечения относительно отрывной области в центре канала существенно влияет на последнюю. Сама же точка пересечения зависит от размеров угловых отрывов (влияет на угол ударной волны) и расположения точки начала угловых отрывов (определяет точку начала ударной волны). Оказывается, многообразие вариантов пересечений можно разделить на три характерные категории: ударные волны пересекаются ниже по потоку отрывной области в центре канала, ударные волны пересекаются над отрывной областью в центре канала и ударные волны пересекаются выше по потоку от области центрального отрыва. Все эти случаи были рассмотрены в эксперименте [126] и изображены на рисунке 17.

В первом случае (рисунок 17а) угловые отрывы обладают наименьшим размером и расположены ниже всего по потоку. В такой ситуации ударные волны, образованные ими, пересекаются за центральной отрывной областью и практически не влияют на её продольный размер, однако влияют на боковой: если сдвигать угловые отрывы вверх по потоку, то область повышенного давления

будет смещаться к оси симметрии канала. Следовательно, центральный отрыв будет сужаться.

Во втором случае (рисунок 17б) ударные волны пересекаются над центральным отрывом, а, значит, увеличивают неблагоприятный градиент давления и, как следствие, увеличивают размер центрального отрыва в продольном направлении.

В последнем в рамках данной классификации случае ударные волны пересекаются выше по потоку от области центрального отрыва (рисунок 17в). Это приводит к двум изменениям. Во-первых, за пересечением происходит рост давления, а, значит, неблагоприятный градиент давления уменьшается. Во-вторых, в данной ситуации в область центрального отрыва могут попасть волны разрежения, образованные поверхностью угловых отрывов. В этом случае неблагоприятный градиент давления становится ещё меньше.

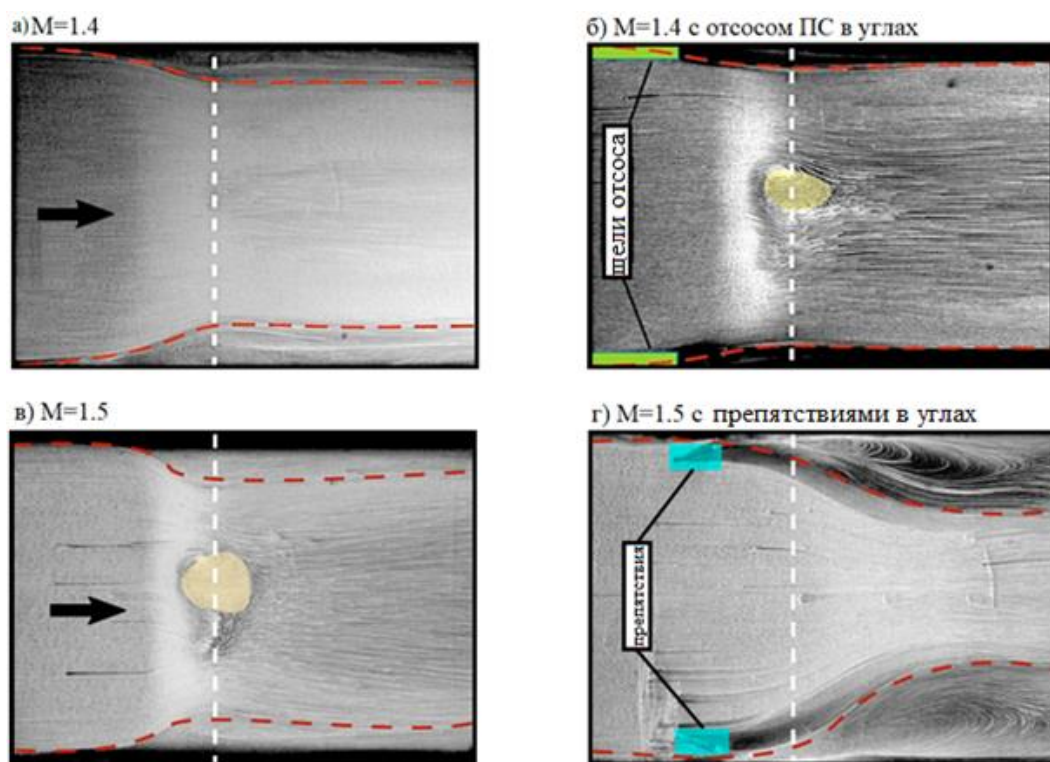


Рисунок 14 — Взаимодействие отрывных областей в углах и центре прямоугольного канала в случае ПСУ, изображение взято из [123]

Проблема моделирования вторичных течений состоит в том, что использующиеся замыкающие модели, обладающие линейной связью между

напряжениями Рейнольдса R_{ij} и градиентами среднего поля скорости, не учитывают анизотропии R_{ij} , следовательно, не описывают вторичные токи в углах [123]. На рисунке 15 изображены поля вертикальной компоненты скорости в поперечном сечении прямоугольного канала с периодическими граничными условиями в продольном направлении. Сравниваются модель SST [127] (с линейной связью) и модель DRSM SSG/LRR- ω [128] (с нелинейной). Видно, что в случае DRSM модели в углах присутствуют вихри с характерной амплитудой порядка 1% от скорости набегающего потока.

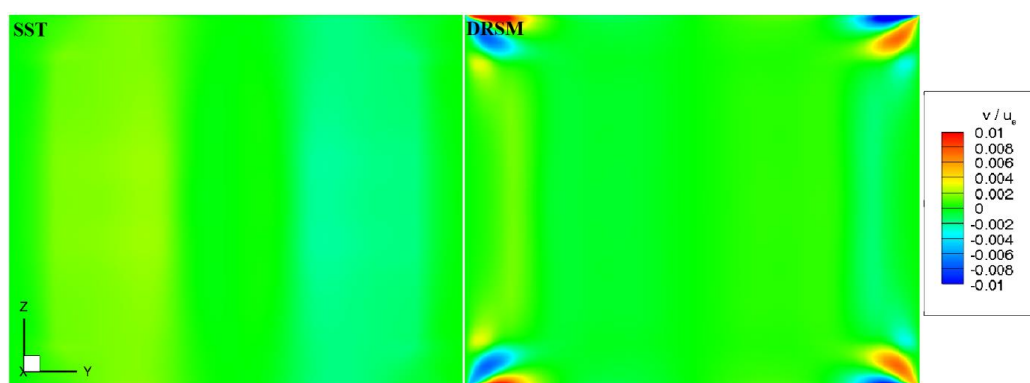


Рисунок 15 — Поле вертикальной компоненты скорости. Слева представлен расчёт по SST модели, справа — DRSM

В [129] продемонстрировано, что при моделировании взаимодействия ПС с ПСУ в прямоугольном канале в рамках RANS-подхода применение различных «буссинесковых» моделей турбулентности приводит к различным геометриям угловых отрывов и их различным расположениям.

Таким образом, можно заключить, что для правильного описания высокоскоростного течения в каналах прямоугольного сечения необходимо корректно воспроизводить вторичные токи, существенно влияющие на отрывы в углах, которые в свою очередь влияют на газодинамическую структуру течения. Как правило (существуют и другие конфигурации [123]), вторичные токи представляют из себя пару противовращающихся вихрей, которые переносят импульс от невязкого ядра течения к углу.

Всё это наводит на мысль о применении замыкающих моделей с нелинейным выражением для компонент R_{ij} . В [123] предлагается использовать предложенные Спалартом модели QCR-2000 [130] или QCR-2013 [131], а также своя оригинальная модификация данного подхода. Однако в этой же работе [123] с помощью сравнения с данными DNS-расчётов делается вывод, что квадратичные модели не воспроизводят реальные физические процессы, а лишь позволяют создать вторичные токи с некоторой степенью произвола, что позволяет существенно улучшить описание угловых отрывов в прямоугольных каналах. В [132] представлено множество расчётов высокоскоростного течения в каналах с использованием вышеописанных квадратичных моделей, а также с помощью модели EARSM [133].

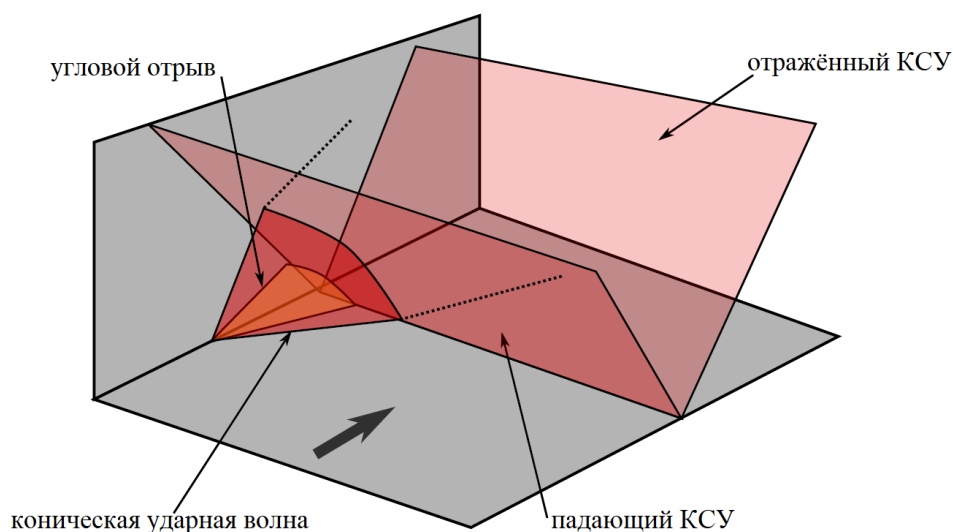


Рисунок 16 — Взаимодействие ПС с КСУ в прямоугольном канале (серым изображены стенки канала), изображение взято из [123]

Автор заключает, что, несмотря на отличия получаемых решений с помощью различных моделей, все они позволяют существенно улучшить качество решения в сравнении с моделями, использующими линейную связь. Выбор конкретной реализации, равно как и значений модельных констант, осуществляется непосредственно пользователем по принципу “sapiienti sat”.

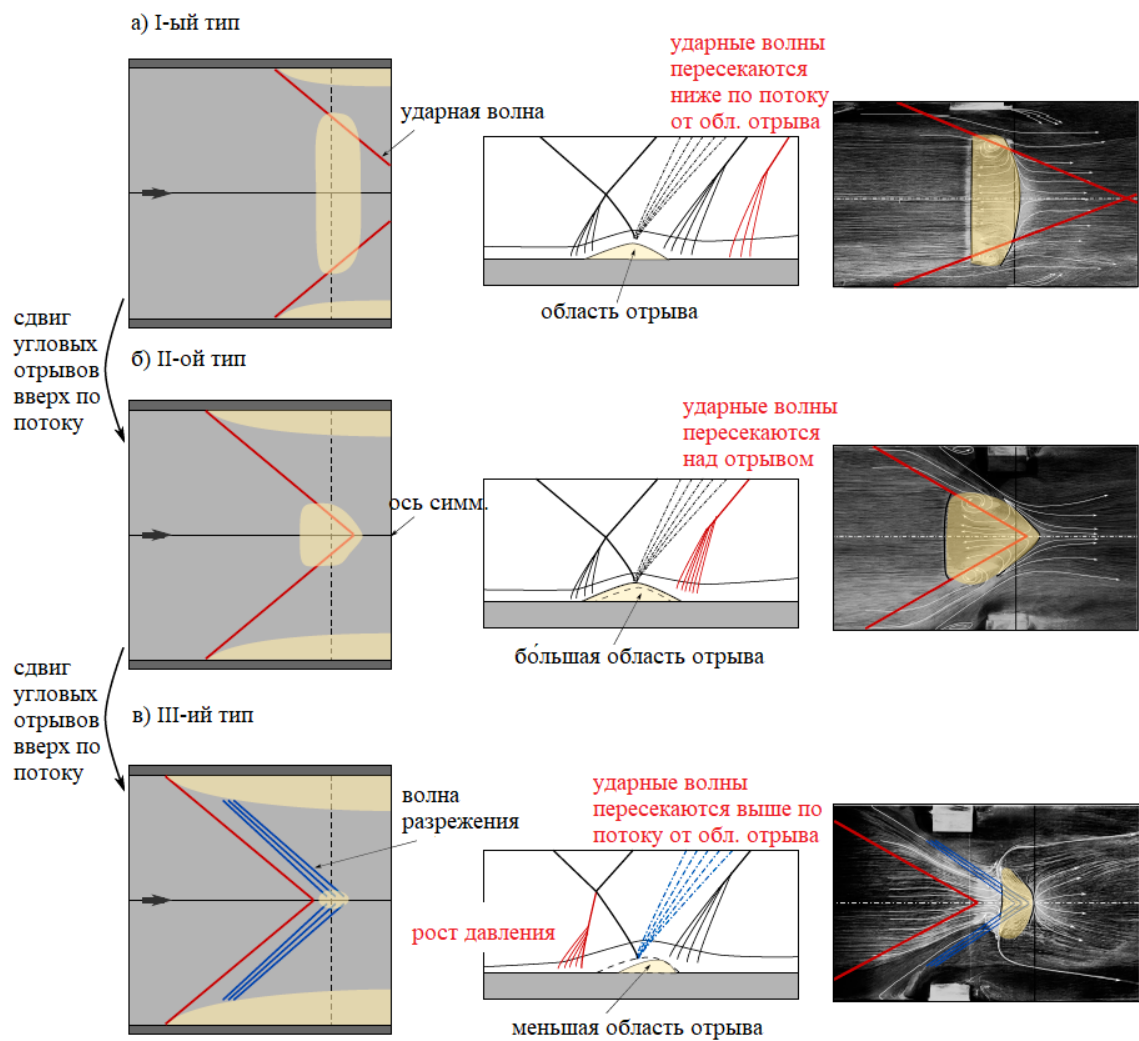


Рисунок 17 — Взаимодействие отрывных областей в углах и центре прямоугольного канала в случае КСУ, изображение взято из [123]

ГЛАВА 2. ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩИЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ

Данная глава посвящена уравнениям, рассматриваемым в рамках метода крупных вихрей, и их численной аппроксимации. Анализируется обширный набор разностных схем (пространственных и временных) для аппроксимации конвективных членов уравнений. Проводится методический анализ построения численной технологии и калибровки констант подсеточной модели для корректного применения вихреразрешающего подхода.

2.1 Описание решаемых уравнений

Для простоты рассуждений рассмотрим воздушную среду без химических реакций (уравнения для реагирующей смеси будут представлены в соответствующем месте в следующей главе). Тогда система дифференциальных уравнений движения сжимаемого вязкого совершенного газа может быть

представлена в дивергентном виде: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{u})}{\partial x_i} = 0$, где $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \cdot \tilde{u}_k \\ \bar{\rho} \cdot \tilde{E} \end{bmatrix}$ — вектор

консервативных переменных, ρ — плотность, u_k — k -я компонента вектора скорости, $E = u_i u_i / 2 + h - p / \rho$ — полная энергия, p — давление, $h = C_p T$ — энтальпия, T — температура, C_p — теплоёмкость при постоянном давлении. Знак осреднения « $\bar{a}$ » подразумевает осреднение по Рейнольдсу [7], если рассматривается RANS-область решения, или фильтрацию² по пространству, если рассматривается LES-область (формально осреднённые и отфильтрованные уравнения совпадают, поэтому к используемым величинам следует относиться по-разному в зависимости от рассматриваемой области). В обоих случаях

² $\overline{a(x_i, t)} = \int_{\mathbb{R}^3} G[x_i - \xi_i, \Delta(x_i, t)] a(\xi_i, t) d\xi_i$, где G — пространственный фильтр, Δ — размер ячейки сетки.

применяется осреднение по Фавру: $\tilde{a} = \overline{\rho a} / \bar{\rho}$, $a = \tilde{a} + a''$. Вектор потоков имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{u}_i + \bar{p} \delta_{ik} + \bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_k'' + \tilde{\tau}_{ik} \\ \bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_i + \bar{p} \tilde{u}_i + (\bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_k'' + \tilde{\tau}_{ik}) \tilde{u}_k + \bar{\rho} C_p \tilde{T}'' \tilde{u}_k'' + \tilde{q}_i \end{bmatrix},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Стоит отметить, что в уравнении энергии опущены потоки кинетической энергии турбулентности, малые по сравнению с остальными потоками. Молекулярная диффузия описывается линейной моделью, а коэффициент вязкости определяется с помощью формулы Сазерленда:

$$\tau_{ik} = -2\mu \cdot \left[S_{ik} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ik} \right], \mu = 1.72 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2} \frac{273 + 122}{T + 122},$$

где $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор скоростей деформации.

Следует отметить, что потоки можно формально разделить на диффузионные и конвективные, тогда вектор потоков можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i,\text{conv}} + \mathbf{F}_{i,\text{diff}}, \text{ где } \mathbf{F}_{i,\text{conv}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_k \tilde{u}_i + \bar{p} \delta_{ik} \\ \bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_i + \bar{p} \tilde{u}_i \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{i,\text{diff}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_k'' + \tilde{\tau}_{ik} \\ (\bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_k'' + \tilde{\tau}_{ik}) \tilde{u}_k + \bar{\rho} C_p \tilde{T}'' \tilde{u}_k'' + \tilde{q}_i \end{bmatrix}.$$

Такое разделение актуально для численных методов, поскольку для конвективных и диффузионных потоков будут применяться различные разностные схемы.

Для определения теплового потока используется закон Фурье и гипотеза о пропорциональности коэффициентов диффузии импульса и тепла: $q_i = -\frac{\mu}{\text{Pr}} C_p \frac{\partial T}{\partial x_i}$,

$\text{Pr} = 0.72$. Для замыкания системы используется уравнение состояния $p = \rho R_0 T / m$ где R_0 — универсальная газовая постоянная, m — молярная масса газа. Таким образом, в системе остаются незамкнутыми турбулентные потоки

$\bar{\rho}u_i''u_k''$, $\bar{\rho}C_pT''u_k''$ и кинетическая энергия турбулентности $k = u_i''u_i''/2$ (в случае RANS это кинетическая энергия всей турбулентности, а в случае LES — подсеточной турбулентности). Далее знаки осреднения/фильтрации опущены в предположении, что везде применяются правила Фавра, за исключением тех мест, где знаки осреднения необходимы.

Следует подчеркнуть, что в гибридных вихреразрешающих методах модели турбулентности необходимо сформулировать для пристенной части (в RANS-области) и для подсеточной (в LES-области). В общем случае эти модели могут быть различными. Одна из ключевых проблем гибридных методов — корректное описание области их стыковки (промежуточной области). В данной работе для определения турбулентных потоков и кинетической энергии турбулентности в качестве базовой модели замыкания (пристенной и подсеточной одновременно) используется упрощённая ($f_e = 0$) модель SST-IDDES [134], которая включает два дополнительных уравнения для k и ω :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho u_i k - (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] = P_k - \rho \frac{\sqrt{k^3}}{l_{IDDES}},$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho u_i \omega - (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] = 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \alpha \frac{\rho}{\mu_t} P_k - \beta \rho \omega^2.$$

Данная модель замыкания основана на гипотезе Буссинеска о подобии турбулентного и молекулярного переноса, которая позволяет описать все турбулентные потоки путем введения турбулентной вязкости μ_t . Турбулентная

вязкость определяется следующим образом: $\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \cdot \left[\max \left(1; \sqrt{\frac{2S_{ij}S_{ij}F_2}{0.31\omega}} \right) \right]^{-1}$, где

$$F_2 = \text{th}(\arg_2^2) \text{ — пристенная функция, } \arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{C_\mu \omega d_w}; \frac{500\nu}{d_w^2 \omega} \right), \quad d_w \text{ —}$$

расстояние до ближайшей стенки.

RANS/LES переход осуществляется с помощью масштаба длины $l_{IDDES} = \tilde{f}_d \cdot (1 + f_e) l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d) l_{LES}$, входящего в диссипативный член уравнения для k . Масштаб длины в RANS-области определяется выражением $l_{RANS} = \sqrt{k} / C_\mu \omega$. Таким образом, l_{IDDES} меняется между l_{RANS} и l_{LES} с помощью эмпирических функций: $\tilde{f}_d = \max\{(1 - f_{dt}), f_b\}$, $f_b = \min\{2 \exp(-9\zeta^2), 1.0\}$, $\zeta = 0.25 - d_w / h_{\max}$, $f_{dt} = 1 - \tanh[(20r_d)^3]$, где $r_d = \frac{\mu_t / \rho + \nu}{(0.41d_w)^2 \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \Omega_{ij}\Omega_{ij}}}$, $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор завихренности, $h_{\max}$ — максимальный линейный масштаб ячейки. Сам масштаб длины в вихреразрешающей области определяется следующим выражением: $l_{LES} = C_{DES} \Delta$, $\Delta = \min\{0.15 \cdot \max[d_w, h_{\max}], h_{\max}\}$. Переменные $\alpha, \beta, \sigma_k, \sigma_\omega, C_{DES}$ являются константами модели, которые плавно меняются между двумя предельными значениями: $\alpha = \alpha_1 \cdot F_1 + \alpha_2 \cdot (1 - F_1)$. Нижнему индексу «1» соответствует значение непосредственно у стенки, индексу «2» — значение вдали от стенки. В качестве переходной функции используется

$$F_1 = \text{th}(\arg_1^4), \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{C_\mu \omega d_w}; \frac{500\nu}{d_w^2 \omega} \right); \frac{4\rho k \sigma_{\omega 2}}{\max \left(2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{\nabla k \nabla \omega}{\omega}; 10^{-10} \right) \cdot d_w^2} \right].$$

Предельные значения констант следующие:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 5/9, & \beta_1 &= 0.075, & \sigma_{k1} &= 0.85, & \sigma_{\omega 1} &= 0.5, & C_{DES1} &= 0.78, \\ \alpha_2 &= 0.44, & \beta_2 &= 0.0828, & \sigma_{k2} &= 1.0, & \sigma_{\omega 2} &= 0.856, & C_{DES2} &= 0.61. \end{aligned}$$

Левые части уравнений для k и ω включают конвективный, молекулярный и турбулентный диффузионные потоки. Правые части — источниковые члены. Первый член в правой части уравнения для ω представляет источник, называемый “перекрёстной диффузией”, который также используется в определении переходной функции F_1 . Последние два члена в обоих уравнениях — источники подсеточной/моделируемой турбулентности (в случае RANS имеется в виду вся

турбулентность). Выражение для производства турбулентности имеет вид:
 $P_k = \min(\mu_t 2S_{ij}S_{ij}, 10C_\mu \rho k \omega)$, где $C_\mu = 0.09$.

Из гипотезы Буссинеска следует линейная связь между турбулентными потоками различных параметров и их средними градиентами:

$$\rho u_i'' u_k'' = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ik} - 2\mu_t \cdot \left[S_{ik} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right], \quad \rho C_p T'' u_i'' = -\frac{\mu_t}{Pr_{turb}} C_p \frac{\partial T}{\partial x_i}, \text{ где } Pr_{turb} = 0.9 \text{ —}$$

турбулентное число Прандтля.

Стоит также отметить, что к вышеописанному SST-IDDES подходу применялась поправка SLA [135], позволяющая существенно сократить задержку развития слоя смешения.

2.2 Численный метод. Современные тенденции

В последние два десятилетия всё более широкую популярность в области вычислительной аэродинамики набирают схемы семейства ENO [136], [137] с переменным шаблоном, зависящим от решения. Среди них выделяются WENO-схемы [138], обладающие лучшими индикаторами гладкости и бóльшим порядком аппроксимации на одинаковом с ENO шаблоне. Стоит отметить, что расчётные программы на основе схем ENO и WENO, ориентированные на решение практических задач газовой динамики в рамках метода конечного объёма (МКО), обладают, как правило, вторым порядком точности. Это обусловлено переходом от полноценной многомерной реконструкции к реконструкции по направлению в угоду скорости счёта. То есть, для нахождения искомых величин на каждой грани ячейки расчётной области используется свой одномерный шаблон. Эту проблему можно исправить увеличением числа гауссовых точек на грани [138], однако данный подход приводит к существенному снижению скорости счёта. Альтернативой является процедура повышения порядка, описанная в [139]. Она оказывается более экономичной, но применимой только в случае декартовых сеток. При реконструкции по направлению схемы ENO и WENO не реализуют свой теоретический порядок точности, однако все равно позволяют существенно

снизить ошибки по сравнению с классическими TVD-схемами. Это связано с тем, что коэффициент в разложении в ряд Тейлора перед h^2 оказывается меньшим. Схемы ENO и WENO также отличаются тем, что эффективно борются с возникающими в области больших градиентов решения осцилляциями Гиббса. Таким образом, они позволяют качественно корректно описывать задачи, содержащие разрывы параметров. С другой стороны, схемы ENO и WENO, являясь несимметричными, обладают численной диссипацией, которая хоть и существенно меньше, чем в случае постоянной [140] или линейной реконструкции [141], всё ещё оказывается избыточной для корректного применения в методе крупных вихрей (LES).

Наиболее популярным подходом, пригодным для LES-расчетов, является использование гибридной схемы. В данной диссертации она представляет собой линейную комбинацию противопоточной схемы WENO5 [138] с монотонизацией [142] и использованием точного решения задачи Римана [143], и центрально-разностной схемы CD2 с помощью весовой функции σ [144]: $F_{\text{conv}} = \sigma \cdot F_{\text{upwind}} + (1 - \sigma) \cdot F_{\text{CD}}$. Это обеспечивает повышенное пространственное разрешение и устойчивый счет вблизи разрывов решения. Однако у этого подхода есть недостатки. Во-первых, как правило, функция смещения является достаточно сложной и включает в себя зависящую от течения константу σ . Во-вторых, гибридная схема не полностью отключает противопоточную составляющую, что затрудняет оценку уровня её диссипативности. В связи с этим интересен и актуален вопрос изучения схем, которые не являются гибридными и не используют эмпирические константы, но пригодны для LES-расчетов.

Цель данного раздела — оценить современные схемы семейства WENO, которые могут составить конкуренцию гибридной схеме [144] в рамках LES. Требование низкого уровня диссипативности в рамках МКО приводит к тому, что внимание будет сосредоточено на схемах семейства WENO, использующих в одномерной реконструкции по направлению либо симметричный шаблон [145],

[146], [147], [148], [149], [150], либо модификацию индикаторов гладкости [151], [152], [153].

2.2.1 Формулировка базовой схемы WENO5

Без ограничения общности рассмотрим в рамках равномерной сетки реконструкцию решения на грань $i+1/2$ слева (рисунок 18). Тогда в случае пятиточечного шаблона $i-2, i-1, i, i+1, i+2$ итоговую реконструкцию можно представить как линейную комбинацию трёх реконструкций по трём точкам:

$$f_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 \omega_k f_{i+1/2}^{(k)}, \quad \text{где} \quad f_{i+1/2}^{(0)} = \frac{1}{3} f_{i-2} - \frac{7}{6} f_{i-1} + \frac{11}{6} f_i, \quad f_{i+1/2}^{(1)} = -\frac{1}{6} f_{i-1} + \frac{5}{6} f_i + \frac{1}{3} f_{i+1},$$

$f_{i+1/2}^{(2)} = \frac{1}{3} f_i + \frac{5}{6} f_{i+1} - \frac{1}{6} f_{i+2}$, использующих шаблоны S_0, S_1, S_2 , а ω_k — нелинейные весовые коэффициенты, определяемые конкретным методом.

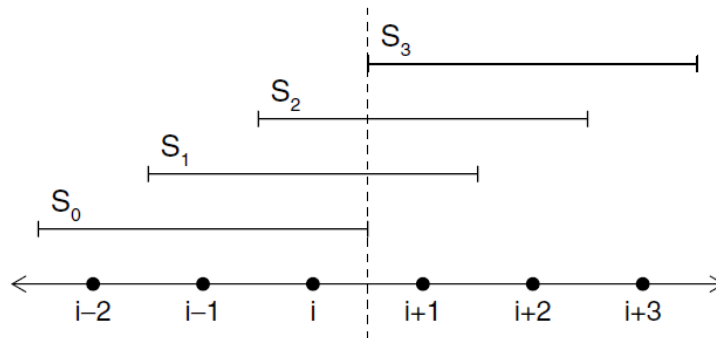


Рисунок 18 — Шеститочечный шаблон для реконструкции значения на грани $x_{i+1/2}$, изображение взято из [145]

В базовой аппроксимации WENO5 веса ω_k определяются через оптимальные веса d_k , индикаторы гладкости IS_k и условие нормировки:

$$\omega_k = \alpha_k / \sum_{l=0}^2 \alpha_l, \quad \alpha_k = d_k / (\varepsilon + IS_k)^2, \quad \text{оптимальные веса: } d_0 = 0.1, \quad d_1 = 0.6, \quad d_2 = 0.3.$$

При непосредственной подстановке оптимальных весов d_k вместо ω_k получится противопоточная схема (upwind) соответствующего порядка. Однако такая схема оказывается несохраняющей свойства монотонности решения по Хартену [154] согласно теореме Годунова [140]. Для обхода этого ограничения вводятся

индикаторы гладкости, задача которых минимизировать вклад шаблона, содержащего разрыв решения. Из формулы для нелинейных весов очевидно, что в случае гладкого распределения решения на шаблоне, соответствующий ему индикатор гладкости должен удовлетворять условию $IS_k = O(h^2)$, а в случае разрыва — $IS_k = O(1)$. Сами индикаторы гладкости выражаются следующим образом:

$$IS_0 = \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2,$$

$$IS_1 = \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{i-1} - 4f_i + 3f_{i+1})^2,$$

$$IS_2 = \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(f_{i+2} - 4f_{i+1} + 3f_i)^2.$$

Данные выражения представляют собой суммы квадратов отмасштабированных (чтобы убрать влияние сетки) L_2 норм для всех производных интерполяционного полинома на интервале ячейки $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$.

Малая положительная константа ε предотвращает деление на ноль в области экстремумов. В базовой версии WENO5 её значение равно 10^{-6} , однако, согласно [151], данное значение оказывается слишком большим. В данной работе для WENO5 и гибридной схем использовалось $\varepsilon = 10^{-20}$.

2.2.2 Выбор современных методов семейства WENO

Начнём с рассмотрения WENO-схем, построенных на симметричном шаблоне (везде далее будут рассматриваться схемы, использующие для определения параметров на грани между соседними ячейками (рисунок 18) шаблон из 5 либо 6 точек; с практической точки зрения, дальнейшее расширение шаблона не приводит к значительному улучшению решения, при этом затрачивается существенно больше ресурсов [155], а также усложняется постановка граничных условий и увеличивается пространственная область

влияния на значение в точке [156]. В [145] сравниваются два вида симметричных схем, использующих шеститочечный шаблон. В классической постановке WENO5 для реконструкции функции с левой стороны грани $i+1/2$ используется 3 трёхточечных шаблона, в случае гладкого решения обеспечивающих 5-ый порядок аппроксимации. Идея WENO-схем на симметричном шаблоне состоит в том, чтобы добавить ещё один трёхточечный шаблон (S_3 на рисунке 18) и пересчитать их оптимальные весовые коэффициенты. Первый подход из [145] предлагает выполнить пересчёт так, чтобы вместо противопоточной аппроксимации 5-го порядка «оптимальной» стала центрально-разностная аппроксимация 6-го порядка (далее — CD6). Однако стоит отметить, что шаблон S_3 является источником неустойчивости, поэтому схема устроена таким образом, что даже при относительно малых возмущениях решения его вес в итоговой реконструкции обнуляется и схема переходит в противопоточную. Данный подход общепринято называть WENO-SYMOO (Symmetrical Order-Optimized). Второй способ модификации оптимальных весовых коэффициентов шаблонов основывается на том, чтобы не обнулять диссипацию схемы, а сдвинуть диссипативную ошибку в область коротких волн, для которых дисперсионная ошибка превышает 10%, из-за чего они в любом случае воспроизводятся неверно. При этом формальный порядок аппроксимации нарушается, однако реконструкция на каждом из 4 шаблонов сама обладает 3-им порядком аппроксимации, следовательно, итоговая схема также будет формально 3-го порядка. Этот недостаток позднее был исправлен в [157], что позволило увеличить формальный порядок до 5-го на гладком решении. Такой подход назван WENO-SYMBO (Symmetrical Bandwidth-Optimized), а его «исправленная» версия более высокого порядка — WENO-SYMBOO6 (Symmetrical Bandwidth and Order-Optimized, 6-точечный шаблон). В [145] продемонстрировано, что WENO-SYMOO ведёт себя неустойчиво около разрывов, из-за чего в настоящей диссертации предпочтение отдается не ей, а схеме WENO-SYMBOO6, которая далее будет сравниваться с другими схемами, пригодными для LES-расчётов.

Дальнейшее развитие WENO-схемы получили в работе [151], в которой предлагается модифицировать индикаторы гладкости в рамках противопоточной схемы. Модификация, в первую очередь, связана с тем, что в окрестности критических точек (точки, в которых первая или вторая производные обнуляются) порядок точности классической схемы WENO5 опускается до 3-го, если обнуляется 1-ая производная, и до 2-го, если обнуляются обе производные. Рассматривается возможность использовать функцию преобразования итоговых

весовых коэффициентов из [158]: $g_k(\omega) = \frac{\omega(d_k + d_k^2 - 3d_k\omega + \omega^2)}{d_k^2 + \omega(1 - 2d_k)}$, что позволяет

сохранить 5-ый порядок в случае обнуления первой производной (такие схемы принято называть WENO-M), однако данный подход всё равно обладает 2-ым порядком в случае обнуления обеих производных одновременно. В результате, в [151] предложен другой подход, а именно построение дополнительного индикатора гладкости на «широком» шаблоне, использующем все 5 точек:

$\tau_5 = |IS_0 - IS_2|$. С его учётом нелинейные веса определяются: $\alpha_k = d_k \left(\frac{\tau_5}{\varepsilon + IS_k} \right)^p$, где

$p = 1$ или 2 в зависимости от необходимых свойств. Вторым изменением было добавление ко всем оптимальным весам шаблонов положительной настроечной

константы C : $\alpha_k = d_k \left[C + \left(\frac{\tau_5}{\varepsilon + IS_k} \right)^p \right]$, чтобы избежать ошибок округления в

окрестностях критических точек, где все индикаторы гладкости стремятся к нулю. В [151] значение C было выбрано равным 1. Кроме прочего, было обнаружено, что значение константы ε , прибавляемой к индикаторам гладкости в WENO-схемах, влияет на решение в окрестности критических точек, поэтому вместо стандартного значения $\varepsilon = 10^{-6}$ [138] предлагается выбирать $\varepsilon = 10^{-40}$. Полученная схема обладает 4-ым порядком в окрестности критических точек (если обнуляется 1 или 2 производная, но не обе одновременно). Для неё принято обозначение WENO-Z. Объединение этих двух подходов (WENO-M и WENO-Z) рассмотрено в [153], а полученную схему принято называть WENO-ZM5. В ней функция

преобразования применяется к весам, полученным в WENO-Z, а не к исходным. Этот подход представляется перспективным и рассматривается в настоящей диссертации.

Рассмотрим теперь работу [146], где за основу берётся схема WENO-SYMOO на шеститочечном шаблоне (то есть, в оптимальном случае это — центрально-разностная аппроксимация 6-го порядка). В этой схеме выполняется модификация индикаторов гладкости наподобие того, как это сделано в [151]. А именно, вводится индикатор гладкости на «широком» шаблоне, состоящем из 6-ти точек. Также вводится константа C , однако в отличие от WENO-Z здесь выбирается значение $C = 20$, а не 1. Это связано с необходимостью увеличения вклада оптимальных весовых коэффициентов шаблонов в том случае, когда все индикаторы гладкости обладают одинаковым порядком малости. При этом также выбирается $\varepsilon = 10^{-40}$. Полученную схему обозначают WENO-CU6. Она является центрально-разностной в области гладкости и противопоточной на разрывах. С одной стороны, эта схема удовлетворяет заявленным требованиям, но, с другой стороны, в алгоритм входит параметр C , который определяется эмпирическим образом и зависит от конкретной задачи. В [152] показано, что увеличение этой константы приводит к преобладанию оптимальных весовых коэффициентов, что выгодно с точки зрения диссипации разностной схемы (рекомендованные значения C - числа порядка 100), но при этом в окрестности разрывов возникают осцилляции. Напротив, при малых значениях C (порядка $O(1)$) схема приобретает значительный запас устойчивости вблизи разрывов, однако её уровень диссипации возрастает. В [152] также предложено несколько методик построения переходной функции, которая изменяет значение константы C в зависимости от параметров течения между $C_{\min}$ и $C_{\max}$. Однако сами значения $C_{\min}$ и $C_{\max}$ оказываются зависимыми от деталей реализации численного метода и в каждом отдельном случае должны быть откалиброваны заново. По этим причинам данный подход не был включён в рассмотрение в дальнейшем.

Следующий подход, изложенный в [147] и обозначенный WENO-RL, основан на схеме WENO-SYMO. В нём так же, как в предыдущем методе, предлагается «навязать» оптимальные веса с помощью модификации индикаторов гладкости и введения дополнительных констант. Несмотря на то, что эти константы менее подвержены влиянию элементов схемы, и для широкого класса задач их можно считать неизменными, данный подход предлагает многократный пересчёт индикаторов гладкости для всех элементарных шаблонов, входящих в широкий шаблон. В результате, время вычислений для схемы на шеститочечном шаблоне, согласно [147] (если использовать пересчёт, основанный на полной вариации) увеличивается на 20%.

В численном методе из работы [148], также основанном на симметричном «широком» (шеститочечном) шаблоне, предлагается использовать три элементарных шаблона: два из них содержат по 3 точки и располагаются по разные стороны от грани, на которой производится реконструкция, а средний элементарный шаблон содержит 4 точки (по две с каждой стороны от рассматриваемой грани). Итоговая схема формально обладает 5-ым порядком и носит название WENO-SYM3. Фактически данный подход представляет собой улучшенную версию WENO-SYMOO, с которой и производится сравнение в [148]. Учитывая недостатки WENO-SYMOO, перечисленные выше, в данном исследовании было решено не рассматривать WENO-SYM3.

Ещё один оригинальный подход, использующий симметричный «широкий» шаблон, представлен в [149], [150]. Здесь одновременно используется калибровка весовых коэффициентов элементарных шаблонов и модификация индикаторов гладкости. При этом учитываются как диссипативные свойства схемы, так и поведение в окрестности критических точек. Схема, построенная на шеститочечном шаблоне, обладает формально 4-ым порядком и называется WENO-OS4. Сам процесс вычисления индикаторов гладкости достаточно трудоёмкий (при этом используются вышеописанные идеи из [151], [146] и [158]), из-за чего, как сообщают авторы [149], расчёт распада изотропной

турбулентности по этой схеме требует больше времени, чем по схеме WENO-SYMBO.

В [159] проведено сравнение многих из вышеописанных схем в рамках анализа дисперсионных и диссипативных ошибок (ADR-характеристик) [160], [161]. Среди противопоточных схем наименьшим уровнем дисперсионных и диссипативных ошибок, как оказалось, обладает WENO-ZM5. Помимо сказанного выше, это стало еще одним аргументом в пользу выбора данной схемы, в дополнение к WENO-SYMBOO6, для изучения в настоящей работе. Среди схем, построенных на симметричном шаблоне, лучшие результаты показала схема WENO-SYMCU6. Однако, как было отмечено ранее, данный подход существенно зависит от эмпирической константы C , которая нуждается в калибровке. Поэтому данный подход не будет использоваться в дальнейшем. На основе сказанного выше второй изучаемой схемой в настоящей работе выбрана WENO-SYMBOO6.

2.2.3 Формулировка WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6

В случае WENO-ZM5 сперва необходимо модифицировать индикаторы гладкости [151]:

$$\alpha_k^Z = \frac{d_k}{\beta_k^Z}, \quad \frac{1}{\beta_k^Z} = 1 + \left(\frac{\tau_5}{\varepsilon + IS_k} \right)^p, \quad \tau_5 = |IS_0 - IS_2|, \quad \varepsilon = 10^{-40}, \quad p = 1,$$

после чего полученные веса необходимо нормировать так, чтобы сумма всех

коэффициентов оставалась равной 1: $\omega_k^Z = \alpha_k^Z / \sum_{l=0}^2 \alpha_l^Z$. Затем к полученным весам

ω_k^Z необходимо применить функцию, исправляющую потерю порядка в окрестности гладкого экстремума [153]: $\alpha_k^{ZM} = g_k(\omega_k^Z)$, и снова нормировать:

$\omega_k^{ZM} = \alpha_k^{ZM} / \sum_{l=0}^2 \alpha_l^{ZM}$. Сама функция определяется следующим образом [158]:

$$g_k(\omega) = \frac{\omega(d_k + d_k^2 - 3d_k\omega + \omega^2)}{d_k^2 + \omega(1 - 2d_k)}.$$

Окончательные веса ω_k^{ZM} подставляются в

формулу для $f_{i+1/2}$ вместо ω_k .

В методе WENO-SYMB006 в реконструкции участвует ещё один трёхточечный шаблон 3-го порядка: $f_{i+1/2} = \sum_{k=0}^3 \omega_k f_{i+1/2}^{(k)}$, $f_{i+1/2}^{(3)} = \frac{11}{6} f_{i+1} - \frac{7}{6} f_{i+2} + \frac{2}{6} f_{i+3}$.

Соответствующий ему индикатор гладкости задается формулой

$$IS_3 = \frac{13}{12} (f_{i+1} - 2f_{i+2} + f_{i+3})^2 + \frac{1}{4} (-5f_{i+1} + 8f_{i+2} - 3f_{i+3})^2.$$

Новые оптимальные веса, полученные в [157] применением к схеме [162] процедуры из [145], определяются следующим образом: $d_0 = 0.1 - \psi$, $d_1 = 0.6 - 3\psi$, $d_2 = 0.3 + 3\psi$, $d_3 = \psi$, где $\psi = 0.044973$. Как и в оригинальной работе [145], вклад от самого правого шаблона ограничивается соответствующим выбором индикатора гладкости: $\beta_k = IS_k$, $k = 0, 1, 2$; $\beta_3 = \max_k IS_k$. Далее составляется

комбинация оптимальных весов и индикаторов гладкости: $\alpha_k = d_k \left(1 + \frac{\tau_p}{\varepsilon + \beta_k} \right)$, где

$\varepsilon = 10^{-40}$, τ_p — индикатор гладкости, построенный на шеститочечном шаблоне:

$$\tau_p = (-f_{i-2} + 5f_{i-1} - 10f_i + 10f_{i+1} - 5f_{i+2} + f_{i+3})^2,$$

который в случае гладкого решения оказывается на порядок меньше любого из β_k . Таким образом, добавление единицы позволяет выбирать оптимальные веса d_k . Завершающий этап, как и в предыдущем случае, — это нормировка:

$$\omega_k = \alpha_k / \sum_{l=0}^3 \alpha_l.$$

2.2.4 Сравнение схем в модельных задачах

В данном разделе проводится анализ свойств выбранных ранее схем на модельных задачах. Для этих расчётов была написана программа, позволяющая решать одномерные уравнения переноса, Хопфа и Бюргерса.

Начнём с уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Без ограничения общности положим скорость переноса $c=1$. Будем рассматривать равномерную расчётную область, в которой координаты узлов сетки определяются как $x_j = h \cdot j$, $j=1, 2, \dots, 3000$. На границах значения функции u фиксированы. Будем моделировать промежуток времени $T=100$. В качестве начальных условий в середине расчётной области задаётся полупериод синуса в степени m :

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in [1, 1480) \cup (1520, 3000], \\ \sin^m[(x-1480) \cdot \pi / 40], & x \in [1480, 1520], \end{cases}$$

где m принимает целые значения, определяющие класс гладкости функции $u(x, 0)$. При $m = 0$, таким образом, получается разрывная функция, представляющая из себя прямоугольный импульс, при $m = 9$ — функция, обладающая 8-ю непрерывными производными. Количество узлов выбрано таким, чтобы исключить влияние на решение граничных условий за время задачи. Во всех тестах $\sigma = \sigma \tau / h = 1$. Один из вопросов, который представляет интерес в данной задаче, — это численный порядок сходимости решения по шагу расчётной сетки. Рассмотрим набор вложенных сеток, шаг между которыми отличается в 2 раза. В качестве нормы ошибки воспользуемся L_2 -нормой:

$$L_2[a, b] = \sqrt{\int_a^b (u - u_{\text{ex}})^2 dx}.$$

В этом выражении u_{ex} — точное решение в рассматриваемый момент времени. Интеграл вычисляется по методу прямоугольников.

В качестве временной аппроксимации воспользуемся явными методами Рунге-Кутты (РК). Как известно, численный порядок сходимости является минимальным числом между порядком пространственной и временной аппроксимаций, а также степенью гладкости решения. Поэтому, чтобы временная аппроксимация не вносила вклад в решение, её порядок должен быть не ниже 6-го. К сожалению, использование явных методов РК 6-го порядка с центрально-разностными аппроксимациями по пространству приводит к возникновению

быстрорастущих осцилляций, и решение становится неустойчивым [163]. Согласно [163], при $\sigma = 1$ устойчивым будет метод РК 7-го порядка. Рассмотрим решение со схемой РК 7-го порядка, предложенной в [164], состоящей из 9-ти внутренних шагов. Уровень ошибки данного метода пропорционален $O(\tau^7 + h^k)$, где k — порядок пространственной аппроксимации. Таким образом, порядок сходимости по сетке определяется именно значением k . На рисунке 19 представлена зависимость ошибки от шага расчётной сетки h для схем WENO5, WENO-ZM5, WENO-SYMB006, а также для CD6. Видно, что на достаточно гладком решении ($m=9$) все схемы достигают своего теоретического порядка сходимости.

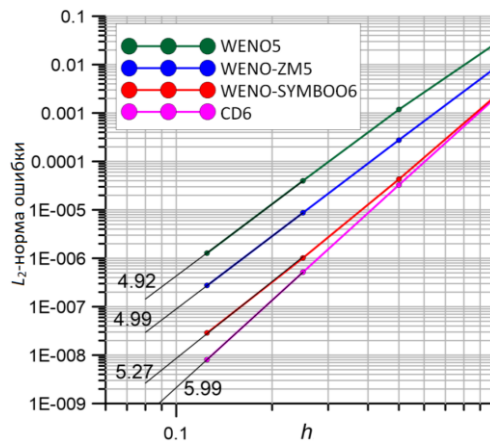


Рисунок 19 — Численный порядок сходимости при решении уравнения переноса с гладкими начальными условиями

Также интерес представляет поведение решения в случае разрывного начального условия для каждой из схем. На рисунке 20 представлено решение в конечный момент времени при $t = 0$. Центральнo-разностная схема естественным образом порождает осцилляции Гиббса, которые не затухают со временем. Решение по схемам класса WENO выглядит монотонным, при этом можно заметить, что классическая схема WENO5 сильнее сглаживает решение, чем две новые аппроксимации, качественной разницы между которыми не наблюдается. Однако, если вернуться к рисунку 19, то обнаружится, что в случае гладкого начального условия уровень ошибки схемы WENO-SYMB006 в несколько раз меньше, чем в случае WENO-ZM5 на всех сетках. На разрывах эта разница

становится менее существенной, что и демонстрирует рисунок 20. Для сравнения на рисунке 21 приведены решения, полученные с центральными разностями 2-го и 4-го порядков. Видно, что увеличение порядка центральной разности уменьшает амплитуду осцилляций решения. Однако стоит иметь в виду, что чем выше порядок центральной разности, тем меньшим запасом устойчивости обладает схема при одинаковой временной аппроксимации [163].

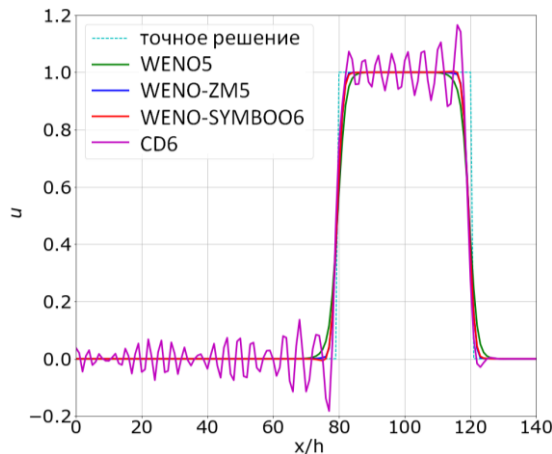


Рисунок 20 — Перенос прямоугольного импульса (ось абсцисс сдвинута таким образом, что координата 0 соответствует середине расчётной области)

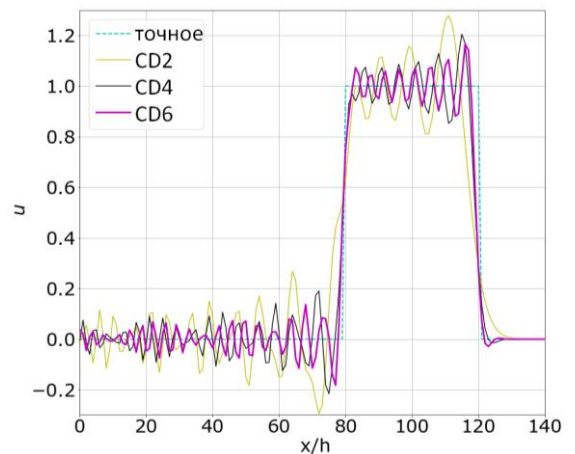


Рисунок 21 — Перенос прямоугольного импульса (ось абсцисс сдвинута таким образом, что координата 0 соответствует середине расчётной области)

Перейдём к уравнению Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Оно является простым примером нелинейного уравнения гиперболического типа, в решении которого могут возникнуть разрывы даже при гладких начальных условиях [165]. Чтобы воспользоваться методом конечного объёма, перепишем уравнение Хопфа в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u^2}{2} \right] = 0.$$

Тогда схемы семейства WENO будут реконструировать на грань величину $u^2 / 2$. Решение задачи о распаде произвольного разрыва определяется по формуле:

$$u_{j+1/2} = 0.5 \cdot [1 - 0.25|\text{sign}(u_L) - 1|(\text{sign}(u_R) + 1)] \cdot [u_L + u_R + (u_L - u_R)\text{sign}(u_L + u_R)],$$

где u_R и u_L — значения на грани на основе реконструкций в левой и правой ячейках соответственно. Ограничение на шаг по времени на каждом шаге определялось по норме полученного решения: $\sigma = \tau \|u\|_{\infty} / h = 1$, где $\|u\|_{\infty} = \max_x |u(x, t)|$. Использовалась расчётная область из предыдущей задачи.

Начальное условие задавалось кусочно-линейным:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 1480), \\ -1, & x \in (1520, 3000], \\ -(x - 1500) / 20, & x \in [1480, 1520]. \end{cases}$$

Для удобства рассмотрения сдвинем начало системы координат в центр расчётной области и отмасштабируем на $L = 40$ — масштаб изменения начального условия. Пусть T_{collapse} — время, за которое непрерывное решение «схлопывается» и образуется разрыв. Нас будут интересовать решения в два различных момента времени: $0.5 \cdot T_{\text{collapse}}$ и $2 \cdot T_{\text{collapse}}$. Решение в момент времени $0.5 \cdot T_{\text{collapse}}$ представлено на рисунке 22. Все схемы, за исключением CD2, демонстрируют качественно одинаковое решение. Видно, что отличия от точного решения проявляются на концах области изменения решения. Для удобства на рисунке 22 также отображено начальное условие (пунктирная кривая). Значения ошибок по норме L_2 для данного момента времени представлены в таблице 1. Можно заметить, что классическая схема WENO5 уступает двум новым вариантам, и её уровень ошибки сопоставим с CD4. В случае центрально-разностных схем ошибка уменьшается с увеличением порядка схемы. Стоит также отметить, что схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMB006, обладающие номинально 5-ым порядком (рисунок 19), превосходят по точности CD6, несмотря на то, что решение при $T = 0.5 \cdot T_{\text{collapse}}$ остаётся непрерывным.

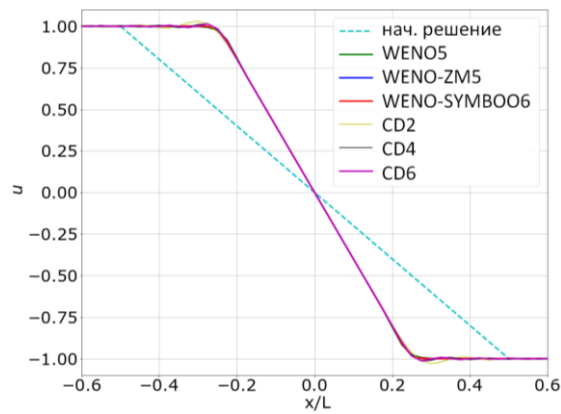


Рисунок 22 — Уравнение Хопфа, решение в момент времени $0.5 \cdot T_{collapse}$

Таблица 1. Ошибки по норме L_2 для уравнения Хопфа

Схема	$T = 0.5 \cdot T_{collapse}$	$T = 2 \cdot T_{collapse}$
WENO5	0.0454	0
WENO-ZM5	0.0296	0
WENO-SYMB006	0.0281	0
CD2	0.0822	9.6099
CD4	0.0459	5.7296
CD6	0.0364	4.7247

При $T = 2 \cdot T_{collapse}$ решения по центрально-разностным схемам существенно отличаются, поэтому имеет смысл рассмотреть их отдельно (рисунок 23). Видно, что чем выше порядок центральной разности, тем меньше амплитуда решения, но при этом возмущения затрагивают большее расстояние по пространству. Последний эффект связан с расширением шаблона схемы. Во всех случаях полученное решение нельзя считать удовлетворительным. Об этом можно судить по величине ошибки (таблица 1). В случае же схем класса WENO решение качественно соответствует точному для всех видов реконструкции (рисунок 24). Однако следует отметить, что ошибка в момент времени $0.5 \cdot T_{collapse}$ при использовании классической схемы WENO5 почти вдвое выше, чем при

использовании WENO-ZM5 или WENO-SYMB006 (таблица 1). Отличия между последними двумя схемами в данной задаче можно считать несущественными.

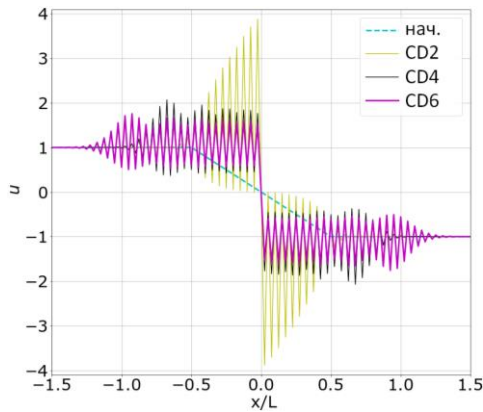


Рисунок 23 — Уравнение Хопфа, решение по центральным разностным схемам в момент времени $2 \cdot T_{\text{collapse}}$

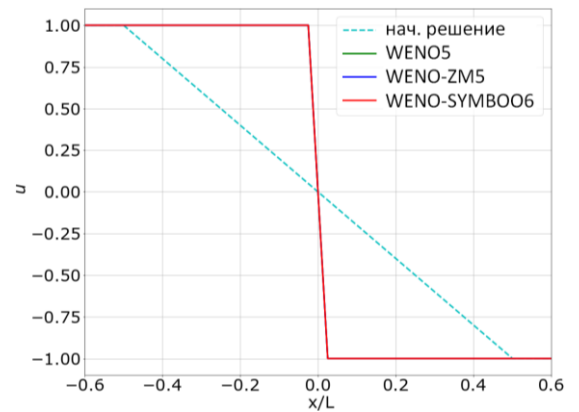


Рисунок 24 — Уравнение Хопфа, решение по схемам семейства WENO в момент времени $2 \cdot T_{\text{collapse}}$

Перейдём к уравнению Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Положительный коэффициент ν принято называть коэффициентом вязкости. Для этого уравнения доказано существование и единственность гладкого решения при $t > 0$ для любой разрывной начальной функции из некоторого класса [165]. Будем рассматривать стационарный предел решения уравнения Бюргерса, если начальное условие взять из предыдущей задачи. Точное решение в таком случае будет выглядеть следующим образом: $u_{\text{ex}} = -\text{th}((x - x_0)/(2\nu))$, где x_0 — середина расчётной области. Диффузионный член во всех схемах аппроксимируем с помощью формулы 2-го порядка:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2).$$

Рассмотрим два значения для коэффициента вязкости: $\nu=1$ и $\nu=0.4$. На рисунке 25 изображено стационарное решение, полученное по всем схемам при $\mu=1$. Отличия от точного решения проявляются на концах переходной области.

При этом визуально можно выделить только WENO5 и CD2. Уровень ошибки остальных схем в несколько раз меньше, что можно наблюдать в таблице 2. Примечательно, что ошибка решения, полученного с помощью схемы CD4, почти не отличается от решения по схеме CD6. Возможно, преимуществам CD6 не позволяет реализоваться степень гладкости начального условия. Как и в прошлой задаче, результаты, полученные с помощью схем WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6, оказались близкими.

Таблица 2. Ошибки по норме L_2 для уравнения Бюргерса

Схема	$\nu = 1$	$\nu = 0.4$
WENO5	0.0547	0.1093
WENO-ZM5	0.0129	0.0158
WENO-SYMBOO6	0.0143	0.0269
CD2	0.0851	0.5684
CD4	0.0297	0.2746
CD6	0.0244	0.2040

В случае же $\nu = 0.4$ ситуация существенным образом изменилась (рисунок 26). Как и следовало ожидать, при уменьшении коэффициента вязкости непрерывное решение уравнения Бюргерса приближается к разрывному решению уравнения Хопфа [166]. Поэтому все центральные разности породили осцилляции в окрестности больших градиентов решения. Амплитуда и протяжённость этих осцилляций носит такой же характер, как и в предыдущей задаче (рисунок 23), а именно — чем выше порядок схемы, тем меньше амплитуда и больше протяжённость осциллирующего участка. С другой стороны, все схемы класса WENO сохранили монотонный характер решения в данной задаче. Однако уровень ошибки классической схемы WENO5 в несколько раз больше, чем двух других схем (таблица 2).

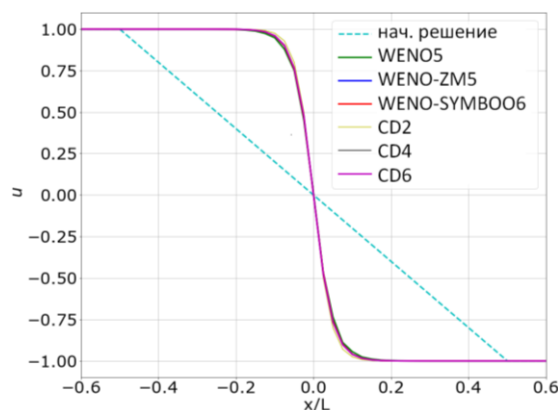


Рисунок 25 — Уравнение Бюргерса, стационарное решение при $\nu = 1$

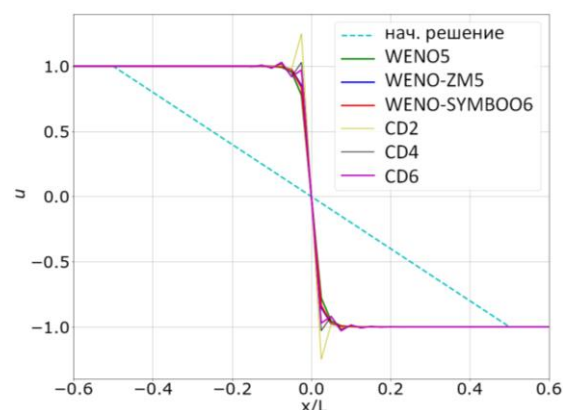


Рисунок 26 — Уравнение Бюргерса, стационарное решение при $\nu = 0.4$

По результатам одномерных тестов не удаётся выделить однозначного лидера между двумя новыми аппроксимациями (WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6), так как обе схемы демонстрируют заявленный порядок сходимости при гладком начальном условии, лучшее поведение в окрестности разрывов при сравнении с WENO5 или центральными разностями, одинаковый уровень ошибки в случаях нелинейных уравнений гиперболического и параболического типов. Обе схемы превосходят по точности центрально-разностные схемы, что позволяет надеяться на хорошие результаты их работы в LES-расчётах газодинамических задач. Единственным отличием между двумя рассмотренными схемами является больший шаблон WENO-SYMBOO6 и сопутствующие бóльшие вычислительные затраты, которые в случае трёхмерной задачи могут стать существенными.

2.3 Методика выбора численного метода с помощью задачи о распаде однородной изотропной турбулентности

Результаты данного раздела отражены в работах [167], [168] и [169]. Главным результатом этой серии работ стала методика выбора численного метода для вихреразрешающих расчетов (далее для краткости – Методика). Первый набросок Методики содержится в [167], окончательная формулировка – в [168], а в [169] она применена к рассматриваемым схемам. Кратко Методика может быть описана следующим образом.

Рассматривается задача о распаде изотропной турбулентности. Это стандартный тест для проверки вихреразрешающего метода, поскольку в нем известна форма энергетического спектра турбулентности (см. [170], [171], [172], [173], [174]). Расчётная область для этой задачи представляет собой куб с периодическими граничными условиями. Каждая сторона куба имеет длину $2\pi L$.

Основная характеристика турбулентности, по которой производится сравнение численных методов, - это форма энергетического спектра $E(k)$, показывающего распределение кинетической энергии по движениям разных масштабов $\lambda = 2\pi / k$, где k — волновое число. При высоких числах Рейнольдса спектр должен содержать инерционный интервал, подчиняющийся закону Колмогорова: $E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, где $\varepsilon = -dE_k / dt$ (E_k — кинетическая энергия разрешённой турбулентности), за которым следует интервал диссипации с резким падением $E(k)$.

Начальное поле скорости, удовлетворяющее этим условиям, создаётся с помощью генератора синтетической турбулентности. Для выбора численного метода выполняются следующие действия:

1. Согласование начальных полей подсеточных параметров турбулентности при помощи расчётов с замороженными полями основных параметров.
2. Оптимизация протяжённости инерционного интервала на основе расчетов с тремя значениями константы подсеточной модели.
3. Проведение контрольного расчёта с найденным оптимальным значением константы.

Эти действия проводятся для каждого из рассмотренных численных методов. Потом сравниваются полученные спектры $E(k)$ и на основании этого сравнения производится выбор численного метода для вихреразрешающих расчетов.

Все расчёты в этом разделе производились с помощью конечно-объёмного метода 2-го порядка, построенного на многоблочной структурированной сетке. Использовался расчётный модуль *zFlare* [175] из пакета прикладных программ EWT-ЦАГИ [176]. Диффузионные потоки определялись с помощью центральных разностей 2-го порядка. Для реконструкции значений примитивных переменных на гранях ячеек (эти значения участвуют в определении конвективных потоков), использовались схемы, рассмотренные в разделе 2.2: центрально-разностные схемы 2-го, 4-го и 6-го порядков (далее CD2, CD4 и CD6, соответствующие выражения представлены в [177]), и противопоточные схемы WENO5 [138], WENO-ZM5 [153] и WENO-SYMBOO6 [157]. Также была рассмотрена *гибридная схема*, комбинирующая противопоточную и центрально-разностную аппроксимации с некоторыми весами.

В качестве временной аппроксимации использовались явные схемы семейства Рунге—Кутты: двухшаговый метод Эйлера со средней точкой, метод Хойна 3-го порядка, а также пятишаговый метод SSP5 [178] 4-го порядка (везде далее euler2, heun3, ssp5 соответственно).

В задаче о распаде однородной изотропной турбулентности нет стенок, это означает, что $d_w \rightarrow \infty$, следовательно (обозначения см. 2.1) $f_{dt} \approx 1 - \tanh\left(\frac{1}{d_w^6}\right) \approx 1$, $\lim_{d_w \rightarrow \infty} F_1(d_w) = 0$, $C_{DES} = C_{DES1} \cdot F_1 + C_{DES2} \cdot (1 - F_1) \approx C_{DES2}$, $l_{IDDES} \approx C_{DES2} h_{\max}$. Таким образом, влияние подсеточной модели определяется одной константой C_{DES2} , которая в исходной работе [134] принимает значение 0.61. Стоит отметить, что численный метод должен учитывать существенную нестационарность данного течения.

2.3.1 Расчётная область, граничные и начальные условия.

Согласование полей параметров турбулентности и скорости

Расчётная область представляет собой куб с периодическими граничными условиями, рисунок 27. Сторона куба — $2\pi L$, где $L = 1$ м. Расчёты проводились

на равномерных сетках с количеством ячеек $32^3 \approx 33000$, $64^3 \approx 262000$ и $128^3 \approx 2.1 \times 10^6$.

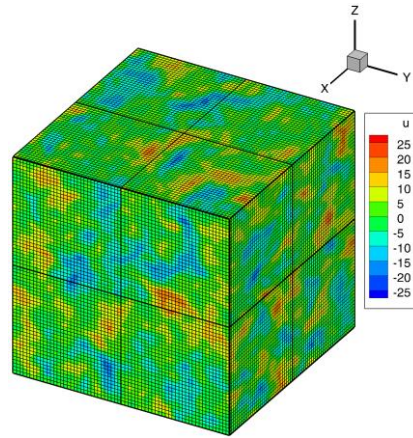


Рисунок 27 — Расчётная область, 64^3 ячейки

Как было сказано выше, сравнение разных численных методов производится по форме энергетического спектра $E(k)$. Она определяется как интеграл по сферам радиуса k от половины следа спектрального тензора [33]:

$$E(k) = \frac{1}{2} \oint\!\!\!\oint_{S(k)} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) dS(k), \quad \text{где } \mathbf{k} \text{ — волновое число, } k = |\mathbf{k}|. \quad \text{Спектральный}$$

тензор — это 3-мерное преобразование Фурье тензора корреляций скорости $R_{ij}(\mathbf{r})$ (получен в результате осреднения произведения $u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ по расчетной области):

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint R_{ij}(\mathbf{r}) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad R_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\mathbf{x},$$

где $S(k)$ — сфера радиуса k в пространстве волновых чисел, $\mathbf{r}$ — вектор, построенный от одной точки до другой. При высоких числах Рейнольдса спектр должен содержать инерционный интервал Колмогорова [13]: $E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$,

где $\varepsilon = -\frac{dE_k}{dt}$ (E_k — кинетическая энергия турбулентности). За интервалом

Колмогорова должна располагаться область диссипации с быстрым уменьшением $E(k)$. Начальное поле скорости, обладающее этими свойствами, может быть создано с помощью генератора синтетической турбулентности (STG, synthetic

turbulence generator), который схож с описанным в [179]. Разница состоит в том, что в [179] возмущения непрерывно создаются в одной плоскости, в то время как в данной работе они генерируются во всей расчетной области в начальный момент времени. Поле возмущений представляет из себя сумму поперечных гармонических колебаний. Для максимизации качества начального поля значения волновых чисел гармоник распределены по геометрической прогрессии со знаменателем 1.001 вместо стандартного значения 1.01 [179]. Начальный энергетический спектр соответствует модели фон Кармана [180]:

$$E(k) = \frac{55}{9\pi} E_{k0} L_0 \frac{\left(\frac{\alpha L_0}{2\pi} k\right)^4}{\left(1 + \left(\frac{\alpha L_0}{2\pi} k\right)^2\right)^{17/6}}, \quad \alpha \approx 1.339,$$

со следующими параметрами:

- Начальная разрешенная кинетическая энергия турбулентности $E_{k0} = 1000 \text{ м}^2 / \text{с}^2$. Таким образом, характерные пульсации скорости $u' = \sqrt{\frac{2}{3} E_{k0}} \approx 25.8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, турбулентное число Маха $M_t \approx 0.08$. Это означает, что течение может рассматриваться как несжимаемое;
- Интегральный масштаб турбулентности $L_0 = \pi L / 2 \approx 1.57 \text{ м}$ равен четверти длины расчетной области. Это наибольший разрешаемый масштаб, при превышении которого крупнейшие вихри существенно деформировались бы периодическими границами куба;
- Турбулентное число Рейнольдса $Re_{t0} = \frac{\sqrt{E_{k0}} L_0}{\nu} \approx 3 \times 10^6$. Отметим, что число Рейнольдса по масштабу Тейлора можно оценить как $Re_{\lambda 0} = \sqrt{\frac{20}{3}} Re_{t0} \approx 4300$ достаточно большое, чтобы сформировался инерционный интервал [181]. Разрешённые масштабы скорости

принадлежат инерционному интервалу. Неразрешенные масштабы скоростей содержат долю вихрей из инерционного интервала и вихрей из интервала диссипации;

- Начальный интегральный масштаб времени T_0 определяется следующим образом: $T_0 = L_0 / \sqrt{\frac{2}{3} E_{k_0}} \approx 0.06c$. Все расчеты проводились до физического времени $2T_0 \approx 0.12c$. Предполагается, что энергетический спектр турбулентности достигает равновесной формы за два периода времени оборота больших вихрей, и эта форма в конечный момент времени определяется только свойствами подсеточной модели и численного метода.

Проблема задания начальных полей подсеточных параметров турбулентности, согласующихся с разрешенным полем течения, описана в [172], [167], [168]. В [172] предлагается использовать модель Смагоринского [28] для определения турбулентной вязкости в каждой ячейке расчетной области. Далее подсеточную кинетическую энергию k предлагается рассматривать как разность между полной энергией турбулентности (полученной теоретически путем интегрирования одномерного спектра, полученного из эксперимента Комте-Белло и Коррсена [182], [183] во всем диапазоне волновых чисел), и кинетической энергией разрешённых масштабов. После этого характерное значение частоты подсеточных пульсаций ω может быть определена: $\omega = k / \nu_t$. Автором предложен оригинальный метод, описанный в [168]: для получения начального поля решаются только уравнения для подсеточных параметров турбулентности (остальные параметры течения не изменяются в ходе расчета); поля этих параметров стремятся к стационарному состоянию, согласующемуся с разрешенным полем скорости, формируемым генератором турбулентности. Приближение к стационарному состоянию отслеживается по усредненной по расчетной области кинетической энергии подсеточных пульсаций. Установление поля ω не отслеживается, так как было обнаружено, что оно достигает стационарного состояния в несколько раз быстрее, чем поле k . На рисунке 28

представлена зависимость усредненной по объему кинетической энергии подсеточных пульсаций k_{ave} от физического времени при использовании центральной разности и стандартного значения $C_{DES2}=0.61$ на сетке с 64^3 ячейками. Видно, что значение k_{ave} существенно меняется в течении первого интегрального масштаба времени, $t \leq T_0 \approx 0.06$ с. К моменту времени $2T_0 \approx 0.12$ с, значение k_{ave} практически перестает меняться (изменения происходят в пятой значащей цифре). Такое же поведение было обнаружено и для других значений C_{DES2} на той же сетке. В результате было принято решение проводить процедуру согласования до момента времени, равного $3T_0 \approx 0.18$ с, предполагая, что за такой период времени на любой из рассматриваемых сеток и при любых значениях полей подсеточных параметров у них достаточно времени, чтобы подстроиться под исходное разрешенное поле скорости. При этом каждому значению константы C_{DES2} соответствует свое установившееся значение k_{ave} .

Еще одно наблюдение, которое можно сделать из рисунка 28, заключается в том, что начальная энергия подсеточных пульсаций при $C_{DES2}=0.61$ составляет порядка 11% от разрешённой энергии турбулентности $E_{k0}=1000 \text{ м}^2 / \text{с}^2$. Это соответствует характерному для LES соотношению [9].

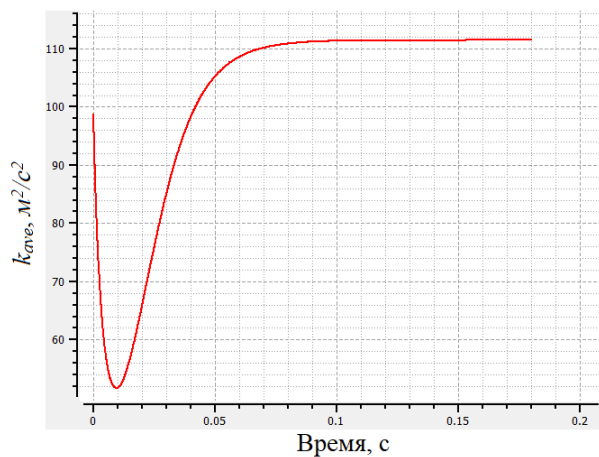


Рисунок 28 — Эволюция k_{ave} при $C_{DES2}=0.61$ на сетке с 64^3 ячейками.

2.3.2 Результаты расчётов

Настоящий раздел посвящен выбору численного метода для вихреразрешающих расчетов с использованием описанной выше Методики.

Отправным вариантом, как было сказано выше, является *гибридная схема*, комбинирующая противопоточную схему с центрально-разностной. В качестве противопоточной схемы рассматривается WENO5, а в качестве вариантов центрально-разностной схемы — CD2, CD4 и CD6. В разделе 2.2 были рассмотрены различные пространственные схемы в качестве возможной альтернативы гибридной схеме: WENO-SYMBOO6 и WENO-ZM5.

Каждая из перечисленных схем может быть реализована с различными аппроксимациями по времени (euler2, heun3, ssp5).

Нет смысла проводить настройку вихреразрешающего метода, к которой сводятся пункты 2 и 3 Методики, для каждой комбинации этих пространственных и временных аппроксимаций. Поэтому был выбран план действий, при котором сначала упрощенным способом была выбрана одна временная и одна центрально-разностная аппроксимация. После этого пункты 2 и 3 Методики были применены к сопоставлению выбранной гибридной схемы со схемами WENO-SYMBOO6 и WENO-ZM5.

Рассмотрим подробно серии расчетов, выполненные в рамках этого плана действий.

Первая серия расчетов посвящена сравнению и выбору временной аппроксимации. Для этого берется сетка с 64 ячейками в каждом направлении, значение $C_{DES2} = 1$, для аппроксимации конвективных потоков используется CD4. Рассматриваются все три вышеописанные временные схемы. Шаг по времени во всех случаях не превышал $8 \cdot 10^{-5}$ с. На рисунке 29 изображены энергетические спектры в конечный момент времени счета. Видно, что схема euler2 порождает энергетические забросы в коротковолновой области спектра. Таким образом, она менее устойчива в рамках тестовой задачи по сравнению с двумя другими

схемами. Схемы `heun3` и `ssp5` позволяют получить одинаковые формы спектров, что свидетельствует о незначительном вкладе их остаточных членов в баланс уравнений. Это означает, что схемы `heun3` достаточно для дальнейших расчетов. Отметим дополнительное преимущество схемы `heun3` по сравнению с `ssp5`: она делает 3 внутренние итерации на каждом шаге, а не 5. В результате можно более эффективно продвигаться по времени. Ещё один вывод, который можно сделать из данного рисунка, состоит в том, что выбранное предварительное значение константы $C_{DES2} = 1$ оказывается избыточным: в спектрах не выдержан инерционный интервал $k^{-5/3}$.

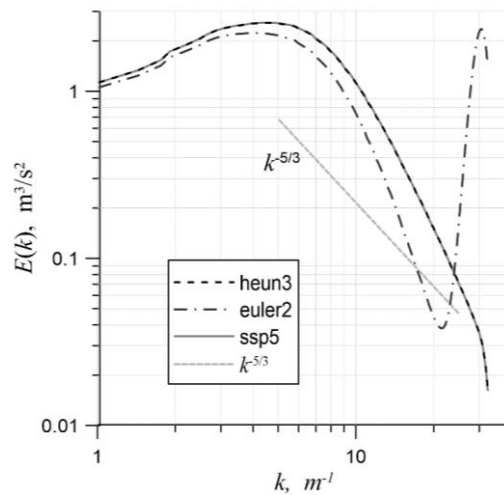


Рисунок 29 — Спектр турбулентной энергии для 3 различных временных схем на сетке с 64^3 ячейками, $C_{DES2} = 1$.

Во второй серии расчётов варьировалась центрально-разностная схема при зафиксированной временной схеме `heun3` (рисунок 30). Любопытно, что все три центрально-разностные схемы позволили получить схожий результат. Вероятно, это объясняется тем, что реконструкция решения делается вдоль сеточных направлений независимо. Это приводит к ограничению порядка схемы при решении уравнений в многомерном случае до второго. Стоит отметить также, что при использовании схемы `euler2` расчёты с пространственными аппроксимациями `CD2`, `CD4` и `CD6` дали существенно различные результаты (рисунок 31).

Оказалось, что при повышении порядка центрально-разностной схемы уменьшается её устойчивость. На примере уравнения переноса с помощью спектрального анализа [26] можно продемонстрировать [168], что CD4 имеет меньший запас устойчивости, чем CD2. На рисунке 31 можно заметить, что лишь в случае CD2 спектр, полученный с использованием схемы euler2, получается схожим со спектрами, полученными по другим временным аппроксимациям, в то время как более точные пространственные схемы страдают от эффекта накачки энергии в области коротких длин волн. Учитывая это благоприятное для CD2 обстоятельство, для всех последующих расчётов в качестве центрально-разностной аппроксимации была выбрана именно она. В качестве временной схемы был выбран heun3, так как в случае уравнения переноса он, в отличие от методов Эйлера, обладает устойчивостью при линейной связи τ и h при использовании центрально-разностных аппроксимаций по пространству.

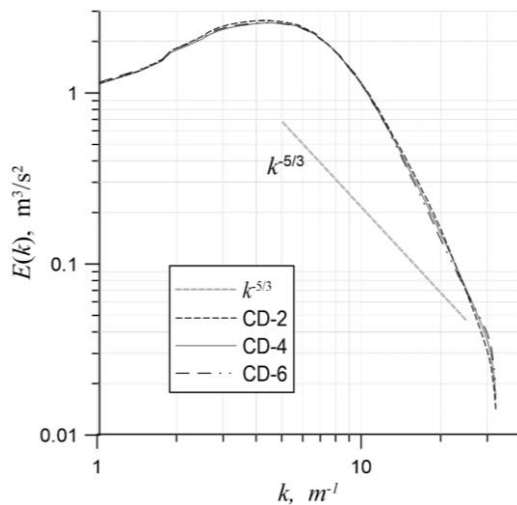


Рисунок 30 — Энергетический спектр для различных центрально-разностных аппроксимаций на сетке с 64^3 ячейками и схемой heun3, $C_{DES2} = 1$.

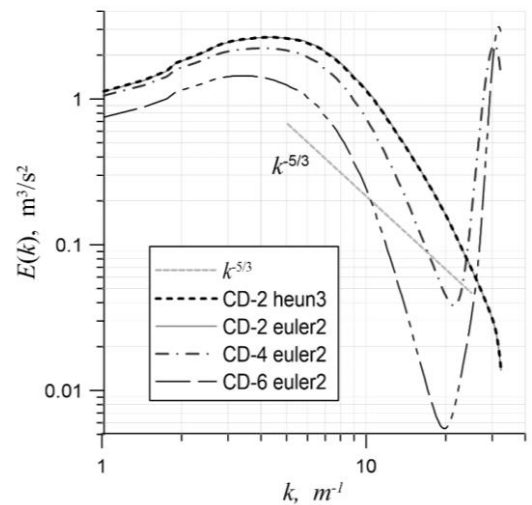


Рисунок 31 — Энергетический спектр для различных центрально-разностных аппроксимаций на сетке с 64^3 ячейками и схемой euler2, $C_{DES2} = 1$.

Далее в соответствии с пунктами 2 и 3 Методики должна быть оптимизирована константа C_{DES2} подсеточной модели при работе совместно с гибридной схемой WENO5+CD2 в сочетании с временной аппроксимацией heun3. Однако прежде целесообразно провести оптимизацию константы C_{DES2}

подсеточной модели при работе с CD2 и heun3. Это позволит понять, как переход от чистой центральной разности к гибридной схеме влияет на вклад подсеточной вязкости.

Соответственно, третья серия расчётов была посвящена калибровке константы C_{DES2} подсеточной модели при работе совместно с ранее выбранной центрально-разностной схемой CD2 и аппроксимацией heun3 по времени. Метод выбора оптимального значения C_{DES2} заключался в следующем: проводилась серия расчётов с различными значениями константы в диапазоне от 0 до 1 с шагом 0.1, после чего на графике энергетического спектра отыскивался степенной участок и определялся показатель степени $E(k) \sim k^\alpha$ на нём. Затем вводилась функция ошибки ε как разница между показателем степени на этом участке и теоретическим значением $-5/3$. Если для какого-то из спектров выполнялось условие $|\varepsilon| < 0.01$, то соответствующее значение константы C_{DES2} объявлялось оптимальным. В противном случае по трём самым близким к 0 значениям ε в зависимости от C_{DES2} строилась парабола. Далее точка, в которой парабола принимает нулевое значение, объявлялась оптимальной, и проводился дополнительный расчёт с новым значением C_{DES2} .

На рисунке 32 представлены спектры, полученные при различных значениях C_{DES2} на сетке с 64^3 ячейками. Можно наблюдать, что по мере увеличения C_{DES2} усиливается диссипация в коротковолновой области спектра за счёт увеличения влияния подсеточной модели. Визуально теоретическому наклону соответствуют значения $C_{DES2} = 0.7$ и 0.8 , однако по описанному выше методу для обоих случаев ошибка превышает заданный порог 0.01. В результате построения параболы оптимальное значение C_{DES2} оказалось равным 0.69.

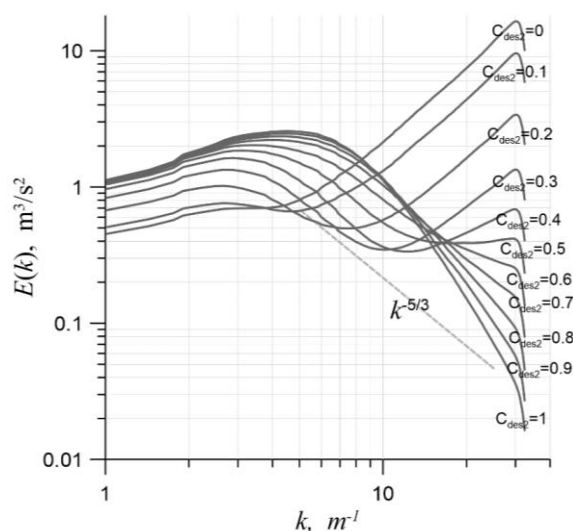


Рисунок 32 — Энергетический спектр на сетке с 64^3 ячейками при различных значениях C_{DES2} .

На рисунке 33 слева представлены ближайшие к оптимальному спектры на сетке с 32^3 ячейками, которые соответствуют значениям $C_{DES2} = 0.6, 0.7$ и 0.8 . Аналогичный результат представлен на рисунке 33 справа для сетки с 128^3 ячейками. На грубой сетке оптимальное значение оказалось равным 0.70 , а на самой подробной сетке — 0.68 . Почти полное отсутствие зависимости оптимального значения C_{DES2} от шага сетки является хорошим признаком того, что в данной задаче методы используются в пределах своей области применимости, так что полученным величинам коэффициента можно доверять.

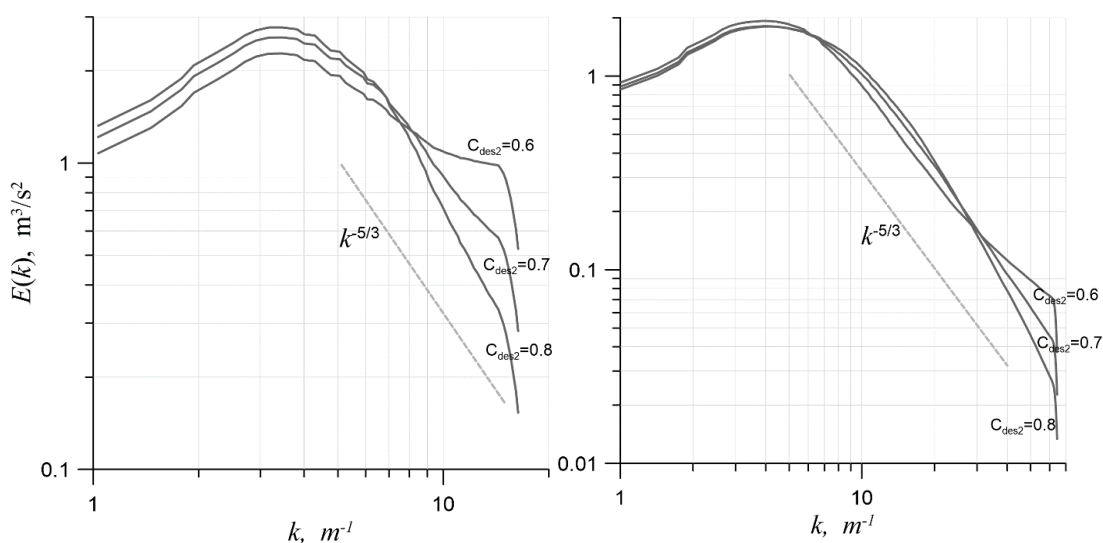


Рисунок 33 — Энергетический спектр при различных значениях C_{DES2} : слева на сетке с 32^3 ячейками; справа на сетке с 128^3 ячейками.

В следующей серии расчетов калибровка коэффициента C_{DES2} была проведена для вышеописанной гибридной схемы (аппроксимация по времени та же — heun3). На рисунке 34 представлены спектры на сетке с 64^3 ячейками при $C_{DES2} = 0.5, 0.6, 0.7$. Оптимальное значение C_{DES2} при наличии противопоточных аппроксимаций оказалось меньшим, чем для чистой центрально-разностной схемы: 0.56. Спектр, полученный с этим значением константы в случае гибридной схемы, изображён на рисунке 35 (пунктирная линия). Инерционный интервал такой же протяжённый, как и в случае чистой центрально-разностной аппроксимации (сплошная кривая, рисунок 35), хотя при внимательном рассмотрении в нём можно заметить небольшую выпуклость вверх. Несмотря на это замечание, именно гибридная схема представляет наибольший интерес для практических расчётов.

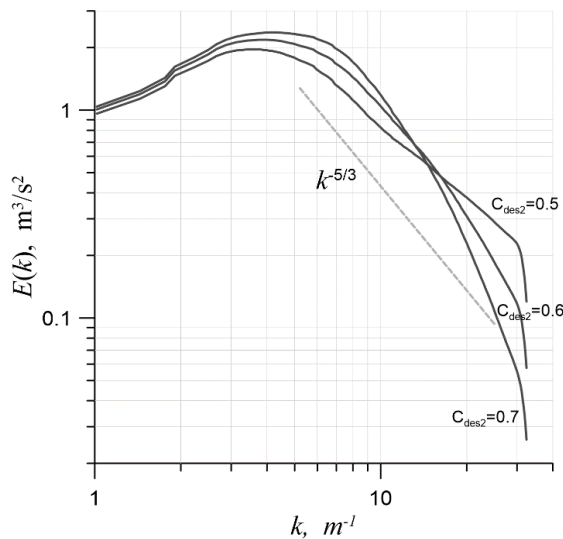


Рисунок 34 — Энергетический спектр на сетке с 64^3 ячейками с различными значениями константы (0.5, 0.6, 0.7) при использовании гибридной схемы.

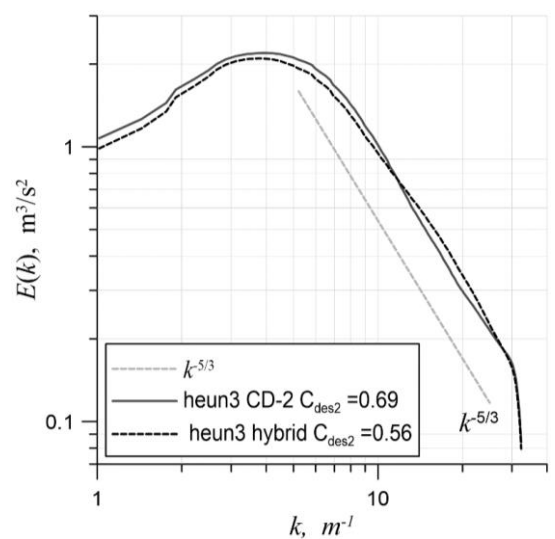


Рисунок 35 — Энергетический спектр для оптимальных значений C_{DES2} (0.69 для CD2 и 0.56 для гибридной схемы) на сетке с 64^3 ячейками.

Ещё одна серия расчётов была посвящена определению максимального значения постоянного веса противопоточной схемы, при котором в решении всё ещё присутствует влияние подсеточной модели. Практический интерес в этом опыте состоит в том, что установлено критическое значение веса

противопоточной схемы σ^* , для всех значений выше которого можно проводить расчёт в LES-области с помощью более экономного подхода ILES (implicit large eddy simulation — метод крупных вихрей с неявной подсеточной моделью) без опасности появления эффекта накачки энергии в области коротких длин волн. Задача сводится к поиску постоянного веса σ^* , при котором расчёт с $C_{DES2} = 0$ позволяет получить решение с достаточно малой погрешностью в степенном законе $E(k) \sim k^{-5/3}$ на инерционном интервале. Расчёты проводились на сетке с 64^3 ячейками. Формально подсеточная модель была включена, но задание C_{DES2} равным 10^{-3} привело к тому, что модель работала в режиме ILES.

На рисунке 36 представлены спектры для нескольких характерных значений σ . Видно, что при $\sigma = 0.02$ еще присутствует заброс энергии в коротковолновой области спектра, а при $\sigma = 0.1$ схема уже оказывается избыточно диссипативной. Расчёты со значениями σ равными 0.06 и 0.07 близки к правильному наклону спектра. Тот факт, что пороговое значение оказалось очень малым ($\sigma^* \in [0.06, 0.07]$), говорит о том, что полученные выше оптимальные значения C_{DES2} имеют отношение только к тем схемам, формулировки которых очень близки к центрально-разностным. При появлении в схеме уже 6–7 процентов противопоточности коэффициент C_{DES2} в расчёте следует полагать равным 0.

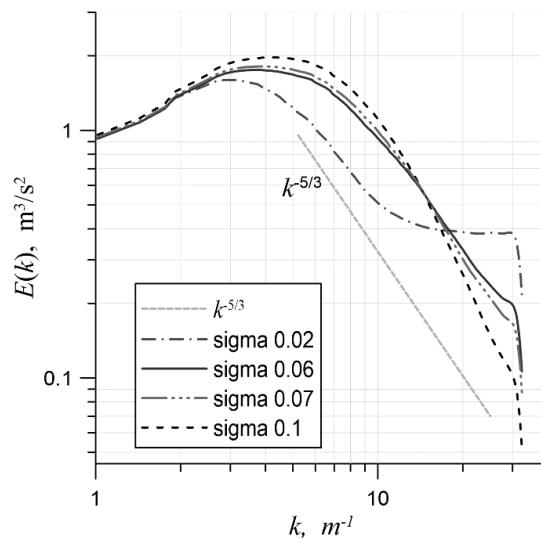


Рисунок 36 — Энергетические спектры в ILES-расчёте при различных постоянных значениях σ на сетке с 64^3 ячейками.

Последняя серия расчётов была посвящена нахождению оптимального значения C_{DES2} для схем WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6, рассматриваемых в качестве альтернативы гибридной схеме. При проведении серии расчётов с различными значениями C_{DES2} с помощью схемы WENO-ZM5 обнаруживается следующее (энергетические спектры на рисунке 37): при оптимальном для гибридной схемы значении $C_{\text{DES2}} = 0.56$ видна избыточная диссипация в области коротких волн, и даже при $C_{\text{DES2}} = 0.1$ участок спектра, выдерживающий инерционный интервал, практически отсутствует. Аналогичное суждение можно вынести относительно схемы WENO-SYMBOO6. Отметим, что классическая схема WENO5 с монотонизацией [142], расчеты по которой были проведены для сравнения, оказалась ещё более диссипативной.

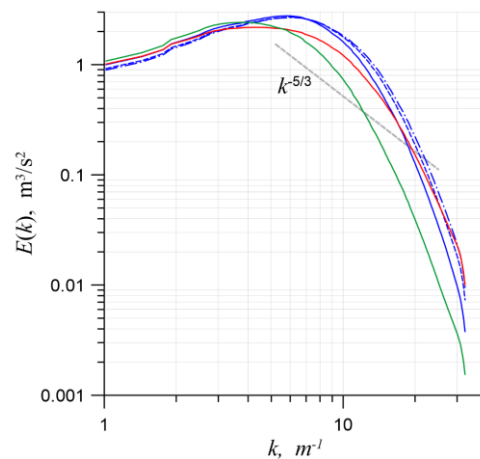


Рисунок 37 — Энергетический спектр на сетке с 64^3 ячейками. Синие кривые — WENO-ZM5: сплошная — $C_{\text{DES2}} = 0.56$, пунктир — $C_{\text{DES2}} = 0.3$, штрихпунктир — $C_{\text{DES2}} = 0.1$. Красная кривая — WENO-SYMBOO6 с $C_{\text{DES2}} = 0.1$. Зелёная — WENO5 с $C_{\text{DES2}} = 0.1$. Линия $E \sim k^{-5/3}$ — серый пунктир

Таким образом, в случае трёхмерной задачи, решаемой в рамках конечно-объемного метода и реконструкции по направлению с 1 гауссовой точкой, схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 потеряли преимущество перед центрально-разностными схемами, которое было обнаружено на одномерных модельных уравнениях. Вероятно, проблема связана с появлением ошибки порядка $O(h^2)$,

хоть и малой по величине, но существенно влияющей на наименьшие разрешаемые масштабы турбулентности. Фактически, две рассмотренные схемы не выдерживают инерционный интервал даже при малом значении константы C_{DES2} , равном 0.1. Это означает, что в дальнейшем данные схемы следует использовать в режиме ILES.

Таким образом можно заключить, что из рассмотренных методов наилучший результат обеспечивает гибридная схема WENO5+CD2 с трёхшаговым методом Хойна со значением $C_{DES2} = 0.56$. Эта величина почти не зависит от шага сетки, по крайней мере, если её масштаб отсечки попадает в инерционный интервал. Установлено, что влияние подсеточной модели очень быстро уменьшается с ростом доли противоточности в численной схеме. Оно становится несущественным уже при $\sigma = 0.07$, что говорит о принципиальной возможности счёта по таким схемам в вихреразрешающих областях методом ILES. Также, выявлен избыточно высокий уровень диссипации схем WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 в рамках метода конечных объемов 2-го порядка. Даже при полном отключении явной подсеточной модели (режим ILES) энергетический спектр не содержит развитого инерционного интервала.

2.4 Проверка выбора численного метода в задаче об эволюции турбулентного слоя смешения

В данном разделе гибридная схема WENO5+CD2 и схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6, которые выше были сопоставлены на примере задачи о распаде изотропной турбулентности, применяются к задаче об эволюции турбулентного слоя смешения, разделяющего два неограниченных противоположно направленных потока. В отличие от предыдущей задачи, в этом течении есть механизм производства кинетической энергии турбулентности на градиентах среднего поля скорости. На автомодельном режиме ширина слоя смешения растет линейно по времени (поэтому он называется «временным слоем смешения» [181], [184]), а максимальные значения напряжений Рейнольдса

выходят на постоянные значения, пропорциональные ΔU^2 , где ΔU — разность скоростей между потоками. Закон нарастания ширины и профили напряжений Рейнольдса можно сравнить с экспериментальными данными [185] и с данными вихреразрешающих расчетов [186], а в продольном энергетическом спектре в центре слоя смешения должен наблюдаться протяженный инерционный интервал, если число Рейнольдса течения велико.

Кроме перечисленных схем, для демонстрации роли подсеточной турбулентной вязкости будет также рассмотрена чисто центрально-разностная схема CD2.

Результаты, описанные в данном разделе, были опубликованы в [169].
Постановка задачи

2.4.1 Постановка задачи

В данной работе воспроизводится постановка задачи из работы [186]. Рассматривается расчётная область в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами $L_x = 4L$, $L_y = L_z = 2L$ вдоль осей x, y, z соответственно, где $L = 2\pi$ м. Центр параллелепипеда помещен в начало координат. Установлены периодические граничные условия по всем направлениям. Область покрыта кубической расчетной сеткой размерности $512 \times 256 \times 256$ ячеек.

Предварительное начальное поле скорости $\tilde{\mathbf{V}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ задается формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z) &= f(z) + a(z) \left[\sin(2k_x^0 x) + A_y \cos(k_y^0 y) + A_g g_1(x, y, z) \right], \\ \tilde{v}(x, y, z) &= a(z) \left[\cos(2k_x^0 x) + A_y \sin(k_y^0 y) + A_g g_2(x, y, z) \right], \\ \tilde{w}(x, y, z) &= a(z) \left[\sin(2k_x^0 x) + A_y \cos(k_y^0 y) + A_g g_3(x, y, z) \right], \\ f(z) &= \frac{\Delta U}{2} \left[\operatorname{th} \left(\frac{z}{2\theta_0} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{z - L_z/2}{2\theta_0} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{z + L_z/2}{2\theta_0} \right) \right], \\ a(z) &= A \Delta U \left[\exp \left(-\frac{(z - L_z/2)^2}{\theta_0} \right) + \exp \left(-\frac{z^2}{\theta_0} \right) + \exp \left(-\frac{(z + L_z/2)^2}{\theta_0} \right) \right].\end{aligned}$$

Здесь $k_x^0 = 16\pi / L$, $k_y^0 = 32\pi / L$ — начальные волновые числа возмущений вдоль осей x и y соответственно; $A = 0.05$, $A_y = 1$, $A_g = 1$ — относительные амплитуды возмущений; $\theta_0 = L / 200$ — начальная толщина слоя смешения. Функция $f(z)$ задает среднее поле скорости (за счёт условия периодичности по оси z в расчёте реализуется не один слой смешения, а два: в центре и на границе), функция $a(z)$ — это профиль амплитуды возмущений, налагаемых на среднее поле, g_i — случайные некоррелированные поля, значения которых в каждой точке равномерно распределены на отрезке $[-0.5, 0.5]$. Разность скоростей между потоками ΔU была выбрана равной 69 м/с , что соответствует числу Маха 0.2.

На основе предварительного начального поля строится соленоидальное поле скорости $\bar{u}_i = \tilde{u}_i - \partial p' / \partial x_i$, как это делалось в [186]. Для нахождения поля $p'(x, y, z)$ необходимо решить трёхмерное уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} p'.$$

В данной работе это уравнение решалось итерационным методом Якоби, описанным, например, в [187]. На фоне полученного начального поля скорости проводилась процедура согласования, аналогичная описанной в предыдущем разделе, от однородных начальных значений $k = (0.05\Delta U)^2$, $\omega = \Delta U / \theta_0$.

В расчетах данного течения использовались схемы WENO-ZM5, WENO-SYMB006, а также классическая схема WENO5, CD2 и гибридная схема WENO5+CD2. Для гибридной схемы и CD2 значения подсеточной константы задавались как в предыдущей задаче (0.56 и 0.69). Для остальных схем значение C_{DES2} выбиралось равным 10^{-3} , что соответствует переходу системы уравнений в режим ILES.

Расчёты велись до момента времени $5L / \Delta U$. Это время ограничено условием изолированности соседних слоёв смешения, которое определялось по отсутствию взаимодействия профилей напряжений Рейнольдса между ними. В

[186] показано, что до момента времени $t = 10L / (\pi \Delta U)$ любые взаимодействия между слоями отсутствуют.

2.4.2 Результаты расчётов

В начальный момент времени оба слоя смешения занимают в ширину несколько ячеек, а в конечный момент времени неоднородность занимает более четверти расчётной области. На рисунке 38 изображены конечные поля течения, полученные по схемам WENO5 и по гибридной схеме. Видно, что базовая схема WENO5 существенно сглаживает мелкие структуры за счёт численной диссипации, а гибридная схема разрешает более мелкомасштабные структуры. Это означает, что в данной задаче в гибридной схеме вес противоточной аппроксимации незначителен, как и следует ожидать для дозвукового свободнотурбулентного течения. Поля, полученные с помощью схем WENO-ZM5 и WENO-SYMB006, по мелкости турбулентных структур уступают гибридной схеме, но превосходят WENO5.

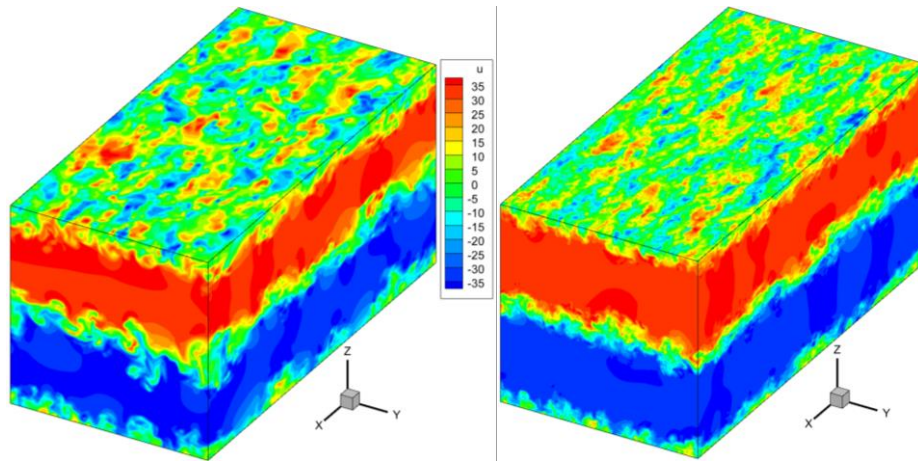


Рисунок 38 — Поле продольной компоненты скорости в конечный момент времени при использовании схемы WENO5 — слева и гибридной схемы — справа

Перейдём к анализу эволюции толщины слоя смешения. Введем толщину θ , определяемую по полю импульса:

$$\theta = \int_{-L_z/4}^{L_z/4} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{\langle \bar{u} \rangle}{\Delta U} \right)^2 \right] dz,$$

а также толщину δ_u , определяемую по среднему полю скорости:

$$\delta_u = z(\langle \bar{u} \rangle / \Delta U = 0.49) - z(\langle \bar{u} \rangle / \Delta U = -0.49).$$

Здесь угловыми скобками обозначено пространственное осреднение по плоскости $z = \text{const}$, в результате которого получается одномерный профиль осредняемого параметра как функция от z .

На рисунке 39 представлена зависимость θ от времени в безразмерных переменных. Для сравнения также изображён ожидаемый наклон линии, соответствующий эксперименту Белла и Мехты (1990) [185]. Поведение решения, полученного с помощью гибридной схемы, очень близко к поведению решения, которое дает CD2. Все схемы, кроме WENO5, позволяют решению выйти на асимптотическое поведение с наклоном, близким к экспериментальному. Следует отметить, что схема WENO-ZM5 на участке $t\Delta U / \theta_0 \in [800, 1000]$ предсказывает замедление роста ширины слоя смешения. Видно, что для схем WENO5 и WENO-ZM5 она продолжает меняться до конца расчёта, а остальные две схемы выходят на автомоделный режим с постоянным значением производной.

Немного лучшую согласованность последних трех схем (кроме WENO5) можно наблюдать на рисунке 40. Такое поведение можно объяснить тем, что параметр δ_u не зависит от внутренней структуры слоя смешения, тогда как θ является интегральным параметром и зависит от формы профиля скорости по всей его ширине. Классическая схема WENO5 не выходит на правильное асимптотическое решение, так как схемная вязкость подавляет влияние мелкомасштабной турбулентности, и развитый энергетический спектр турбулентности не устанавливается. Это согласуется с рисунком 38.

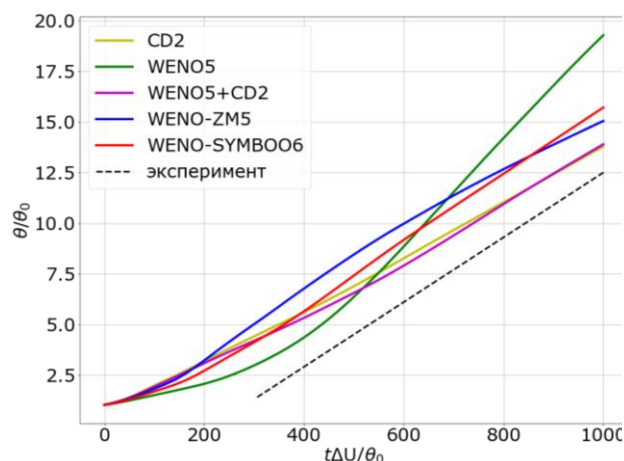


Рисунок 39 — Эволюция толщины слоя смешения θ со временем

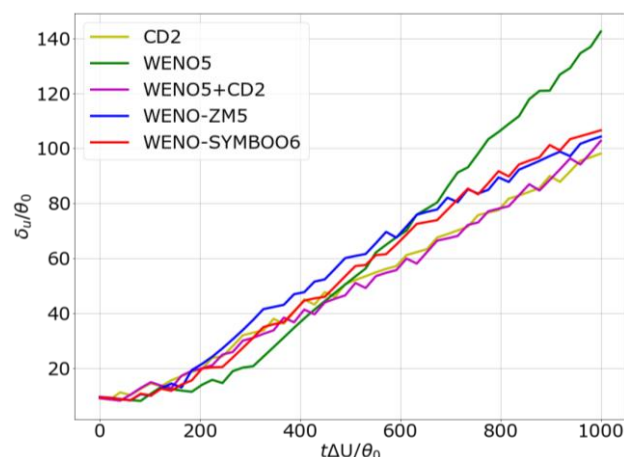


Рисунок 40 — Эволюция толщины слоя смешения δ_u со временем

На Рисунке 41 изображены профили средней продольной компоненты скорости поперёк слоя смешения в два момента времени. Можно сказать, что все схемы позволяют получить удовлетворительный результат. На графики также наложены экспериментальные данные из [185] (как и на все дальнейшие). Можно заключить, что все схемы одинаково хорошо воспроизводят среднее поле течения. Иначе ведут себя схемы с точки зрения описания напряжений Рейнольдса. Рассмотрим средний квадрат пульсаций продольной компоненты скорости $\langle \overline{u'u'} \rangle$ (рисунок 42). Видно, что в момент времени $2L/\Delta U$ уровень пульсаций по гибридной схеме, CD2 и WENO5 занижен. Однако дальше он начинает расти, а в случае WENO-ZM5 — уменьшаться. Рост пульсаций в случае схемы WENO5 оказывается чрезмерным. В финальный момент времени $5L/\Delta U$ для WENO-ZM5, CD2 и гибридной схемы уровень пульсаций $\langle \overline{u'u'} \rangle$ оказывается меньше экспериментального, причем самые низкие значения демонстрирует WENO-ZM5. Классическая схема WENO5 существенно завышает уровень пульсаций. Возможно, это связано с сильным недоразрешением мгновенной структуры слоя смешения, из-за чего крупные вихри не передают энергию по каскаду с достаточной скоростью. Наиболее близкой к эксперименту оказывается схема WENO-SYMB006.

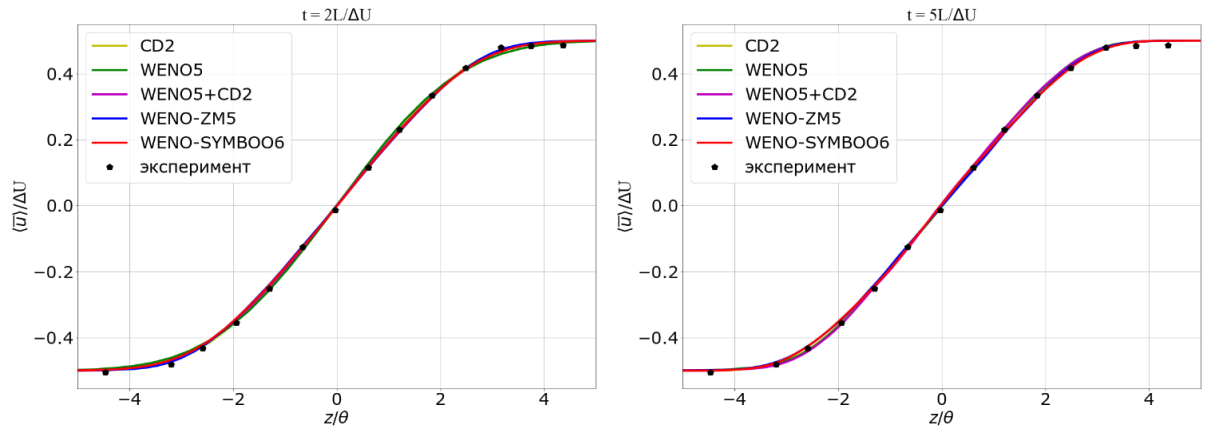


Рисунок 41 — Профили $\langle \bar{u} \rangle$ в слое смешения в моменты времени $(2, 5) \cdot L / \Delta U$

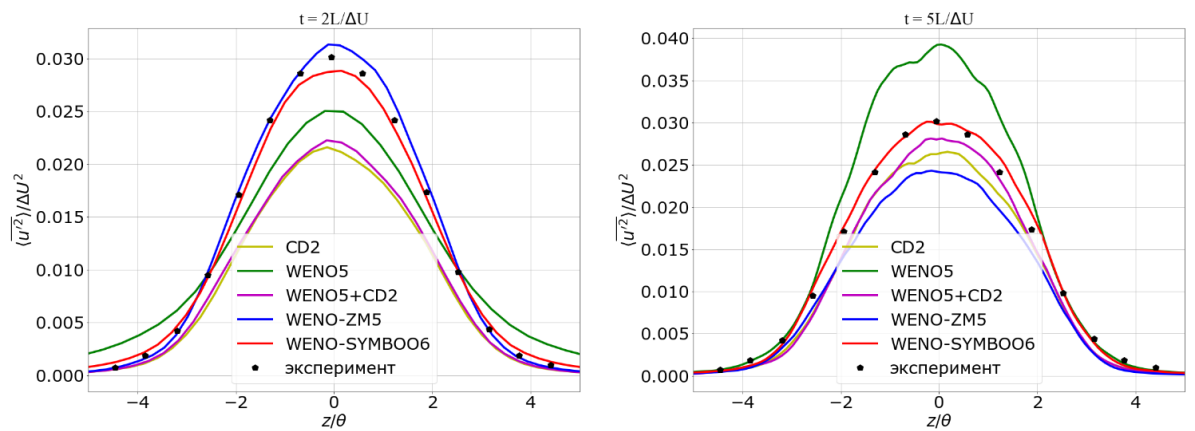


Рисунок 42 — Профили $\langle \overline{u'u'} \rangle$ в слое смешения в моменты времени $(2, 5) \cdot L / \Delta U$

Аналогичные тенденции можно наблюдать в профилях среднего квадрата боковых пульсаций $\langle \overline{v'v'} \rangle$ (рисунок 43). Единственное отличие состоит в том, что в финальный момент времени $5L / \Delta U$ наиболее близкий к экспериментальному результат демонстрирует центральная-разностная схема. Из всех схем выделяется WENO5, которая завышает уровень боковых пульсаций более чем в полтора раза.

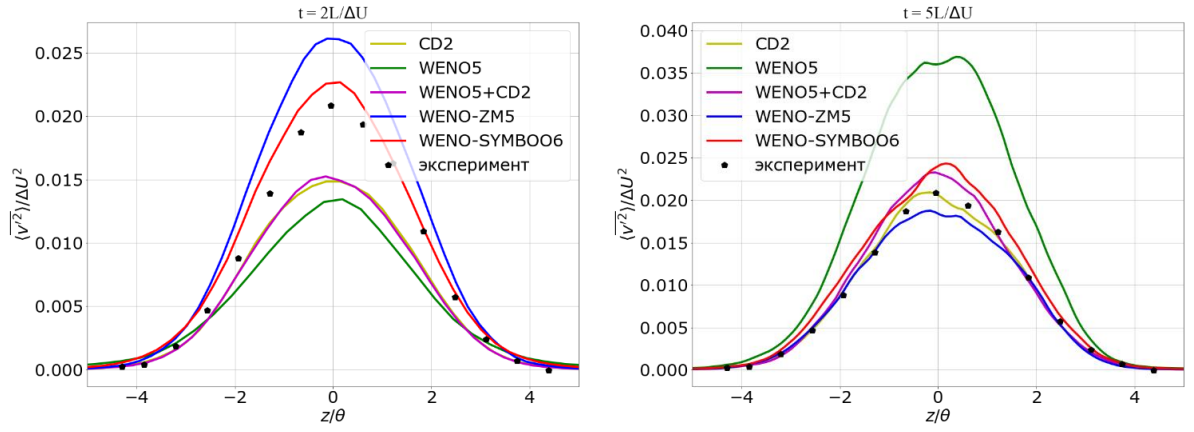


Рисунок 43 — Профили $\langle v'v' \rangle$ в слое смешения в моменты времени $(2, 5) \cdot L / \Delta U$

На рисунке 44 представлены профили среднего квадрата поперечных пульсаций скорости $\langle w'w' \rangle$. Данные распределения отличаются от предыдущих тем, что результаты, полученные с помощью схемы WENO5, начинают существенно (почти вдвое по пику) отличаться от остальных уже при $3L / \Delta U$. Другими словами, пульсации в направлении основного среднего потока импульса (поперек слоя смешения) оказываются самыми чувствительными к разрешению структур в слое смешения. Наилучший результат и здесь в конечный момент времени счёта демонстрирует WENO-SYMB006. Решения, полученные с помощью остальных трёх схем, качественно не отличаются.

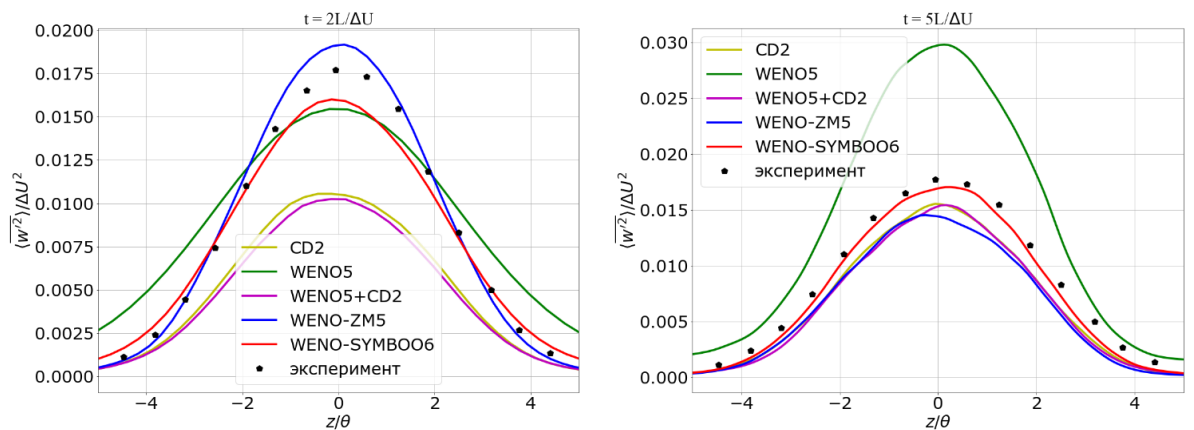


Рисунок 44 — Профили $\langle w'w' \rangle$ в слое смешения в моменты времени $(2, 5) \cdot L / \Delta U$

Отличия в случае среднего значения произведения $\langle \overline{u'w'} \rangle$ от остальных состоят в том, что ближайший к эксперименту профиль демонстрируют гибридная схема и WENO-SYMBOO6 (рисунок 45).

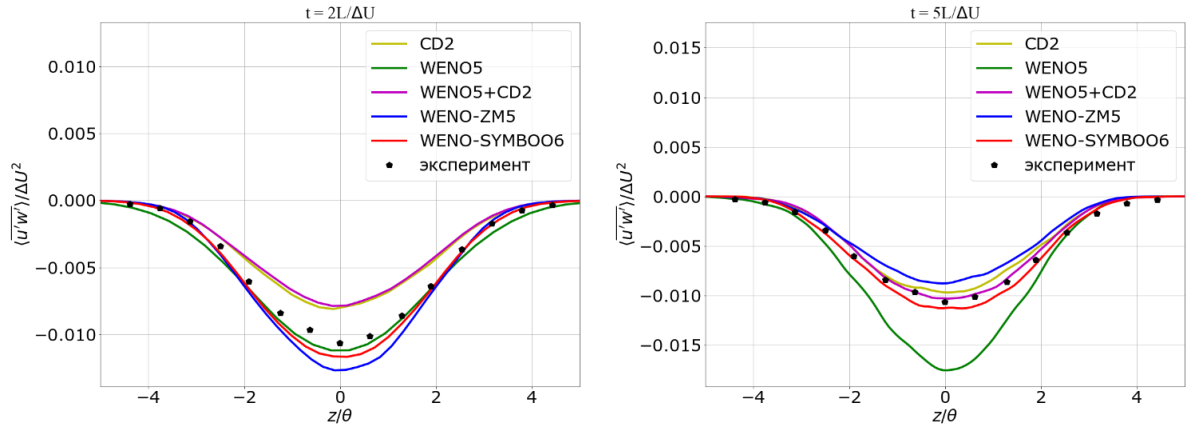


Рисунок 45 — Профили $\langle \overline{u'w'} \rangle$ в слое смешения в моменты времени $(2, 5) \cdot L / \Delta U$

Ещё одной величиной, представляющей интерес, является одномерный энергетический спектр, вычисленный в центральной плоскости слоя смешения:

$$E_{uu}(k_x) = \frac{1}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \bar{u}(x, y, 0) e^{-ik_x x} dx \right|^2 dy.$$

Он должен содержать протяженный инерционный интервал: $E_{uu}(k_x) \sim k_x^{-5/3}$. На рисунке 46 представлены спектры в 3 различных момента времени: $L / \Delta U$, $3L / \Delta U$, $5L / \Delta U$. В первый момент в решениях по гибридной и центрально-разностной схемам присутствует избыточная энергия в коротковолновой области спектра. Данная ошибка исправляется в следующие моменты времени. В решениях, полученных по схемам WENO5, WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6, не выдерживается протяжённый инерционный интервал. Несмотря на то, что отклонение от ожидаемого наклона спектра для схем WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 и для схем CD2 и WENO5+CD2 происходит примерно при одном и том же волновом числе, степень отклонения двух новых схем существенно выше. При этом в уровне диссипации гибридной схемы в отличие от новых двух существенную роль играет подсеточная модель. Это даёт возможность, варьируя

структуру подсеточной модели, контролировать описание подсеточной турбулентности и её взаимодействие с разрешенным полем течения.

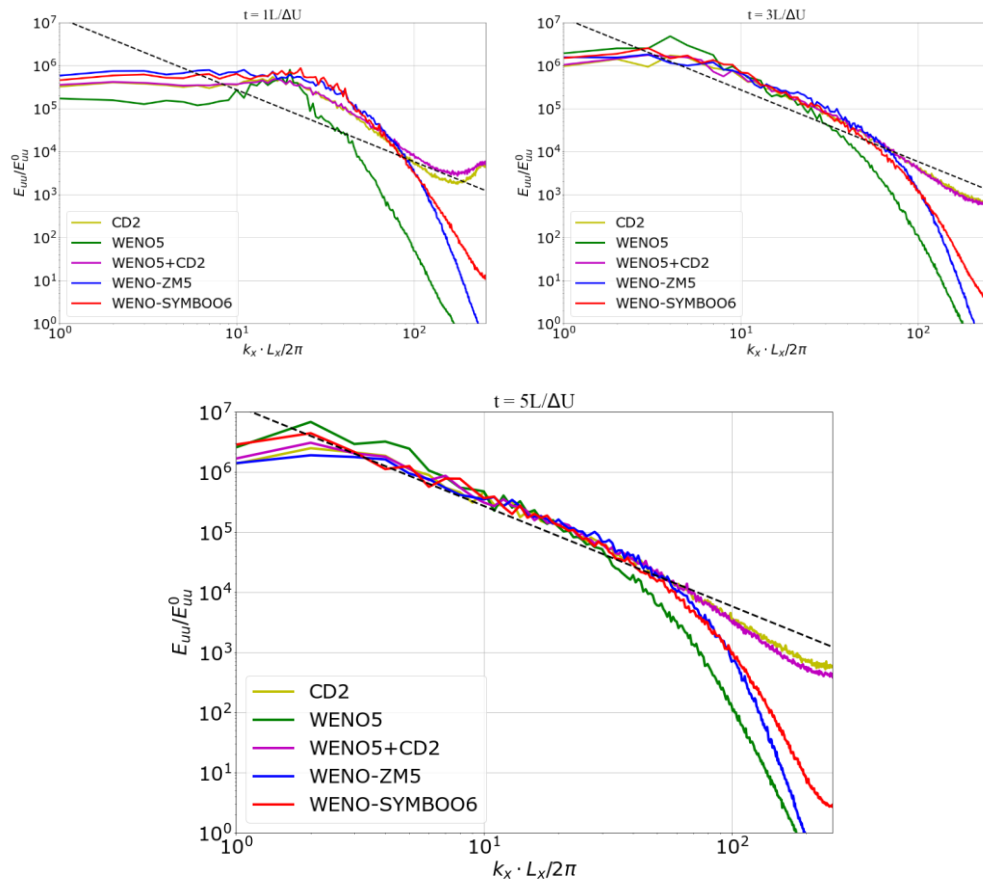


Рисунок 46 — Одномерные спектры $E_{uu}(k_x)$ в моменты времени $(1, 3, 5) \cdot L / \Delta U$.
Пунктирная линия — профиль « $-5/3$ »

Данные результаты подтвердили избыточно высокий уровень диссипации схем WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 в рамках метода конечных объемов с 1 гауссовой точкой и реконструкцией по направлению. В предыдущей задаче (о распаде однородной изотропной турбулентности) было показано, что даже при полном отключении явной подсеточной модели (режим ILES) энергетический спектр не содержит протяжённого инерционного интервала. Интересно, что в расчётах временного слоя смешения данный недостаток не мешает схеме WENO-SYMBOO6 демонстрировать корректные статистические характеристики течения: скорость роста ширины и профили средней скорости и напряжений Рейнольдса. Тем не менее, отсутствие возможности влиять на подсеточные напряжения делает схемы, работающие в режиме ILES, менее предпочтительными, чем гибридная

схема, основная часть диссипации в которой создается именно явной моделью подсеточных напряжений.

2.5 Проверка выбора численного метода в задаче об отрыве турбулентного пограничного слоя из-под скачка уплотнения

В данном разделе гибридная схема WENO5+CD2 и схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6, которые выше были сопоставлены на примере задач о распаде изотропной турбулентности и временного турбулентного слоя смешения, применяются к задаче об отрыве турбулентного пограничного слоя на пластине из-под скачка уплотнения. В отличие от предыдущих задач, здесь появляются ударные волны конечной интенсивности, из-за которых поле течения не является гладким, и формируется отрыв пограничного слоя.

Решение с помощью гибридной схемы было получено в режиме SST-IDDES. Решение с помощью схемы WENO-ZM5 получить не удалось из-за потери устойчивости, чистая CD2 из-за наличия скачков в течении не рассматривалась. В соответствии с выводами раздела 2.3, решение по схеме WENO-SYMBOO6 было получено в режиме SST-ILES. Дополнительно в этом режиме было получено решение по схеме WENO5. Полученные решения сравниваются в данном разделе как с опубликованными эталонными данными LES-расчёта, так и со стационарным решением, полученным по модели турбулентности SST [127] в постановке RANS.

Результаты, описанные в данном разделе, были опубликованы в [188].

2.5.1 Постановка задачи

Выбранная тестовая задача об отрыве турбулентного пограничного слоя скачком уплотнения описана в [189]. В этой постановке рассматривается поток с числом Маха $M=3$, в котором на турбулентный пограничный слой на пластине падает косой скачок уплотнения, отклоняющий поток на 19.6° . Начальная толщина пограничного слоя δ_0 , определяемая как высота точки, в которой скорость составляет 0.99 от скорости в ядре потока, равна 4.0 мм. Толщина потери

импульса $\theta_0^{\text{exp}} = 0.28$ мм. Число Рейнольдса, определенное по δ_0 и по параметрам набегающего потока, равно 2.03×10^5 , а по θ_0^{exp} оно составляет 1.4×10^4 . Выбранные параметры задачи соответствуют сильному отрыву со средним продольным размером $L_{\text{sep}}^{\text{exp}} = 15.5\delta_0$. В [189] описан эталонный LES-расчёт (подразумевается WRLES, wall resolved LES, то есть, с разрешением вплоть до стенок) этого течения, который воспроизводит эксперимент [190] и хорошо с ним согласуется. Отметим, что и в [189], и в [190] наблюдались колебания отрывной зоны: например, координата точки отрыва перемещалась с амплитудой $\Delta x_s = 1.2\delta_0$ и доминирующей частотой около $0.04U_0 / L_{\text{sep}}^{\text{exp}}$, где U_0 — скорость набегающего потока.

В данном разделе, как и в [189], расчётная область выбрана в форме прямоугольного параллелепипеда длины $L_x = 50\delta_0$, высоты $L_y = 20\delta_0$ и ширины по размаху $L_z = 4.5\delta_0$. Набегающий поток сонаправлен с осью x и имеет следующие параметры: температура торможения 273.7 К, давление торможения 582 кПа, число Маха 3.0. Газ считается совершенным с показателем адиабаты 1.4, газовой постоянной 287.05 Дж / (кг · К) и числом Прандтля 0.72.

На рисунке 47 показан общий вид расчётной области в плоскости $x-y$ и граничные условия. На входной границе задавался профиль пограничного слоя. Этот профиль был получен в предварительном RANS-расчёте турбулентного пограничного слоя на пластине по модели турбулентности SST [127], из которого было взято сечение с толщиной δ_0 . Толщина потери импульса θ_0 в этом сечении оказалась равной 0.270 мм, что отличается от эталонного значения θ_0^{exp} менее чем на 4%. В вихреразрешающих расчётах на полученный входной профиль пограничного слоя накладывались нестационарные возмущения скорости по методу, основанному на генераторе синтетической турбулентности (STG) [179].

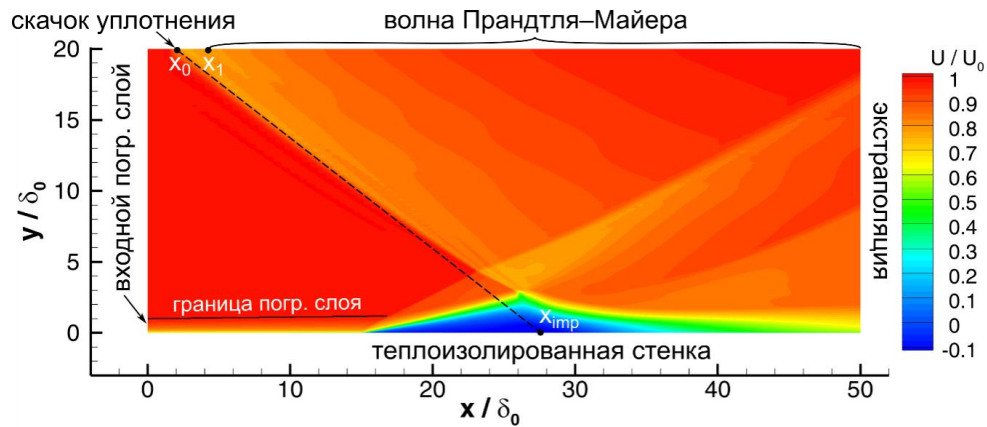


Рисунок 47 — Общий вид расчётной области в плоскости $x - y$ и граничные условия. Пунктирная линия показывает форму скачка уплотнения, если бы он не был отклонен волной Прандтля–Майера. Поле скорости из RANS-расчета

На нижней границе ставилось условие прилипания к теплоизолированной стенке, на правой границе — экстраполяция решения (особенности реализации граничных условий описаны в [176]). На верхней границе в точке $x_0 = 1.5\delta_0$ задавался скачок уплотнения, за которым, начиная с координаты $x_1 = 3.75\delta_0$, следовала волна Прандтля–Майера, центрированная в точке $(-12.75\delta_0, 39.25\delta_0)$. Такая конфигурация течения соответствует треугольному генератору скачка уплотнения, установленному над стенкой в эксперименте [190]. На боковых плоскостях $z = \text{const}$ были поставлены периодические граничные условия. На рисунке 47 также отмечена координата $x_{\text{imp}} = 27.75\delta_0$ — ей соответствует точка на стенке, куда попал бы скачок уплотнения в невязком газе, не отклоненный волной Прандтля–Майера. Далее продольные распределения параметров изображены в смещённых и обезразмеренных координатах $(x - x_{\text{imp}}) / \delta_0$.

В выбранной расчётной области были построены две прямоугольные декартовы сетки: базовая с $500 \times 200 \times 90 = 9 \times 10^6$ ячеек и подробная с $1000 \times 200 \times 180 = 36 \times 10^6$ ячеек. Базовая сетка соответствует стандартным рекомендациям [40] для гибридного RANS/LES-расчёта: продольный шаг сетки $\Delta x = \delta_0 / 10$, шаг в боковом направлении $\Delta z = \delta_0 / 20$. Подробная сетка измельчена в этих двух направлениях вдвое. Распределение узлов по оси y в обеих сетках одинаковое и устроено следующим образом. Пристеночный шаг сетки

$\Delta y_{\min} = 2.5 \times 10^{-4} \delta_0$, что соответствует условию $\Delta y_{\min}^+ < 0.43$ на всей пластине. Над стенкой находится полоса из 96 ячеек высотой δ_0 , в которой происходит роспуск сетки до шага $\delta_0/20$. Выше расположена полоса высотой $2\delta_0$ с постоянным шагом сетки $\delta_0/20$. Оставшееся пространство по вертикали заполнено 64 ячейками с плавным увеличением размера ячеек до максимального шага $\delta_0/2$ на верхней границе расчётной области. Фрагменты расчётных сеток (изображена каждая вторая сеточная линия) с мгновенным полем скорости в окрестности отрыва показаны на рисунке 48.

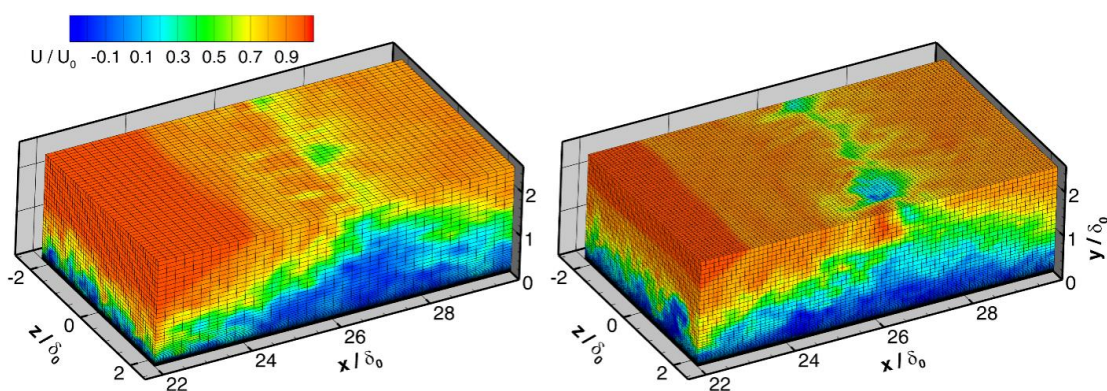


Рисунок 48 — Фрагменты расчётных сеток с мгновенным полем скорости в окрестности отрыва: слева — базовая, справа — подробная. Показана каждая вторая сеточная линия

Стоит отметить, что в проведённых расчётах переключение между RANS- и LES-режимами в методе IDDES преимущественно осуществлялось за счёт функции f_b , зависящей от расстояния до стенки и размера ячейки. Таким образом, независимо от пространственной аппроксимации над большей частью стенки RANS-подслой имел одну и ту же высоту. На базовой сетке она соответствовала $y^+ \approx 100$ в невозмущённом пограничном слое, на подробной сетке — $y^+ \approx 50$. Различие с вышеописанным численным методом состоит в аппроксимации временного оператора. Поскольку расчёт течения с пограничным слоем по явной схеме потребовал бы избыточных вычислительных ресурсов, интегрирование по времени осуществлялось по неявной схеме DIRK22 [191] второго порядка точности. В вихреразрешающих расчётах временной шаг Δt

определялся условием, чтобы возмущение со скоростью $U_0 + c_e$ (здесь c_e — скорость звука в набегающем потоке) проходило за это время половину ячейки сетки в продольном направлении. Для базовой сетки Δt равнялось 2.5×10^{-7} с, для подробной — 1.25×10^{-7} с. В RANS-постановке расчёты велись с десятикратно увеличенным шагом Δt ; на каждой из сеток было получено стационарное решение системы уравнений.

Расчёты были организованы следующим образом. На первом этапе на обеих сетках было получено стационарное RANS-решение задачи по модели турбулентности SST [127]. Помимо данных для сравнения, эти поля служили начальными условиями для вихреразрешающих расчётов. На втором этапе в постановках SST-IDDES и SST-ILES был смоделирован промежуток времени 5 мс (соответствует $743\delta_0 / U_0$ или 14.8 пролётам газа по расчётной области со скоростью U_0), в течение которого решение перестраивалось от RANS- к вихреразрешающему режиму. Поля, полученные в конце второго этапа, использовались для предварительной оценки координат точки отрыва x_s и точки присоединения x_r . Эти оценки были нужны для постановки контрольных точек, в которых записывалось давление на третьем этапе расчёта. Контрольная точка A находилась вблизи начала отрыва и имела продольную координату $x_A = x_s - 0.0265L_{sep}$, где $L_{sep} = x_r - x_s$, а точка B совпадала с точкой присоединения. Обе точки располагались на дне пограничного слоя.

Третий этап расчётов также длился 5 мс, в ходе которых решение осреднялось по времени, а при обработке итоговых результатов поля дополнительно осреднялись по однородному направлению z . На рисунке 49 проиллюстрирована зависимость от времени интегрального коэффициента трения C_{fi} на этом этапе:

$$C_{fi} = \frac{2}{\rho_e U_0^2 F} \int_{wall} \tau_w dS, \quad \tau_w = \mu_w \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_w.$$

Здесь ρ_e — плотность набегающего потока, $F = 225\delta_0^2$ — площадь стенки в расчёте, индексом “w” обозначены параметры на стенке. Из графиков видно, что трение находится в статистически стационарном состоянии, причём явного длинноволнового периодического процесса ни на одной линии заметить невозможно. Примечательно, что переход от базовой сетки к подробной повлиял на уровень трения слабо, что, как будет видно далее, соответствует малой чувствительности размера отрыва к шагу сетки в рассмотренном диапазоне.

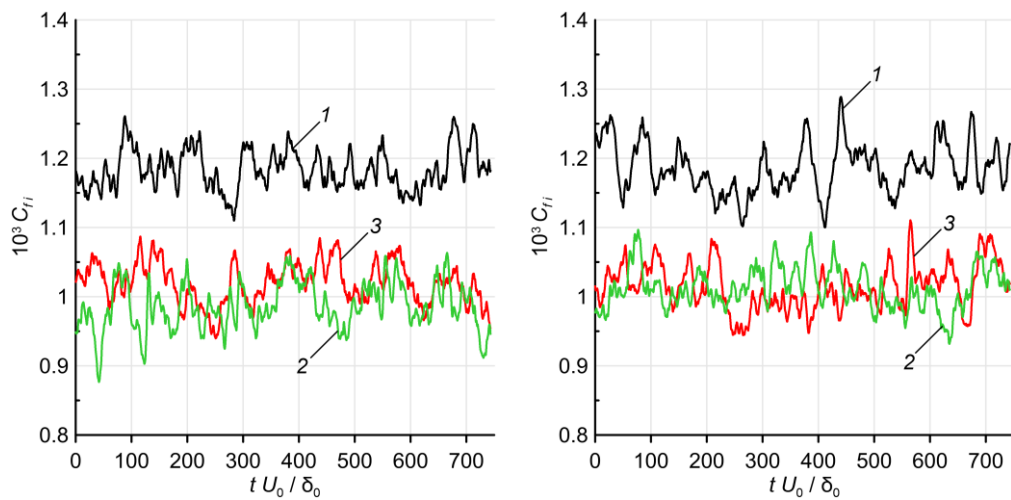


Рисунок 49 — Графики зависимости интегрального коэффициента трения от времени на третьем этапе расчётов: слева — базовая сетка, справа — подробная. Чёрный цвет (1) — SST-IDDES, зелёный (2) — SST-ILES WENO5+MP, красный (3) — SST-ILES WENO-SYMB006

На рисунке 50 показаны поперечные профили средней скорости в переменных закона стенки $U^+(y^+)$, где $U^+ = U / \sqrt{\tau_w / \rho_w}$, $y^+ = y \sqrt{\rho_w \tau_w} / \mu_w$, в сечениях, расположенных на расстоянии $\Delta x = \delta_0$ вверх по потоку от точки, в которой давление на стенке начинает повышаться. Эти сечения соответствуют невозмущенному пограничному слою перед началом отрыва. Если считать профили из RANS-расчётов эталонными (как будет показано далее, RANS-расчёты дают практически точный уровень трения в области перед отрывом), то по сравнению с ними средние профили скорости во всех проведённых вихреразрешающих расчётах искажены на логарифмическом участке. Это — проявление известной проблемы нестыковки логарифмических участков профиля

скорости, требующее внесения поправок в переходной полосе между RANS- и LES-областями [192]. Как видно, SST-IDDES-расчёты менее подвержены этой проблеме, чем расчёты по методу SST-ILES, а наибольший сдвиг скорости наблюдается с численной схемой WENO5+MP — самой диссипативной из рассмотренных. На подробной сетке сдвиг скорости начинается ближе к стенке, чем на базовой, но величина сдвига зависит от сетки слабо, за исключением расчётов по схеме WENO5+MP.

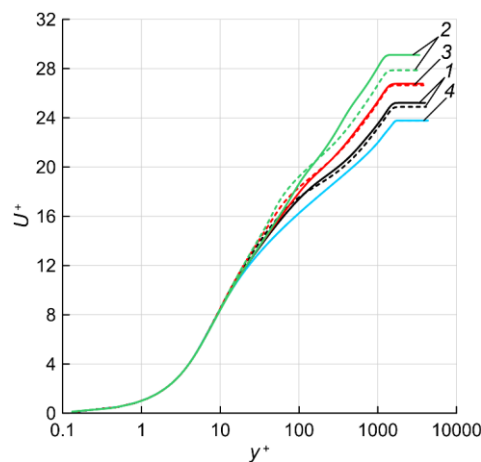


Рисунок 50 — Поперечные профили средней скорости в переменных закона стенки перед началом отрыва. Черный цвет (1) — SST-IDDES, зелёный (2) — WENO5+MP, красный (3) — WENO-SYMB006, голубой (4) — RANS-расчёт. Сплошные линии соответствуют базовой сетке, пунктирные — подробной

2.5.2 Результаты расчётов

На рисунке 51 изображены продольные распределения давления вдоль стенки, полученные на базовой сетке: $\tilde{p}(x) = p_w / p_e$, где p_e — давление набегающего потока. Хорошо видно, что во всех вихреразрешающих расчётах длина области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем существенно занижена, хотя пиковое значение давления на стенке все расчёты воспроизводят удовлетворительно. По сравнению с ними, RANS-расчёт по модели турбулентности SST даёт более точное распределение среднего давления вдоль стенки как по координате начала взаимодействия, так и по характерным уровням в области отрыва. На рисунке 51 также показан эффект перехода от базовой сетки к подробной. Видно, что решение, полученное в RANS-расчёте,

является хорошо сошедшимся по шагу сетки. Влияние сетки на результаты вихреразрешающих расчётов также относительно невелико. Лишь в начале области взаимодействия видны незначительные изменения в форме распределений. Любопытно, что в расчётах по всем методам переход к подробной сетке или почти не приближает точку начала взаимодействия к эталонной координате, или даже отдаляет её.

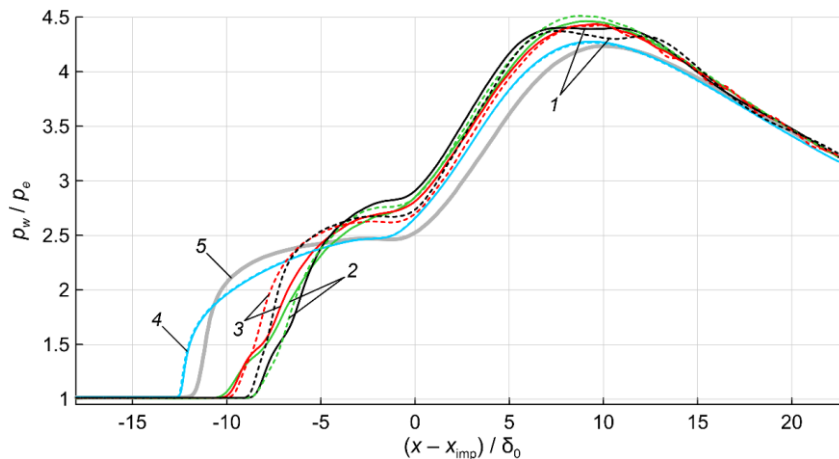


Рисунок 51 — Распределения давления вдоль стенки. Черный цвет (1) — SST-IDDES, зелёный (2) — WENO5+MP, красный (3) — WENO-SYBOO6, голубой (4) — RANS-расчёт, серый (5) — эталонный LES-расчёт [189]. Сплошные линии соответствуют базовой сетке, пунктирные — подробной

На рисунке 52 построены продольные распределения коэффициента трения в расчётах на базовой сетке: $C_f(x) = \tau_w / (\rho_e U_0^2 / 2)$. На левой границе области — там, где задан RANS-профиль пограничного слоя — трение имеет корректную величину. В вихреразрешающих расчётах оно сразу испытывает понижение, что связано с действием STG (см. раздел 2.3). Последующее восстановление трения происходит до различных значений в зависимости от метода расчёта, что связано с наличием вышеупомянутой проблемы нестыковки логарифмических участков профиля скорости в пограничном слое. Наблюдается сокращение области релаксации трения после STG с измельчением сетки и с уменьшением уровня диссипации численного метода. В расчёте по наиболее диссипативной схеме WENO5+MP на базовой сетке релаксация не успевает завершиться к началу взаимодействия, что усиливает занижение трения в этом расчёте (это было видно

на рисунке 50) и немного увеличивает размер отрыва по сравнению с подробной сеткой. В остальных расчётах релаксация за STG успевает завершиться.

В начале отрыва ($-8 \leq (x - x_{\text{imp}}) / \delta_0 \leq -5$) все вихреразрешающие расчёты дают провал уровня трения, которого нет в эталонных данных, и который, по-видимому, связан с особенностями гибридизации по методу IDDES. За этой областью следует протяженный участок $-5 \leq (x - x_{\text{imp}}) / \delta_0 \leq 7$, воспроизводимый удовлетворительно. В области присоединения пограничного слоя после отрыва трение повышается по сравнению с начальным уровнем на входной границе (это связано с благоприятным градиентом давления, создаваемым волной Прандтля–Майера), однако все расчёты недооценивают уровень этого повышения. Метод SST-IDDES занижает трение на 10%, рассмотренные варианты метода SST-ILES — на величину около 16%.

Отметим, что в SST-ILES-расчёте по схеме WENO-SYMB006 наблюдаются небольшие колебания, порождённые, по-видимому, немонотонностью схемы на скачках уплотнения. Наиболее реалистичные уровни трения вне области взаимодействия даёт SST-IDDES-расчёт, однако длина отрывной области в нём занижена. Наиболее развитый отрыв получен в SST-ILES-расчёте со схемой WENO-SYMB006, но он всё равно существенно короче, чем в эталонных данных. Во всех расчётах, кроме WENO5+MP, переход к подробной сетке влияет на распределение трения относительно слабо. Отличие SST-ILES-расчёта со схемой WENO5+MP от остальных отчасти связано с наличием ранее отмеченных эффектов незавершенной релаксации пограничного слоя за генератором синтетической турбулентности. Для сравнения на рисунке 52 показаны распределения трения в RANS-расчётах. Они почти одинаковы на двух сетках, что ещё раз подтверждает наличие глубокой сеточной сходимости в этой постановке. До начала взаимодействия уровень трения на стенке совпадает с эталонным, но в области отрыва он становится слишком низким и полностью не восстанавливается, оставаясь заниженным на 20% в области присоединения. Длина отрывной зоны в RANS-расчёте завышена на 7%.

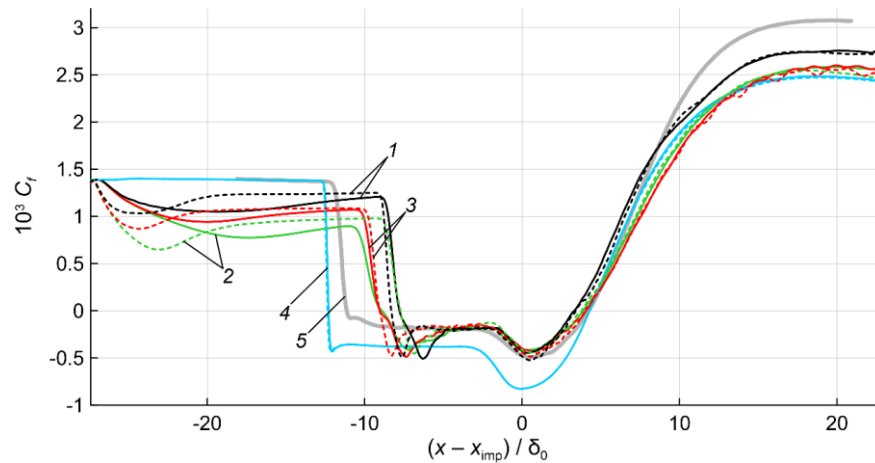


Рисунок 52 — Распределения коэффициента трения вдоль стенки.
Обозначения как на рисунке 51

На рисунке 53 схематически показано, как измельчение сетки влияет на предсказание длины отрыва, а в таблице 3 приведены численные значения L_{sep} . Во всех вихреразрешающих расчётах длина отрыва оказалась занижена на 15–28%, причём существенного сокращения ошибки с измельчением сетки не наблюдалось. Разные методы продемонстрировали различные тенденции: в SST-IDDES-расчётах измельчение сетки немного увеличило отрыв, в SST-ILES-расчётах со схемой WENO-SYMBOO6 размер отрыва оказался почти нечувствителен к густоте сетки, а со схемой WENO5+MP отрыв с измельчением сетки сократился. Различия между решениями по разным методам оказались значительно меньшими, чем их отклонение от эталонных данных.

Таблица 3. Длины отрыва, полученные в расчётах

Расчёт	$L_{\text{sep}} / \delta_0$, базовая сетка	$L_{\text{sep}} / \delta_0$, подробная сетка
SST (RANS)	16.6	16.6
SST-IDDES	11.1	11.7
SST-ILES, WENO5+MP	12.8	11.5
SST-ILES, WENO-SYMBOO6	13.1	13.0
Эталонный LES-расчет [189]	15.5	

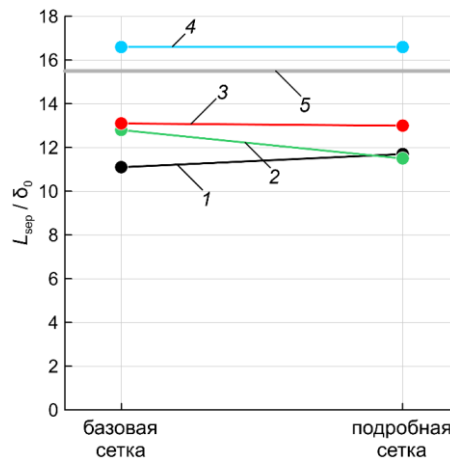


Рисунок 53 — Зависимость размера отрывной зоны от густоты расчетной сетки. Чёрный цвет (1) — SST-IDDES, зелёный (2) — WENO5+MP, красный (3) — WENO-SYMB006, голубой (4) — RANS-расчёт, серый (5) — эталонный LES-расчёт [189].

На рисунках 54 и 55 построены одноточечные функции плотности вероятности реализации значений давления (далее — ФПВ) на стенке в контрольных точках *A* (вблизи точки отрыва) и *B* (точка присоединения) соответственно. Давление центрировано и отнесено к своему среднеквадратичному отклонению σ .

В первой точке эталонные данные показывают сильное отклонение распределения от гауссового. Это связано с тем, что из-за колебаний размера отрывной зоны вблизи точки отрыва меняется характер и структура течения: то присоединенное состояние пограничного слоя, то отрывное, и это сопровождается резкими перепадами давления. При этом структура течения в окрестности точки отрыва, по-видимому, описывается неправильно. В представленных расчётах этот эффект проявляется слабо. Наибольшие отклонения от гауссовой кривой получены в SST-IDDES-расчёте на базовой сетке, но даже они выглядят существенно более слабыми, чем в эталонных данных. Интересно, что с измельчением сетки «негауссовость» распределения ослабляется.

Во второй точке ситуация более благополучная: эталонная ФПВ имеет лишь незначительные отклонения от гауссовой кривой, и расчёты по всем численным схемам воспроизводят её достаточно точно. Отсутствие явных следов перестройки структуры течения в точке присоединения, несмотря на

совершаемые ей колебания, может быть связано с тем, что давление в её окрестности меняется намного плавнее, чем вблизи точки отрыва, и что присоединение описывается точнее, чем отрыв.

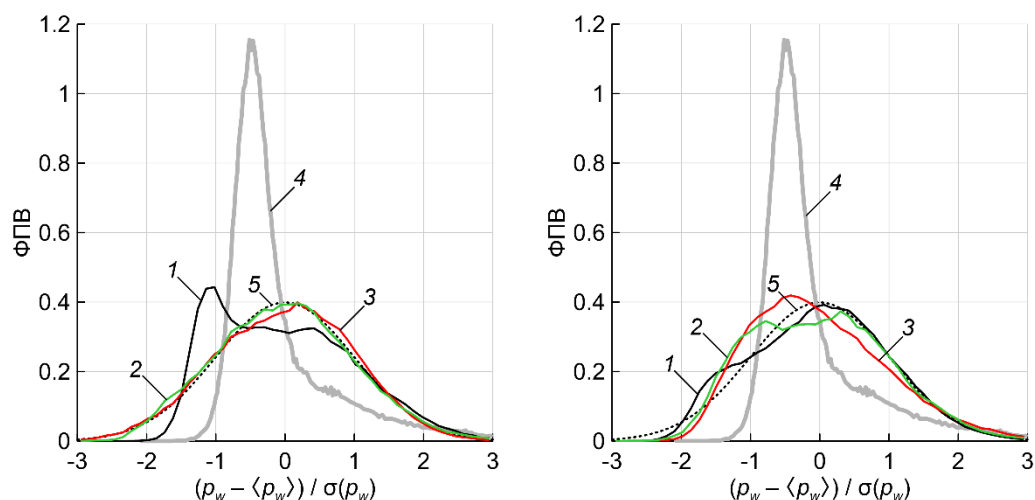


Рисунок 54 — ФПВ давления в контрольной точке А (слева — базовая сетка, справа — подробная). Чёрный цвет (1) — SST-IDDES, зелёный (2) — WENO5+MP, красный (3) — WENO-SYMBOO, серый (4) — эталонный LES-расчёт [189], чёрный пунктир (5) — гауссово распределение

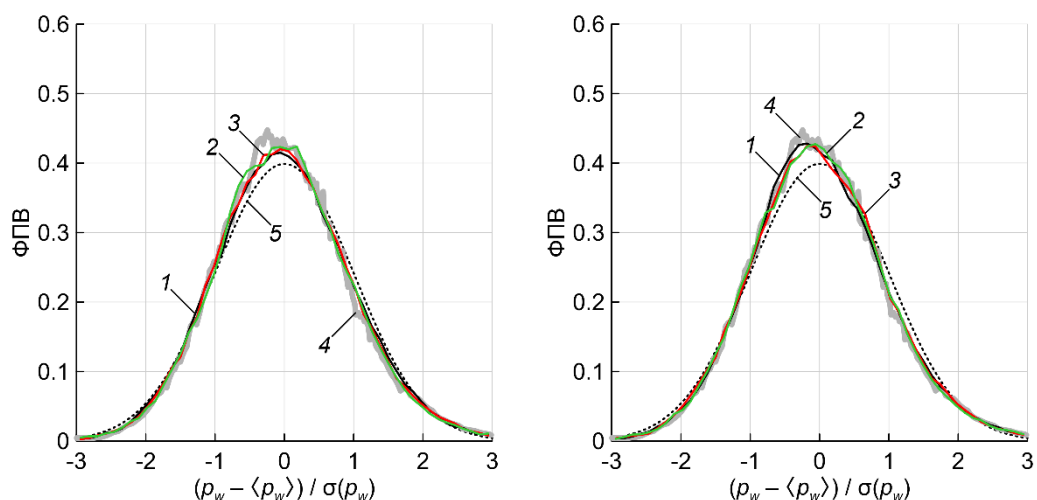


Рисунок 55 — ФПВ давления в контрольной точке В (слева — базовая сетка, справа — подробная). Обозначения как на рисунке 54

Подведем итоги. Все вихреразрешающие расчёты дали существенно заниженную длину отрыва. Занижение составило от 15% (SST-ILES-расчёт со схемой WENO-SYMBOO6) до 28% (SST-IDDES-расчёт с гибридной схемой); аналогичный расчёт в RANS-постановке зависил размер отрыва на 7%.

Измельчение сетки вдвое в продольном и боковом направлениях в целом не улучшило ситуацию.

Сравнивая вихреразрешающие методы между собой, выбрать явного «лидера» на основе проведенных расчётов затруднительно. Метод SST-IDDES дал наименьшее искажение профиля средней скорости на логарифмическом участке пограничного слоя и наиболее близкое к эталонным данным трение в области присоединения, но размер отрыва при этом был сильно занижен. Метод SST-ILES с численной схемой WENO-SYMBOO6 проявил себя лучше в описании размера отрыва, но порождал колебания параметров течения, связанные с плохим сохранением монотонности решения.

2.6 Выводы по главе

На основе проведённых тестов (модельные одномерные уравнения, распад однородной изотропной турбулентности, временной турбулентный слой смешения, отрыв турбулентного пограничного слоя из-под скачка уплотнения) не удалось установить явное количественное преимущество того или иного численного метода. Тем не менее, метод, основанный на SST-IDDES-подходе с гибридной функцией [144], соединяющей схемы WENO5+MP и CD2 остаётся предпочтительным из-за наличия в нём явной модели подсеточных напряжений. Это даёт дополнительные степени свободы для тонкой настройки метода в будущих исследованиях с целью уточнения описания таких явлений, как, например, турбулентная диффузия газов разной плотности [193] или передача энергии вверх по каскаду вихрей [194]. Воспроизведение этих явлений может быть важно в высокоскоростных отрывных течениях. Таким образом, именно данный подход будет использован в следующей главе для целевой задачи.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ ИНЖЕКЦИИ ВОДОРОДА В ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ НАБЕГАЮЩИЙ ПОТОК ВОЗДУХА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

В данной главе выбранный вихреразрешающий метод применен к моделированию одного из режимов течения в экспериментах ONERA [1], [195]. В этих экспериментах был рассмотрен модельный расширяющийся по высоте канал постоянной боковой ширины без специальных механических устройств для стабилизации горения. Схема и внешний вид установки изображены на рисунке 56. Дозвуковой поток воздуха разогревается до высоких температур торможения ($T_0 \sim 1700$ К) с помощью огневого подогревателя. Затем в поток добавляется кислород, чтобы восстановить его мольную долю до исходного значения. Горячий поток разгоняется в сопле Лаваля до $M = 2$ и попадает в канал модели. Во избежание повреждений установки по причине высоких температур стенок канала, сделанные из меди, были покрыты жаропрочным слоем. Однако это привело к возникновению неоднородностей поверхности. Несмотря на то, что в отсутствие горения этими эффектами можно пренебречь, оказалось, что шероховатость стенок оказывает существенное влияние на течение в канале с горением. Экспериментальная модель была снабжена оптическими окнами, расположенными по всей длине канала, что позволило визуализировать структуру течения методами высокоскоростной шпирен-видеосъемки и зарегистрировать хемилюминесценцию возбужденных радикалов OH^* . Были измерены распределения среднего по времени статического давления по стенкам канала. Были осуществлены попытки измерить температуру стенок с помощью термопар, однако в ходе пусков с поверхности термопары было содрано жаропрочное покрытие, поэтому авторы эксперимента признают измеренные данные искажёнными. Также в одном из сечений подогревателя были померены поперечные профили температуры и давления торможения.

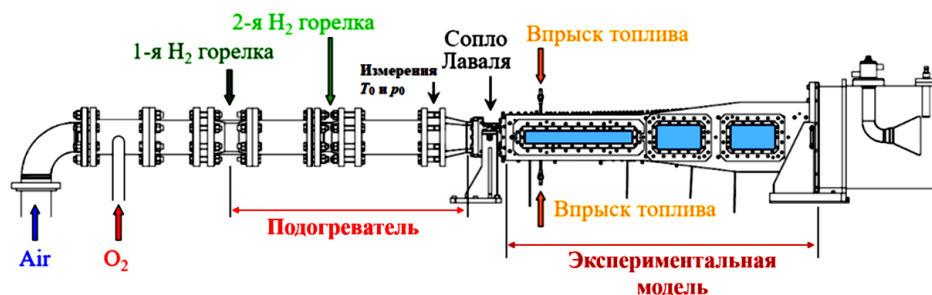


Рисунок 56 — Схема и внешний вид установки ONERA, фото взято из [5]

Установка позволяет получить различные режимы течения, включая режим горения, индуцированный ударно-волновыми структурами. При определённых начальных условиях течение становится существенно нестационарным и может содержать асимметрично расположенные зоны горения на верхней и нижней стенках. Описываемая картина изображена на рисунке 57.

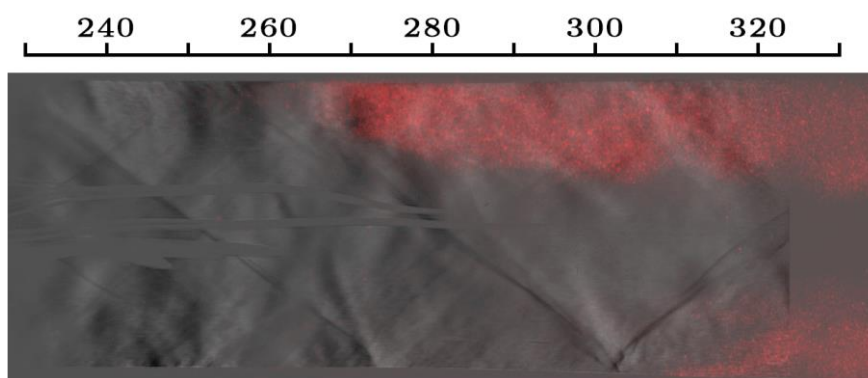


Рисунок 57 — Хемилюминесценция радикалов OH и шлирен фотография, полученные в эксперименте ONERA (пуск R10) [196]

Видно, что воспламенение происходит из-под КСУ. Сами КСУ определяются отрывными зонами, которые, как известно, колеблются в продольном направлении, что приводит к изменению наклона скачков. Примечательно, что поскольку топливо вдувается с верхней и нижней стенок

одновременно, КСУ, образованные отрывами перед поперечными струями, взаимодействуют друг с другом, что в зависимости от параметров потока может заставить их отклоняться как более круто, так и более полого [197]. Следовательно, колеблются координаты падения и отражения скачков в продольном направлении. Кроме того, горение способствует увеличению давления за КСУ, что также влияет на его наклон и наклон отражённого скачка (то есть, увеличивает перепад давления на противоположной стенке). В результате пламя может «перекидываться» с верхней поверхности на нижнюю и обратно.

Тем не менее, в экспериментах ONERA были получены и режимы, обладающие статистической симметрией. Для исследований в диссертации выбран именно такой режим. На основании данных о статистической симметрии поля течения было принято решение ограничиться в расчетах моделированием только нижней половины канала.

Одной из интересных особенностей данного эксперимента является то, что давление, измеренное на стенке вдоль канала, выходит на постоянное значение в расширяющейся части канала (рисунок 58, между координатами 450 и 600 мм). Причина возникновения этой «полочки» давления остаётся открытым вопросом на данный момент.

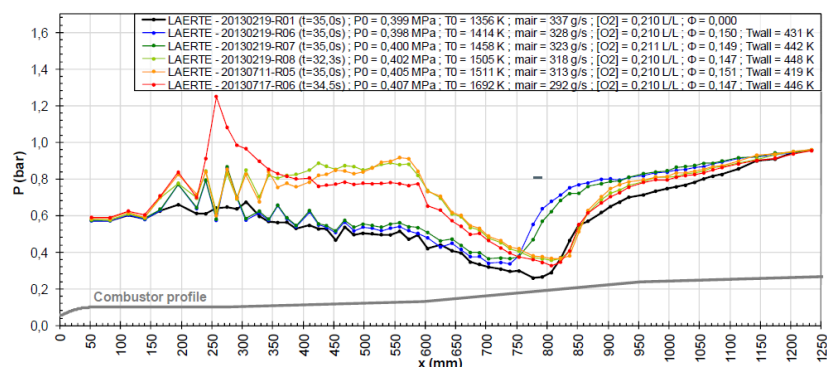


Рисунок 58 — Продольное распределение давления (эксперимент) на стенке экспериментальной модели ONERA для некоторых пусков, взятые из [1]

В последние годы было проведено несколько RANS-расчётов отдельных режимов исходного эксперимента [1], [5], [198], [199], [200], а также LES-расчёты

[195], [196] и [6]. Для всех расчётов можно заключить общие выводы: эффекты шероховатости существенны в присутствии горения (см. рисунки 59 и 60), газодинамическая структура играет серьёзную роль в стабилизации горения, ни в одном из расчётов, кроме [6] не удалось получить «полочку» давления в расширяющейся части канала, и даже в [6] нет объяснения этого эффекта.

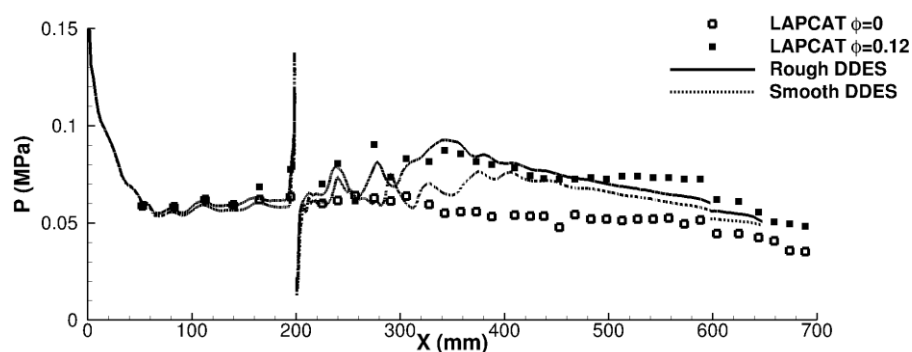


Рисунок 59 — Продольное распределение давления (DDES-расчёты и эксперимент) на стенке моедли ONERA пуска R10, взятые из [196]

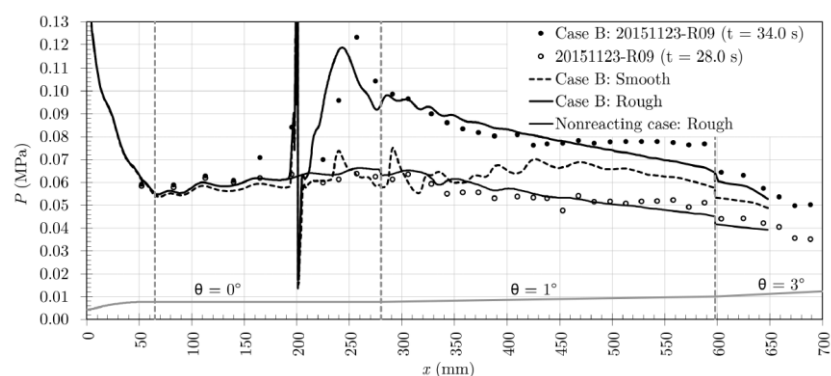


Рисунок 60 — Продольное распределение давления (RANS-расчёты и эксперимент) на стенке модели ONERA пуска R09, взятые из [5]

Необходимо подчеркнуть, что выполненные в эксперименте измерения не позволяют однозначно сформулировать граничные условия для расчетов. Из-за прогоревшего покрытия экспериментаторам не удалось промерить температуру стенок в выбранных отдельных точках. А для надежного моделирования необходимо знать зависимости от времени температуры стенок или тепловых потоков. Ни в одном сечении канала не были выполнены измерения трения. Это не позволяет однозначно задать параметр шероховатости в граничном условии. Отсутствуют данные о пограничном слое на входе в канал. Нет информации о

процессе инициирования горения в эксперименте, что может влиять на режим стабилизации горения. Учитывая неопределенность в постановке задачи, ко всем расчетам, представленным в диссертации, следует относиться как к исследованию выбранного режима эксперимента в рамках используемой физико-математической модели течения.

3.1 Математическая постановка

3.1.1 Решаемая система уравнений и численный метод

Поскольку в данной главе рассматривается течение с горением, то к системе уравнений из главы 2 следует добавить уравнения для реагирующих смесей. Тогда итоговую систему можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_j^{Eu}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{f}_j^{NS}}{\partial x_j} = \mathbf{s},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \omega \\ \rho Y_l \end{bmatrix}, \mathbf{f}_j^{Eu} = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ (\rho E + p) u_j \\ \rho k u_j \\ \rho \omega u_j \\ \rho Y_l u_j \end{bmatrix}, \mathbf{f}_j^{NS} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ \tau_{ij} u_i + \Theta_j + \sum_l J_j(Y_l) h_l \\ J_j(k) \\ J_j(\omega) \\ J_j(Y_l) \end{bmatrix}, \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S(k) \\ S(\omega) \\ S(Y_l) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор консервативных переменных, $\mathbf{f}_j^{Eu}$ — поток вектора $\mathbf{u}$ в направлении декартовой оси x_j , связанный с конвекцией (движением газа, как сплошной среды) и с силами давления, $\mathbf{f}_j^{NS}$ — поток вектора $\mathbf{u}$ в направлении декартовой оси x_j , связанный с молекулярной диффузией и с турбулентными пульсациями, $\mathbf{s}$ — вектор источников членов. Кроме вектора консервативных переменных, будет также использоваться вектор примитивных переменных $\mathbf{p} = [T, u_i, p, k, \omega, Y_l]^T$. Векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{p}$ имеют размерность $7 + N_{sp}$, где N_{sp} — полное число компонент смеси. Газ рассматривается как реагирующая смесь

газообразных компонентов, каждый из которых удовлетворяет уравнению состояния Менделеева-Клапейрона.

Как и в главе 2 предполагается суммирование по повторяющимся пространственным индексам (i, j или n). Все параметры осреднены по Фавру (RANS) или отфильтрованы по правилам Фавра (LES). Знаки осреднений/фильтрации опускаются, за исключением тех мест, где они необходимы.

Полная энергия единицы массы смеси газов определяется по формуле: $E = u_n u_n / 2 + k + h - p / \rho$, где $h = \sum_l Y_l h_l(T)$ — энтальпия смеси, включающая химическую энергию. Выражение для суммарного (молекулярного и турбулентного) потока i -й компоненты импульса вдоль оси x_j осталось прежним:

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - (\mu + \mu_T) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \delta_{ij} \right],$$

как и суммарный поток тепла вдоль

$$\text{оси } x_j, \text{ связанный с градиентами температуры: } \Theta_j = - \left(\frac{\mu}{\text{Pr}(h)} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T(h)} \right) c_p \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

По умолчанию молекулярное и турбулентное числа Прандтля принимаются равными $\text{Pr}(h) = 0.72$, $\text{Pr}_T(h) = 0.9$.

$$J_j(k) = - \left(\frac{\mu}{\text{Pr}(k)} + \frac{\mu_T}{\text{Pr}_T(k)} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j},$$

суммарные потоки вдоль оси x_j параметров турбулентности k и ω . $S(k)$ и $S(\omega)$ — источниковые члены в уравнениях для k и

$$\omega. \quad J_j(Y_l) = - \left(\frac{\mu}{\text{Sc}} + \frac{\mu_T}{\text{Sc}_T} \right) \frac{\partial Y_l}{\partial x_j} \quad \text{— суммарный поток } Y_l \text{ вдоль оси } x_j \text{ (Sc=0.9,}$$

$$\text{Sc}_T=1.0).$$

Источниковый член в уравнении для Y_l записывается в виде: $S(Y_l) = -m_l \sum_r \nu_{lr} \dot{\omega}_r$. Влияние турбулентности на средние скорости химических реакций не учитывалось.

Полученная система замыкается уравнением состояния $p = \rho R_0 T \sum_l Y_l m_l^{-1}$ (R_0 — универсальная газовая постоянная), формулой Сазерленда для молекулярной вязкости $\mu = 1.72 \cdot 10^{-5} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2} \frac{273+122}{T+122}$ [Н·м⁻²сек⁻¹] и аппроксимациями зависимостей $h_l(T)$ из базы данных [90]. Теплоемкость смеси вычисляется как $c_p = \sum_l Y_l dh_l / dT$. Значения эмпирических коэффициентов, выражения для турбулентной вязкости и источниковых членов модели SST, а также SST-IDDES представлены в главе 2. Стоит отметить, что также использовалась модификация масштаба длины SLA [135], которая ускоряет развитие возмущений в слоях смешения.

В некоторых расчётах помимо модели SST использовалась её нелинейная модификация SST-NL [201], позволяющая воспроизвести вторичные токи. Изменения в модельных уравнениях сделаны на основе S-BSL-EARSM (simplified baseline explicit algebraic Reynolds stress model) [202]. В выражения для напряжений Рейнольдса вносятся нелинейные слагаемые:

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + 2\mu_t \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + C_{NL} \rho k (\beta_4 T_{4,ij} + \beta_6 T_{6,ij}),$$

где компоненты тензорного базиса T_4 и T_6 согласно [202] имеют вид:

$$T_{4,ij} = S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^*, \quad T_{6,ij} = S_{ik}^* \Omega_{kl}^* \Omega_{lj}^* + \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lj}^* - \frac{2}{3} IV^* \delta_{ij} - II_{\Omega}^* S_{ij}^*.$$

$$\text{Величины} \quad S_{ij}^* = \tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad \text{и} \quad \Omega_{ij}^* = \tau \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) -$$

безразмерные тензора деформации и завихренности, $\tau = 1/(\beta^* \omega)$ — турбулентный масштаб времени, $\beta^* = 0.09$. Коэффициенты β в уравнении для напряжений Рейнольдса выражаются через тензорные инварианты $II_S^* = S_{mn}^* S_{nm}^*$, $II_{\Omega}^* = \Omega_{mn}^* \Omega_{nm}^*$, $IV^* = S_{mn}^* \Omega_{nk}^* \Omega_{km}^*$ следующим образом:

$$\beta_4 = -\frac{1}{Q}, \quad \beta_6 = -\frac{N}{Q_1},$$

где $Q = (N^2 - 2\Pi_\Omega^*) / A_1$, $Q_1 = Q(2N^2 - \Pi_\Omega^*) / 6$, $N = C_1 + \frac{9}{4}\sqrt{2\beta^*\Pi_s^*}$, $A_1 = 1.245$, $C_1 = 1.8$. Константа модели C_{NL} регулирует вклад нелинейного слагаемого в напряжения Рейнольдса. Рекомендуемое авторами значение константы $C_{NL} = 1.4$. Работоспособность реализации модели SST-NL в расчётном модуле zFlare была подтверждена на нескольких базовых тестах, включая течение в прямоугольном канале [203], [204].

Основные отличия численного метода от представленного в главе 2 заключаются во временной аппроксимации и ограничениях, накладываемых источниками членами. Расчёты проводились маршевым методом: известно начальное поле течения (в момент времени t^0), а решение при $t > t^0$ получается последовательными переходами от известного временного слоя t^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, к следующему слою $t^{n+1} = t^n + \tau^n$.

Проинтегрировав рассматриваемую систему по объёму ячейки сетки V и применив теорему Остроградского–Гаусса, представим её в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{V} \sum_{g=1}^6 (\mathbf{F}_j \sigma_j)_g = \mathbf{S},$$

где $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^{Eu} + \mathbf{F}_j^{NS}$, $\sigma_g = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ — вектор нормали к g -й грани ячейки, длина которого равна площади этой грани ($|\sigma_g| = A_g$), $\mathbf{U} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{u} dV$ и $\mathbf{S} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{s} dV$ — средние по объёму ячейки значения вектора консервативных переменных $[\rho, \rho u_i, \rho E, \rho k, \rho \omega, \rho Y_l]^T$ и вектора источников членов, $(\mathbf{F}_j^{Eu})_g = \frac{1}{A_g} \int_{A_g} \mathbf{f}_j^{Eu} dA$ и $(\mathbf{F}_j^{NS})_g = \frac{1}{A_g} \int_{A_g} \mathbf{f}_j^{NS} dA$ — средние по площади g -й грани ячейки значения векторов

потоков $\mathbf{f}_j^{Eu}$ и $\mathbf{f}_j^{NS}$. Введем также вектор примитивных переменных $\mathbf{P}(\mathbf{U}) = [T, u_i, p, k, \omega, Y_l]^T$.

Конвективные потоки вычисляются по гибридной схеме из главы 2. Потоки $\mathbf{F}_j^{NS}$ вычисляются по формулам для $\mathbf{f}_j^{NS}$, которые содержат градиенты параметров течения, а также величины, зависящие от локальных значений примитивных переменных (коэффициенты молекулярной и турбулентной диффузии, турбулентное давление). Для аппроксимации градиентов в потоках $\mathbf{F}_j^{NS}$ используется центрально-разностная аппроксимация, модифицированная на случай неравномерных сеток и обеспечивающая 2-й порядок точности [176]. Локальные значения вектора примитивных переменных $\mathbf{P}$, используемые в $\mathbf{F}_j^{NS}$, вычисляются путём линейной интерполяции между центрами соседних ячеек.

В общем случае, потоки аппроксимируются на неизвестном временном слое $t = t^*$, т.е. интегрирование по времени ведется по неявной схеме. В неявной части численного метода используется линеаризация потоков по времени. Потоки через грань g на неизвестном временном слое выражаются через потоки на известном слое n :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{F}_j(\mathbf{U}^*)\right)_g \approx & \left(\mathbf{F}_j(\mathbf{U}^n)\right)_g + \left(\mathbf{A}_{0,g}^{Eu}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{A}_{0,g}^{NS}(\mathbf{U}^n)\right) \cdot (\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^n) + \\ & + \left(\mathbf{A}_g^{Eu}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{A}_g^{NS}(\mathbf{U}^n)\right) \cdot (\mathbf{U}_g^* - \mathbf{U}_g^n). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{U}_g$ — вектор консервативных переменных в ячейке, которая расположена по другую сторону от g -й грани текущей ячейки. $\mathbf{A}_{0,g}^{Eu}(\mathbf{U})$, $\mathbf{A}_{0,g}^{NS}(\mathbf{U})$, $\mathbf{A}_g^{Eu}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{A}_g^{NS}(\mathbf{U})$ — матрицы, которые вычисляются по параметрам течения на известном слое n . Вид этих матриц приведен в [205].

Интегрирование по времени производилось с помощью оригинальной (предложена А.И. Трошиным) адаптивно-неявной схемы (AIS) [206], основанной на следующих соображениях:

1. Поскольку конвективные процессы, как правило, играют определяющую роль в формировании структуры течения, их важно описывать точно. Значит, в областях, где интерес представляют нестационарные процессы, следует выдерживать «конвективное» (классическое) число Куранта $CFL^{Eu} \equiv \tau / \tau^{Eu} \sim 0.5-1$. При этом можно использовать явную схему. На неявную схему следует переходить только на дне пограничного слоя, где значение шага по времени, достаточное для описания нестационарных процессов в ядре потока, приведет к $CFL^{Eu} > 1$. В результате там могут вырасти ошибки аппроксимации, но можно надеяться, что конвективные процессы в непосредственной близости от стенки подавляются вязкостью и играют второстепенную роль по сравнению с диффузией.

2. При условии $CFL^{Eu} \sim 0.5-1$ в ядре потока диффузионные процессы будут во многих областях моделироваться с нарушением явного условия устойчивости: $CFL^{NS} \equiv \tau / \tau^{NS} > 1$. К счастью, имеются данные [60], что неявные схемы для уравнения диффузии обладают приемлемо низкой ошибкой до $CFL^{NS} \approx 120$. Поэтому достаточно плавно переключаться на неявную аппроксимацию диффузионных потоков при превышении $CFL^{NS} = 1$ для обеспечения устойчивости схемы.

В AIS для расчёта реагирующих течений шаг по времени совершается с использованием трёхстадийного метода Хойна из предыдущей главы:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \frac{1}{3}\tau^n \left[-\frac{1}{V} \sum_{g=1}^6 (\mathbf{F}_j(\mathbf{U}^n) \sigma_j)_g + \mathbf{S}_1 \right] + \\
&+ w_{Eu} \frac{1}{3} \tau^n \cdot \left[\mathbf{A}_{0,g}^{Eu}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^n) + \mathbf{A}_g^{Eu}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}_g^{(1)} - \mathbf{U}_g^n) \right] + \\
&+ w_{NS} \frac{1}{3} \tau^n \cdot \left[\mathbf{A}_{0,g}^{NS}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^n) + \mathbf{A}_g^{NS}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}_g^{(1)} - \mathbf{U}_g^n) \right], \\
\mathbf{U}^{(2)} &= \mathbf{U}^n + \frac{2}{3}\tau^n \left[-\frac{1}{V} \sum_{g=1}^6 (\mathbf{F}_j(\mathbf{U}^{(1)}) \sigma_j)_g + \mathbf{S}_2 \right] + \\
&+ w_{Eu} \frac{2}{3} \tau^n \cdot \left[\mathbf{A}_{0,g}^{Eu}(\mathbf{U}^{(1)}) \cdot (\mathbf{U}^{(2)} - \mathbf{U}^{(1)}) + \mathbf{A}_g^{Eu}(\mathbf{U}^{(1)}) \cdot (\mathbf{U}_g^{(2)} - \mathbf{U}_g^{(1)}) \right] + \\
&+ w_{NS} \frac{2}{3} \tau^n \cdot \left[\mathbf{A}_{0,g}^{NS}(\mathbf{U}^{(1)}) \cdot (\mathbf{U}^{(2)} - \mathbf{U}^{(1)}) + \mathbf{A}_g^{NS}(\mathbf{U}^{(1)}) \cdot (\mathbf{U}_g^{(2)} - \mathbf{U}_g^{(1)}) \right] \\
\mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{4}\mathbf{U}^n + \frac{3}{4}\mathbf{U}^{(1)} + \frac{3}{4}\tau^n \left[-\frac{1}{V} \sum_{g=1}^6 (\mathbf{F}_j(\mathbf{U}^{(2)}) \sigma_j)_g + \mathbf{S}_3 \right] + \\
&+ w_{Eu} \frac{3}{4} \tau^n \cdot \left[\mathbf{A}_{0,g}^{Eu}(\mathbf{U}^{(2)}) \cdot (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{(2)}) + \mathbf{A}_g^{Eu}(\mathbf{U}^{(2)}) \cdot (\mathbf{U}_g^{n+1} - \mathbf{U}_g^{(2)}) \right] + \\
&+ w_{NS} \frac{3}{4} \tau^n \cdot \left[\mathbf{A}_{0,g}^{NS}(\mathbf{U}^{(2)}) \cdot (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{(2)}) + \mathbf{A}_g^{NS}(\mathbf{U}^{(2)}) \cdot (\mathbf{U}_g^{n+1} - \mathbf{U}_g^{(2)}) \right].
\end{aligned}$$

Здесь индексы в круглых скобках указывают номер стадии процедуры Рунге–Кутты (RK), $\mathbf{U}$ — вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}_j(\mathbf{U}^{(m)})$ — потоки, которые вычисляются описанным выше способом по известному полю течения, полученному на m -м этапе процедуры RK, $\mathbf{S}_{m+1}$ — аппроксимация источников членов данной подсистемы на текущей $(m + 1)$ -й стадии процедуры RK. Также в выражение для процедуры RK входит неявное приращение конвективных потоков с весом $w_{Eu}(CFL^{Eu})$ и неявное приращение диффузионных потоков с весом $w_{NS}(CFL^{NS}, CFL^{Eu}, w_{Eu})$. Формулы для весов приведены ниже.

Разобьём проинтегрированную по объёму систему уравнений на три подсистемы:

- 1) базовую (газодинамическую) подсистему, связанную с уравнениями массы, импульса и энергии (первые 5 уравнений системы);

- 2) турбулентную подсистему, связанную с уравнениями модели турбулентности (следующие два уравнения);
- 3) химическую подсистему, связанную с уравнениями для компонентов реагирующей смеси (последние N_{sp} уравнений).

Соответственно, различные члены системы можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{base} \\ \mathbf{U}_{turb} \\ \mathbf{U}_{chem} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^{Eu} + \mathbf{F}_j^{NS} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_j)_{base}^{Eu} \\ (\mathbf{F}_j)_{turb}^{Eu} \\ (\mathbf{F}_j)_{chem}^{Eu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_j)_{base}^{NS} \\ (\mathbf{F}_j)_{turb}^{NS} \\ (\mathbf{F}_j)_{chem}^{NS} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{turb} \\ \mathbf{S}_{chem} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_T + \mathbf{S}_C, \quad \mathbf{S}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{turb} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{chem} \end{bmatrix}.$$

Для базовой подсистемы $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, для турбулентной подсистемы используется специальная трактовка источниковых членов. Как показывает опыт, матрица Якоби источниковых членов модели турбулентности SST $\partial \mathbf{S}_{turb} / \partial \mathbf{U}_{turb}$ является диагонально преобладающей. Из двух её недиагональных членов один нулевой, а другой гораздо меньше по модулю, чем диагональные члены. Соответственно, на $(m + 1)$ -ой стадии процедуры RK линеаризованную зависимость $\mathbf{S}_{turb}(\mathbf{U}_{turb})$ можно приближенно представить в виде

$$S(k) \approx S(k)^{(m)} + \lambda_1 \cdot (\rho k - \rho^{(m)} k^{(m)}),$$

$$S(\omega) \approx S(\omega)^{(m)} + \lambda_2 \cdot (\rho \omega - \rho^{(m)} \omega^{(m)}),$$

где $\lambda_1 = \partial S(k) / \partial (\rho k)$, $\lambda_2 = \partial S(\omega) / \partial (\rho \omega)$. Простой анализ устойчивости аппроксимаций источниковых членов (см., например, [176, 60]) показывает, что

при решении уравнения вида $\frac{dp}{dt} = S_0 + \lambda(p - p_0)$, $S_0 = const$, $\lambda = const$ явная

аппроксимация $\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} = S_0 + \lambda(p^n - p_0)$ при любом шаге по времени даёт

корректное решение (положительное и растущее), если $\lambda \geq 0$, а при $\lambda < 0$

устойчива лишь при выполнении условия $\tau \leq 1/|\lambda|$. Наоборот, неявная аппроксимация $\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} = S_0 + \lambda(p^{n+1} - p_0) = [S_0 + \lambda(p^n - p_0)] + \lambda(p^{n+1} - p^n)$ при любом шаге по времени даёт корректное решение (положительное и убывающее), если $\lambda \leq 0$, а при $\lambda > 0$ устойчива лишь при выполнении условия $\tau \leq 1/\lambda$. Введём условное “число Куранта” (коэффициент устойчивости) для источниковых членов: $CFL^{source} = \tau / \tau^{source}(\lambda)$, где τ — текущее значение шага по времени, а $\tau^{source}(\lambda) = \left(-\min(\lambda, 10^{-20})\right)^{-1}$ — ограничение на шаг по времени для явной аппроксимации. Можно убедиться, что взвешенная комбинация явной и неявной аппроксимаций $\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} = [S_0 + \lambda(p^n - p_0)] + w \cdot \lambda(p^{n+1} - p^n)$ при любом знаке λ и при любом шаге по времени даёт корректное решение, если выбрать вес w равным

$$w_{source}(CFL^{source}) = \max\left(0, \frac{2CFL^{source} - 1}{2CFL^{source}}\right).$$

Поэтому для источниковых членов турбулентной подсистемы используется следующая линейная локально-неявная аппроксимация:

$$\mathbf{S}_{m+1} = \begin{bmatrix} S(k)^{(m)} + w_{source}(CFL_1^{source}) \cdot \lambda_1 \cdot (\rho^{(m+1)} k^{(m+1)} - \rho^{(m)} k^{(m)}) \\ S(\omega)^{(m)} + w_{source}(CFL_2^{source}) \cdot \lambda_2 \cdot (\rho^{(m+1)} \omega^{(m+1)} - \rho^{(m)} \omega^{(m)}) \end{bmatrix},$$

где $CFL_k^{source} = \tau / \tau^{source}(\lambda_k)$.

В уравнениях химической подсистемы источники члены трактуются иначе. Эти члены содержат сильно нелинейные функции (скорости реакций), которые делают химическую подсистему *жесткой* [176]. На основании опыта, описанного в [60], для $\mathbf{S}_{chem}$ используется нелинейная локально-неявная аппроксимация 2-го порядка точности по времени. Для получения этой аппроксимации первая стадия процедуры RK выполняется по формуле

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(1)} = & \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \tau \left[-\frac{1}{V} \sum_{g=1}^6 (\mathbf{F}_j(\mathbf{U}^n) \sigma_j)_g + \mathbf{S}_T + \mathbf{S}_C(\mathbf{U}^{(1)}) \right] + \\
& + w_{Eu} \frac{1}{2} \tau \cdot \left[\mathbf{A}_{0,g}^{Eu}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^n) + \mathbf{A}_g^{Eu}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}_g^{(1)} - \mathbf{U}_g^n) \right] + \\
& + w_{NS} \frac{1}{2} \tau \cdot \left[\mathbf{A}_{0,g}^{NS}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{U}^n) + \mathbf{A}_g^{NS}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}_g^{(1)} - \mathbf{U}_g^n) \right].
\end{aligned}$$

Здесь в формулах для $\mathbf{S}_T$ подставляется $m = 0$. Значение $\mathbf{S}_C$ соответствует моменту времени $t = t^n + \tau^n / 2$. После решения этой системы полученное значение источникового члена сохраняется и используется без изменений на втором и третьем этапах процедуры RK: $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_C(\mathbf{U}^{(1)})$.

При совершении первого шага процедуры RK изначально принимается $\tau = \tau^n$. В случаях расходимости ньютоновских итераций или нефизичного решения, выполняется процедура *локально-дробных шагов* [60]: шаг по времени дробится в 2 раза, и делается два одинаковых шага аналогичных первому шагу процедуры RK с $\tau = \tau^n / 2$ без пересчёта потоков. Если и это не помогло, шаг по времени дробится еще раз, и делается четыре одинаковых шага с $\tau = \tau^n / 4$, и т.д. Когда удаётся выполнить эту процедуру без расходимости метода Ньютона и без возникновения нефизичных значений, осуществляется второй полный шаг по времени τ^n с использованием исходной процедуры RK. На всех шагах RK используется одно и то же значение $\mathbf{S}_C$, равное сумме значений химических источников, полученных на всех локально-дробных шагах.

В областях, где при заданном шаге по времени явная схема неустойчива, в AIS к явной схеме добавляются неявное приращение конвективных потоков с весом $w_{Eu}(CFL^{Eu})$ и неявное приращение диффузионных потоков с весом $w_{NS}(CFL^{NS}, CFL^{Eu}, w_{Eu})$. Добавление этих членов приводит к тому, что при вычислении неизвестное значение $\mathbf{U}^{(m+1)}$ в данной ячейке оказывается связанным с неизвестными значениями в соседних ячейках. Такая система решается с помощью блочного метода Гаусса-Зейделя [207].

Веса w_{Eu} и w_{NS} выбираются на основе следующих соображений. Если записать одношаговый аналог используемой двухстадийной процедуры RK для линейного скалярного уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, то спектральный анализ устойчивости приводит к требованию $w_{Eu} \geq \frac{CFL^{Eu} - 1}{2CFL^{Eu}}$. Если же записать такую одношаговую схему для модельного уравнения конвекции-диффузии $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то схема будет устойчива при выполнении условия $w_{NS} \geq \frac{CFL^{NS} - 1 + CFL^{Eu} \cdot (1 - 2w_{Eu})}{2CFL^{NS}}$. Основываясь на этих условиях, веса неявных приращений в AIS для нелинейной системы уравнений рассчитываются по формулам, которые обеспечивают переход к явной схеме при выполнении условий $CFL^{Eu} \leq 1$, $CFL^{Eu} + CFL^{NS} \leq 1$, а в остальных случаях включают некоторый запас (завышают вес неявной схемы):

$$w_{Eu} = \max \left\{ 0, \frac{CFL^{Eu} - 1}{CFL^{Eu}} \right\}, \quad w_{NS} = \max \left\{ 0, \frac{CFL^{NS} - 1 + \max(0, CFL^{Eu} \cdot (1 - 2w_{Eu}))}{CFL^{NS}} \right\}.$$

Таким образом, при заданном пользователем шаге по времени τ в тех ячейках, где явная схема с многошаговой процедурой RK устойчива, она и используется. В остальных ячейках (обычно это ячейки в пристеночных областях пограничных слоев, где течение развивается квазистационарно, быстро перестраиваясь под действием нестационарных процессов в остальной части течения) происходит плавный переход на неявную схему 1-го порядка точности по времени.

В [208] представлено сопоставление качества и эффективности AIS с другими методами моделирования нестационарных течений. Для этого была решена задача с нестационарным горением в канале, описанная в работе [209]. Расчёты проводились с использованием условия прилипания на стенках канала; отношение размеров ячеек расчётной сетки было порядка 400. Кроме AIS, были рассмотрены два явных метода расчёта нестационарных течений — метод

глобального шага по времени и метод дробного шага по времени [176], а также наиболее популярный в настоящее время неявный метод дуального шага по времени. Все четыре метода дали одинаковое качество численного решения. При этом расчёт по неявной схеме с дуальным шагом по времени потребовал в 43 раза меньше времени, чем расчет с глобальным шагом по времени, явная схема с дробным шагом по времени дала ускорение в 31 раз, а AIS — в 85 раз.

Следует отметить, что соотношение эффективности схем сокращается при уменьшении перепада размеров ячеек. При расчёте на сетках с перепадом размеров ячеек 10–100 (с применением пристеночных функций) обычно хорошо работает явная схема с дробным шагом по времени (при условии, что расчёт удастся хорошо распараллелить; AIS сопоставима по затратам, но распараллеливается гораздо проще). А на квазиравномерных сетках естественно выбрать самую надежную процедуру — явную схему с глобальным шагом по времени.

3.1.2 Расчётная область и граничные условия

В эксперименте [1] модельный канал длиной 1.192 м был установлен на выходе из сопла Лавалья длиной 0.111 м, разгоняющего поток до числа Маха $M \approx 2$. Входное сечение сопла Лавалья пристыковано к огневому подогревателю воздуха длиной 0.254 м, в котором для достижения высокой температуры торможения осуществляется сжигание водорода с последующим обогащением потока кислородом. Во всех проведённых в рамках диссертации расчётах течения в подогревателе (вместе с соплом Лавалья) и в экспериментальной модели рассчитываются отдельно. При этом RANS-расчёт подогревателя позволяет получить входное граничное условие для расчётов экспериментальной модели. Используется многоблочная регулярная сетка с шестигранными ячейками. Геометрии подогревателя и модели симметричны относительно плоскостей $y = 0$ и $z = 0$ (начало координат помещено в центре симметрии звукового сечения сопла Лавалья).

Перейдём к моделированию течения в подогревателе и сопле Лавалья. Геометрия и блочная структура расчётной сетки подогревателя и сопла Лавалья показана на рисунке 61. Сама расчётная сетка состоит из 97 блоков и содержит 1191680 ячеек. Входное сечение подогревателя 1 — круг радиусом 0.0525 м; на полуокружности расположено 180 ячеек сетки, по радиусу — 48 ячеек. Вдоль подогревателя форма поперечных сечений плавно изменяется от круга к прямоугольнику; сетка содержит 192 ячейки в продольном направлении. На границе между подогревателем 1 и соплом Лавалья 2 сеточные линии терпят разрыв, и параметры для расчёта потоков через грани ячеек сетки пересчитываются от подогревателя 1 к соплу Лавалья 2 при помощи интерполяции. Далее поперечные сечения имеют форму прямоугольника; ширина канала постоянна и равна 0.04 м. В поперечных сечениях сетка почти всюду равномерна и содержит 52 ячейки по высоте и 32 ячейки по боковой ширине. Кроме подогревателя 1, расчётная область включает сопло Лавалья 2 и два буферных участка 3 и 4.

Геометрия сверхзвуковой части сопла Лавалья приведена в [1]. На длине сопла Лавалья размещено 194 ячейки сетки, на буферных участках — 64 и 52 ячейки. Буферные участки 3 и 4 призваны устранить влияние выходных граничных условий на течение в выходном сечении сопла Лавалья. Это сечение закрашено серым цветом на рисунке 61 и имеет координату $x = 0.065$ м; высота канала в этом сечении равна 0.0177 м. Параметры потока в этом сечении используются как граничное условие на входе в канал. Первый буферный участок 3 — с постоянной площадью поперечного сечения и имеет длину 0.135 м, а второй (4) расширяется по высоте и имеет длину 0.2 м. На стенках участков 1-3 ставится граничное условие “закон стенки” из класса пристенных функций [210], а на стенках участка 4 — условие скольжения. На выходе параметры определяются экстраполяцией изнутри расчётной области. На входе в подогреватель задаётся постоянное по сечению полное давление $p_0=4.07$ бар и параболический профиль температуры торможения, аппроксимирующий данные

эксперимента [1]. На оси симметрии температура торможения максимальна и равна $T_0=1705$ К, а у стенок $T_0=1490$ К (стенки подогревателя охлаждались водой). Состав газа во входном сечении принимался постоянным и соответствовал равновесному составу смеси водорода, кислорода и азота в пропорции 0.019:0.396:0.585 по массе. Температура стенок принималась равной $T_w=1490$ К по всей длине подогревателя и сопла Лавалья.

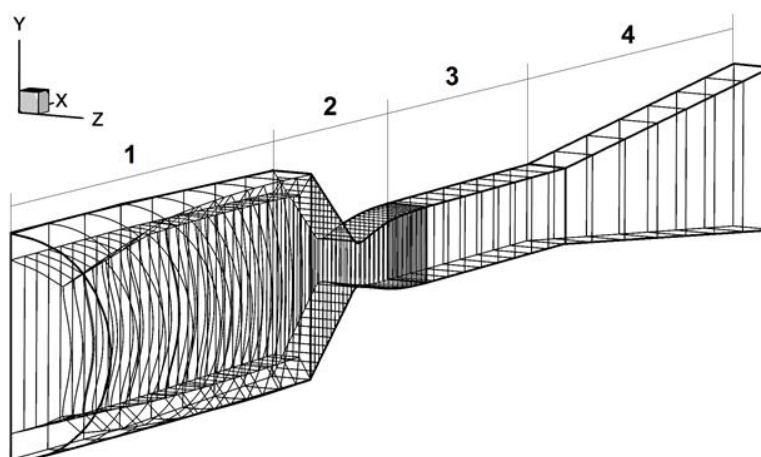


Рисунок 61 — Структура расчётной сетки для расчётов подогревателя и сопла Лавалья. Показана половина канала (справа от продольной вертикальной плоскости симметрии). Серый цвет — сечение стыковки сопла Лавалья с моделью ($x = 0.065$ м). 1 — подогреватель; 2 — сопло Лавалья; 3 — буферный участок постоянного сечения с прилипанием на стенках; 4 — расширяющийся буферный участок со скольжением на стенках

Перейдем к описанию постановки расчетов экспериментальной модели ONERA. Модель представляет собой канал прямоугольного сечения, состоящий из четырех секций постоянной ширины (рисунок 62): секции постоянного сечения 1 длиной 0.215 м, секции 2 длиной 0.3179 м с углом наклона стенок 1° , секции 3 длиной 0.3545 м с углом наклона стенок 3° и секции 4 длиной 0.3046 м с углом наклона стенок 1° . В расчетной области после секции 4 добавлен еще буферный участок 5 длиной 0.443 м с расширением по высоте, чтобы исключить влияние выходного граничного условия.

Левая (входная) граница расчётной области имела координату $x = 0.065$ м. Рассматривалась только нижняя половина канала. Топливо (водород) вдувалось

перпендикулярно потоку через отверстие диаметром 2 мм в стенке, на вертикальной плоскости симметрии канала, в сечении $x=0.2$ м (место инъекции показано стрелкой на рисунке 62). LES-область располагалась на участке $0.18 < x < 0.8$ м. Ячейки сетки в невязком ядре потока в LES-области были практически кубическими со стороной около $1.5 \cdot 10^{-4}$ м. Сетка сгущалась к твёрдым поверхностям до высоты пристенной ячейки $2 \cdot 10^{-5}$ м (анализ сходимости решения при обтекании пластины для данного размера ячейки и заданного набегающего потока представлены в следующем разделе). Слой сгущения занимал около 1.5 мм (порядка 30 ячеек поперёк пограничного слоя). Полное число ячеек сетки было близко к 92 млн (2100 в продольном, 140 в поперечном и 312 в боковом направлении соответственно). При этом поперёк отверстия инжектора было расположено 15 ячеек (рисунок 63).

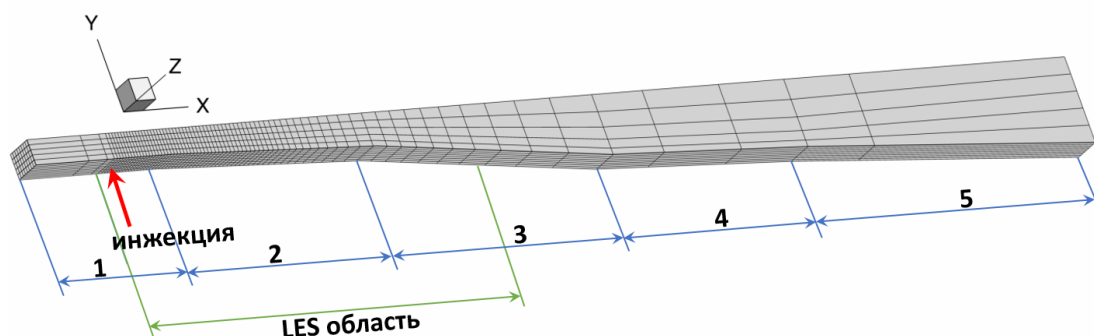


Рисунок 62 — Структура расчётной области экспериментальной модели

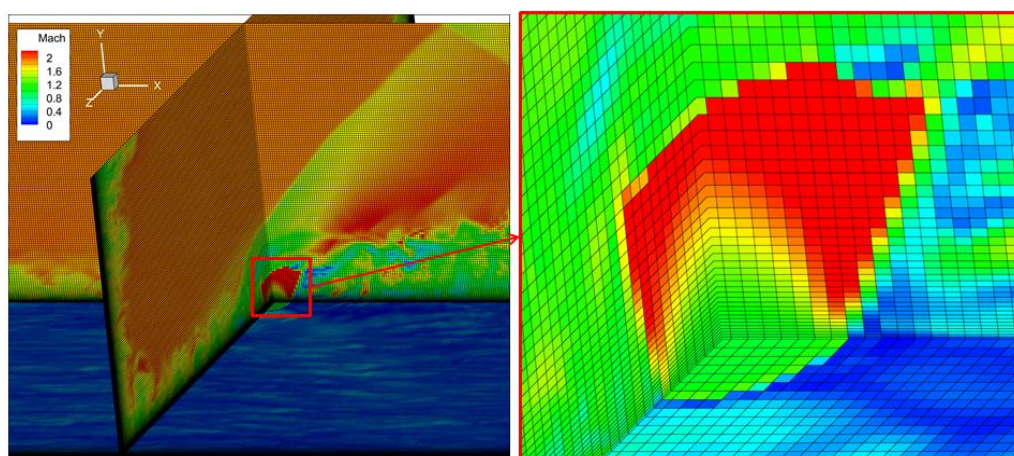


Рисунок 63 — Структура расчётной области в окрестности инъекции водорода. В трёх плоскостях изображено поле числа Маха

Входное граничное условие бралось из предварительного расчёта подогревателя. На боковых и нижней стенках секций 1-4 было установлено граничное условие прилипания с учётом шероховатости стенок (особенности реализации модели шероховатости и анализ её применимости представлены в следующем разделе настоящей главы). В секции 5 на стенках ставилось условие скольжения. На правой границе — сверхзвуковое вытекание (в своей диссертации [211] Пеллетье продемонстрировал, что воспроизведение резервуара на выходе из модельного канала не влияет на решение в области интереса), а на верхней — условие симметрии (в отличие от многих других режимов, полученных в экспериментах ONERA, выбранный можно считать симметричным относительно середины канала по высоте). В области инъекции использовалось оригинальное условие «инжектор», позволяющее не деформировать сеточные линии. Особенности и анализ реализации этого условия описаны в следующем разделе.

Рассматривался режим течения, соответствующий “Case B” из работы [5]. Расходы топлива и входящего в канал загрязненного воздуха соответствовали коэффициенту избытка топлива $\varphi=0.153$. При этом число Маха в отверстии полагалось равным 1, а температура торможения — 300 К. Базовая температура стенок модельного канала принималась равной 716 К (среднее арифметическое значение по 4 термопарам в одном из пусков), а высота шероховатости — 65 мкм (данные измерений с помощью электронного микроскопа [212]).

3.2 Граничные условия шероховатости и «инжектора».

Результаты расчетов подогревателя

3.2.1 Модель шероховатости

Основной задачей данного граничного условия является моделирование шероховатости. Стоит отметить, что речь идёт не о явном воспроизведении неровностей, а учёт их вклада в изменения параметров потока на стенке, таких как касательные напряжения τ_w и тепловой поток q_w . Изложенный ниже метод, хоть и является авторским, не претендует на исключительную оригинальность. В

пристенных автомодельных переменных профиль скорости над шероховатой поверхностью аналогичен профилю скорости над гладкой поверхностью с некоторым сдвигом Δu . Первым эту идею предложил Никурадзе [213]. В работе [214] было отмечено, что сдвиг по скорости эквивалентен увеличению вязкости на стенке. Вторая идея заключается в том, чтобы не вносить изменений в физический набор переменных (T, u, v, w, p) , а изменять лишь параметры модели турбулентности. Поскольку в данной диссертации в качестве модели турбулентности рассматривается исключительно SST, дополнительная вязкость на поверхности может быть определена следующим образом: $\mu_t|_{\text{wall}} = \rho \frac{k}{\omega}|_{\text{wall}}$.

Очевидно, что k и ω на стенке должны зависеть от уровня шероховатости. В рассматриваемом подходе вносится единственный параметр, полностью определяющий влияние шероховатости: так называемый, эквивалентный размер песчинки h_s (именно правильным заданием этого параметра должен озаботиться вычислитель, поскольку процедура определения данной величины не представляется однозначной, вопрос о её выборе описан в [215]). Сами выражения для k и ω на стенке были взяты из работы [216]:

$$\begin{cases} k_w^+ = \max(0; k_0^+), k_0^+ = \frac{1}{\sqrt{\beta^*}} \tanh \left[\left(\frac{\ln \frac{h_s^+}{30}}{\ln 10} + 1 - \tanh \frac{h_s^+}{125} \right) \tanh \frac{h_s^+}{125} \right], \\ \omega_w^+ = \frac{300}{h_s^{+2}} \left(\tanh \frac{15}{4h_s^+} \right)^{-1} + \frac{191}{h_s^+} \left(1 - \exp \left(-\frac{h_s^+}{250} \right) \right). \end{cases}$$

Здесь величины представлены в автомодельных переменных: $h_s^+ = h_s \cdot u_\tau / \nu$,

где $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, ν — кинематическая вязкость. Для определения τ_w можно

воспользоваться следующим уравнением: $\tau_w = (\mu + \mu_t) \frac{du}{dy} \Big|_{\text{wall}}$, где градиент

скорости в первом приближении выражается через параметры в пристенной

ячейке: $\left. \frac{du}{dy} \right|_{\text{wall}} \approx \frac{u_1}{d_{\text{wall}}}$, $u_1 = |\vec{V} - (\vec{V}, \vec{n})\vec{n}|$, d_{wall} — расстояние до стенки от центра ячейки. Таким образом, получается нелинейное уравнение для μ_t на стенке, которое решается методом простой итерации до тех пор, пока $\left| \frac{\mu_t^{j+1}}{\mu_t^j} - 1 \right| \geq 10^{-4}$.

Алгоритм решения следующий:

1. Задаётся начальное приближение для турбулентной вязкости по параметрам в центре пристенной ячейке: $\mu_t^0 = \rho_{\text{wall}} \cdot \frac{k_1}{\omega_1}$.
2. Вычисляется τ_w , с помощью которого определяется h_s^+ .
3. Вычисляются k_w^+ и ω_w^+ .
4. Пересчитывается μ_t .

После того, как условие сходимости оказывается удовлетворенно (оценка 10^{-4} продемонстрировала наилучшее соотношение между качеством и скоростью счёта), получившиеся на последней итерации значения k и ω используются для нахождения диффузионных потоков в ячейке. При этом, несмотря на то, что величина k на поверхности не равна нулю, градиенты кинетической энергии турбулентности по-прежнему обнуляются по следующим соображениям: если $h_s^+ \leq 5$, то шероховатость оказывается внутри вязкого подслоя, и поверхность можно считать квази-гладкой, а значит $k \rightarrow 0$; если же шероховатость попадает в логарифмическую область, то $k \approx \text{const}$. Таким образом, в обоих случаях градиент этой величины можно приравнять нулю. Также принудительно обнуляется добавка турбулентного давления.

Вышеприведённые изменения позволяют учесть вклад шероховатости в уровень трения. Однако «правильный» уровень трения не гарантирует «правильную» величину теплового потока сквозь стенку. Поскольку параметры модели турбулентности уже заняты, а основной набор переменных хотелось бы

оставить нетрунотым, разумным соображением является сделать турбулентное число Прандтля (Pr_t) переменной величиной. В работе [217] предлагается сделать Pr_t комбинацией многочлена второй степени и экспоненциальной функции, которая выходит на стандартное значение по мере удаления от поверхности. Однако данная постановка, несмотря на ряд преимуществ, предполагает задание дополнительных параметров, которые зависят от типа шероховатости и должны быть специально измерены в ходе эксперимента. Поэтому в данной реализации используется подход из работы [214], в которой остаётся только линейная зависимость от h_s :

$$Pr_t = Pr_t^\infty + C_0 \cdot \max(0, 1 - y^* / h_s^*), \quad C_0 = \frac{5.5}{1 + (h_s^* / 70)^{6.5}} + 0.6, \quad Pr_t^\infty = 0.9.$$

Здесь звёздочкой обозначается обезразмеривание на величину кинетической энергии турбулентности в пристенной ячейке: $y^* = y \cdot k_1^{1/2} / \nu$. Таким образом, Pr_t меняется в некотором слое высотой h_s .

Для проверки работоспособности модели шероховатости был выбран наиболее близкий к основной задаче тест, а именно сверхзвуковое течение над шероховатой пластиной [218]. Экспериментальная установка, изображённая на рисунке 64, состоит из сопла Лавалия и тестового канала с квадратным поперечным сечением ($6.35 \times 6.35 \text{ см}^2$). Длина канала — 66.0 см, контрольное сечение — 54.0 см. Боковые и верхняя стенка являются гладкими, а нижнюю можно менять для исследования различных типов шероховатости. Были измерены несколькими способами величины температуры торможения и полного давления потока перед соплом. Число Маха на выходе из сопла Лавалия было выдержанно равным 2.88 с точностью $\pm 1.3\%$. Таким образом, параметры набегающего потока определены однозначно. Также в выходном сечении сопла были измерены толщина ПС по скорости и числу Маха, а также толщина потерь импульса. Согласно данным Гийома Пелетье [212], учёт трёхмерных эффектов в данной задаче не приводит к качественному изменению результатов.

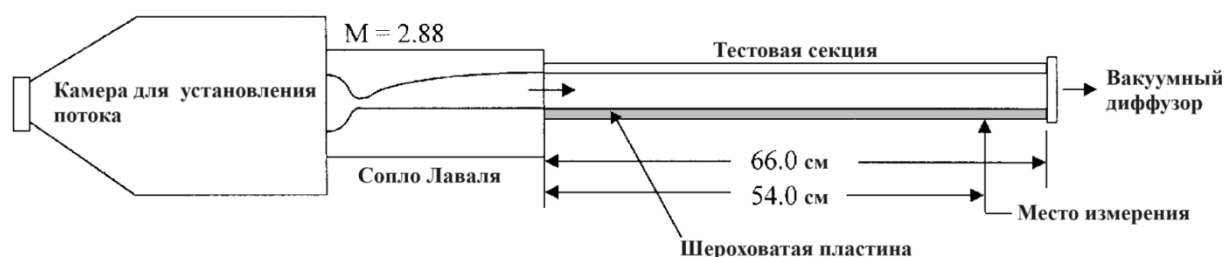


Рисунок 64 — Схема установки эксперимента [218]

К аналогичным выводам можно прийти из газодинамических рассуждений: рассмотрим, считая все стенки гладкими, влияние трёхмерных эффектов как сужение площади канала на слой толщины потерь импульса θ . Тогда связь между параметрами во входном сечении канала и контрольном определяется уравнением

расхода: $G = m \frac{q(\lambda) p_0 F}{\sqrt{T_0}} = \text{const}$, которое в рассматриваемом случае упрощается

до $q(\lambda_{\text{вх}}) F_{\text{вх}} = q(\lambda_{\text{контр}}) F_{\text{контр}}$. Учитывая, что $M_{\text{вх}} = 2.88$, можно пересчитать $\lambda_{\text{вх}}$ по

формуле: $\lambda^2 = \left(\frac{\kappa+1}{2} M^2 \right) / \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2 \right)$. Далее плотность тока определяется по

формуле: $q(\lambda) = \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cdot \lambda \cdot \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$. Величины площадей находятся с

использованием экспериментальных данных для гладкой пластины (во входном сечении $\theta = 0.2$ мм, а в контрольном $\theta = 0.8$ мм). Тогда $M_{\text{контр}} \approx 2.84$.

Таким образом, вместо расчёта канала с соплом Лавалья рассчитывалось двумерное течение над плоской шероховатой пластиной. Однако перед непосредственно шероховатым участком была расположена гладкая область, обеспечивающая толщину ПС, образованного в расширяющейся части сопла (шероховатость включалась скачкообразно). Всем трём вышеописанным толщинам одновременно удовлетворить не удалось. Для обеспечения толщины ПС по скорости необходим гладкий участок длиной 32 см, а для обеспечения соответствующей толщины потерь импульса — 19 см (данное условие делает расчётную сетку менее затратной). Оказалось, что выбор удовлетворяемого условия качественно не влияет на результат. Более того, все расчёты проводились

от начального линейного ПС толщиной 1 см. Было установлено, что в случае шероховатой стенки в отсутствии начального ПС расчёт разваливается. Для шероховатости с $h_s \cong 2$ мм необходимо задавать начальный ПС толщиной не менее 0.1 мм. Для расчётов использовалась подробная сетка с размером пристенной ячейки $\approx 10^{-8}$ м. Параметры набегающего потока представлены в таблице 4. Расчёты проводились по неявной схеме 2-го порядка с локальным шагом. Использовались покомпонентная реконструкция ван Лира [141] и метод Годунова [140] для конвективных потоков. Диффузионные потоки аппроксимировались центрально разностной схемой второго порядка. Сравнение полученных профилей скорости в контрольном сечении проводилось с экспериментом [218] и данными Пелетье [212].

Таблица 4. Параметры начального поля течения эксперимента [218]

Параметр	Величина
Давление, Па	7080
Температура, К	111.325
Продольная компонента скорости, м/с	609.18
Кинетическая энергия турбулентности, м ² /с ²	35
Характерная частота турбулентных пульсаций, с ⁻¹	1011111.111

Профили скорости представлены в автомодельных переменных $u^+(y^+)$, поэтому также были вычислены значения u_τ и сопоставлены с экспериментом (см. таблицу 5). Отличия составили не более 4%, что однозначно является положительным результатом. На рисунке 65 представлены профили из расчёта по текущей модели (с выдерживанием толщины ПС по скорости), трёхмерного расчёта Пелетье, а также данные эксперимента для типа шероховатости «36 Grit». Видно, что оба расчёта не дотягивают до уровня эксперимента на верхней

границе ПС. Это связано с тем, что в данной области в расчётах используется закон следа, который не учитывает эффекты перемежаемости. В остальных областях представленный метод демонстрирует хорошее согласование как с расчётом Пелетье, так и с экспериментальными данными. На рисунке 66 представлен также расчёт с выдерживанием θ . Видно, что различия незначительны и проявляются только на верхней границе ПС.

Таблица 5. Сравнение C_f и u_τ в контрольном сечении

Тип шероховатости	C_f Расчёт	C_f Эксперимент	u_τ , м/с Расчёт	u_τ , м/с Эксперимент
80 Grit	0.00268	0.00302	35.7	35
3D	0.00310	0.00353	38.8	38
2D	0.00319	0.00363	39.4	38
36 Grit	0.00333	0.00393	40.5	40
20 Grit	0.00346	0.00399	41.5	40

Расчёты по остальным типам шероховатости продемонстрировали аналогичные результаты. Таким образом, можно заключить, что, во-первых, представленная модель позволяет получить удовлетворительные результаты. Во-вторых, для расчёта пластины необходимо устанавливать начальный гладкий участок, на котором сформируется ПС. В-третьих, в сильно шероховатых режимах (20, 36 Grit) над шероховатой пластиной отсутствует область резких градиентов скорости, что позволяет существенно увеличить высоту пристенной ячейки.

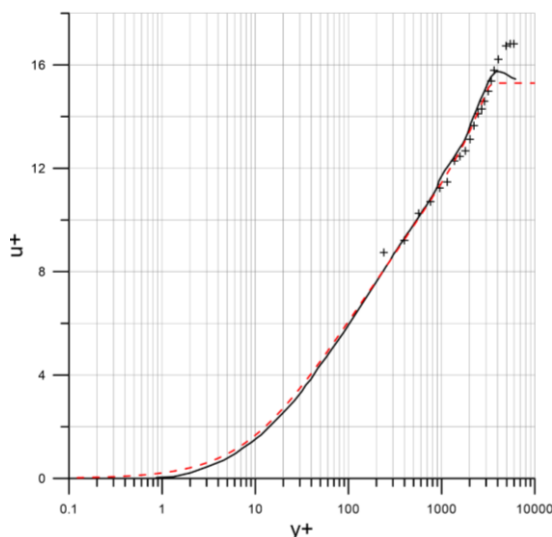


Рисунок 65 — Профиль скорости для типа шероховатости «36 Grit». «+» — эксперимент [218], чёрная сплошная — расчёт Пелетье [212], красный пунктир — расчёт по описанному выше методу с выдерживанием толщины ПС по скорости

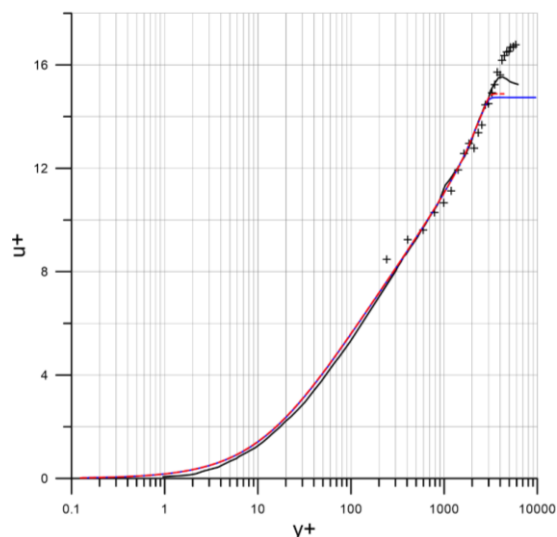


Рисунок 66 — Профиль скорости для типа шероховатости «20 Grit». Синяя сплошная — расчёт с выдерживанием толщины потери импульса на выходе из сопла. Остальные обозначения как на рисунке 65

Далее аналогичные расчёты были проведены для параметров набегающего потока соответствующих течению в канале ONERA (таблица 6). Участок гладкости был выбран равным 19 см. Расчёты проводились на наборе сеток с различным размером пристенной ячейки. Цель состояла в том, чтобы выяснить какую максимальную высоту ячейки (над шероховатой пластиной) можно использовать при заданных параметрах течения, чтобы не понизить качество моделирования. Эталонный расчёт был проведён на сетке с высотой пристенной ячейки 10^{-7} м. На рисунке 67 представлено распределение продольной компоненты скорости над пластиной. Видно, что изолинии терпят разрыв производной при переходе от гладкого участка поверхности к шероховатому. Было установлено, что скорость нарастает линейно по мере отдаления от стенки приблизительно до $4 \cdot 10^{-5}$ м (в данном эксперименте $h_s \approx 65 \cdot 10^{-6}$ м, что существенно меньше чем в предыдущем).

Таблица 6. Параметры начального поля течения эксперимента ONERA

Параметр	Величина
Давление, Па	54000
Температура, К	1100
Продольная компонента скорости, м/с	1320
Кинетическая энергия турбулентности, $\text{м}^2/\text{с}^2$	85
Характерная частота турбулентных пульсаций, с^{-1}	34000

При дальнейшем моделировании расчётная область была разделена на 2 части (см. рисунок 68): первая — блок перед пластиной и гладкий участок самой пластины. Эта часть была зафиксирована с высотой пристенной ячейки 10^{-7} м. Вторая — шероховатая часть пластины и область за пластиной. В этой части высота пристенной ячейки варьировалась: 10^{-5} , $2 \cdot 10^{-5}$, $3 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-5}$, $7 \cdot 10^{-5}$ м. Таким образом, на вход в шероховатую область течения всегда подавался один и тот же поток, что позволило избежать ошибок, связанных с неточным описанием течения над гладкой поверхностью при увеличении высоты пристенной ячейки. На самой грубой сетке помимо расчёта с граничным условием «прилипание» был проведён расчёт с ГУ «закон стенки», реализованным на основе работы [214] (все остальные сетки не удовлетворяют условию, чтобы высота первой ячейки была больше h_s). В таблице 7 представлены значения интегрального коэффициента трения для проведённых расчётов. Следует отметить, что расчёты с прилипанием на двух самых грубых сетках осциллируют, поэтому в таблице приведены для них средние значения интегрального трения. На основании полученных результатов был сделан вывод о необходимости рассмотрения сеток с высотой пристенной ячейки $2 \cdot 10^{-5}$ и $3 \cdot 10^{-5}$ м.

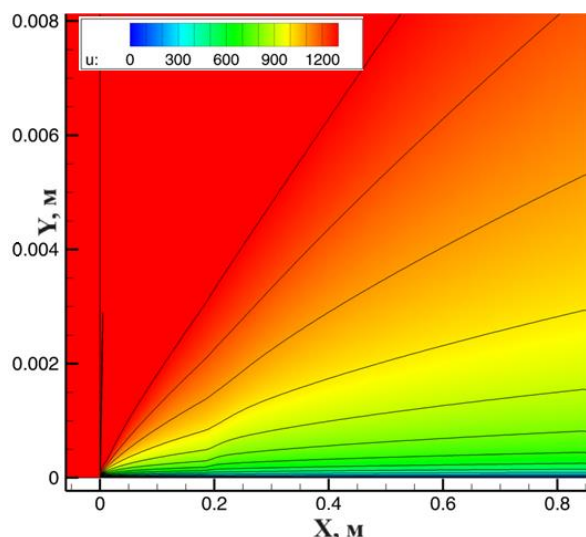


Рисунок 67 — Поле продольной компоненты скорости над пластинкой на сетке с высотой пристенной ячейки 10^{-7} м. На поле наложены изолинии с шагом 100 м/с

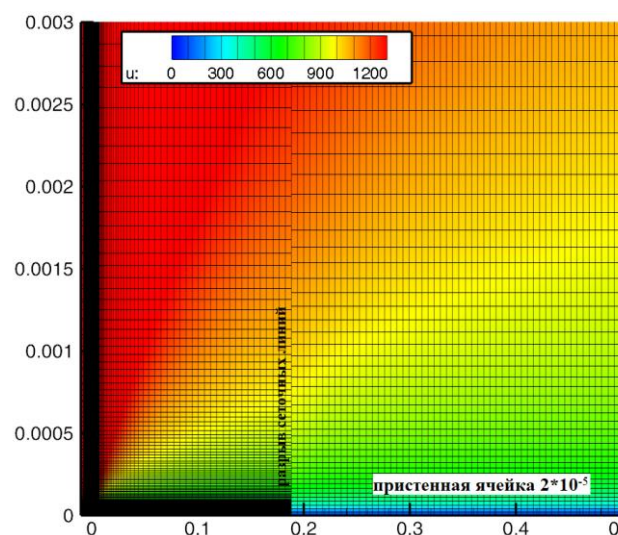


Рисунок 68 — Пример сетки в окрестности пластины с переходом от высоты пристенной ячейки 10^{-7} м к $2 \cdot 10^{-5}$ м

Таблица 7. Интегральное трение на наборе сеток

Размер пристенной ячейки	Величина интегрального коэффициента трения
10^{-7} , м	0.002456
10^{-5} , м	0.002442
$2 \cdot 10^{-5}$, м	0.002420
$3 \cdot 10^{-5}$, м	0.002399
$5 \cdot 10^{-5}$, м	0.002331
$7 \cdot 10^{-5}$, м (прилипание)	0.002267
$7 \cdot 10^{-5}$, м (закон стенки)	0.002408

На рисунке 69 представлены распределения y^+ для этих двух сеток. На отрезке от 0 до 19 см графики ожидаемо совпадают, в то время как на участке

шероховатости y^+ для сетки с высотой $2 \cdot 10^{-5}$ м меняется около 1, а для сетки с высотой первой ячейки $3 \cdot 10^{-5}$ м — около 1.5. Стоит отметить, что ошибка по интегральному значению коэффициента трения в первом случае составляет $\approx 1.5\%$, а во втором $\approx 2.3\%$. По этим причинам, а также, учитывая возможное ухудшение результатов при наличии химических реакций, для большей устойчивости было решено для всех дальнейших расчётов целевой задачи выбрать размер пристенной ячейки равным $2 \cdot 10^{-5}$ м.

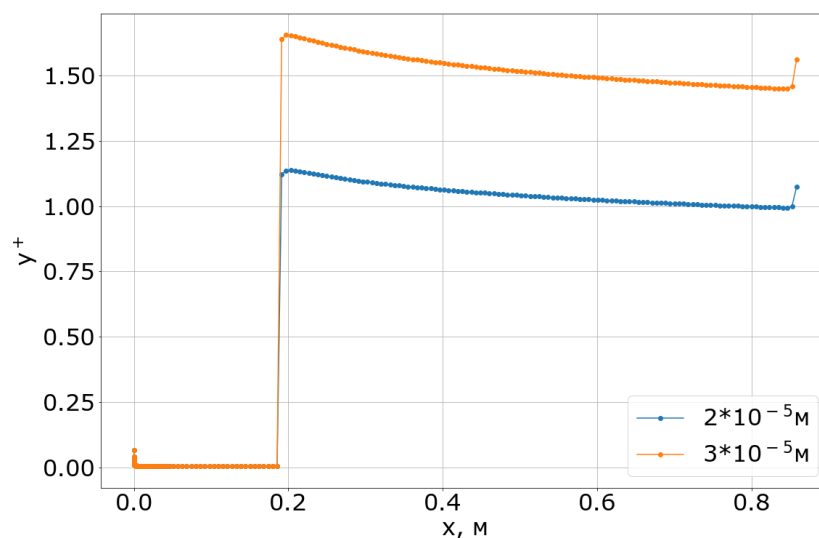


Рисунок 69 — Распределение y^+ вдоль пластины

3.2.2 Расчёты подогревателя

На рисунке 70,а показано поле температуры торможения в подогревателе, которое получается в расчётах. Профили температуры торможения в поперечных сечениях остаются почти неизменными по длине канала. Охлаждение стенок канала приводит лишь к тому, что температура торможения на оси канала падает от 1705 К на входе до 1696.5 К в сечении $x = 0.065$ м (которое совпадает со входом в модельный канал).

Расчёты подогревателя выполнены с обеими моделями химической кинетики (7 и 19 реакций из [108, 219]). Оба расчёта дали почти одинаковые поля давления, температуры, числа Маха и массовых концентраций молекул. Но поля

массовых долей радикалов существенно отличаются — см. поля массовой доли радикала OH (Y_{OH}) на рисунке 70,б (7 реакций) и рисунке 70,в (19 реакций).

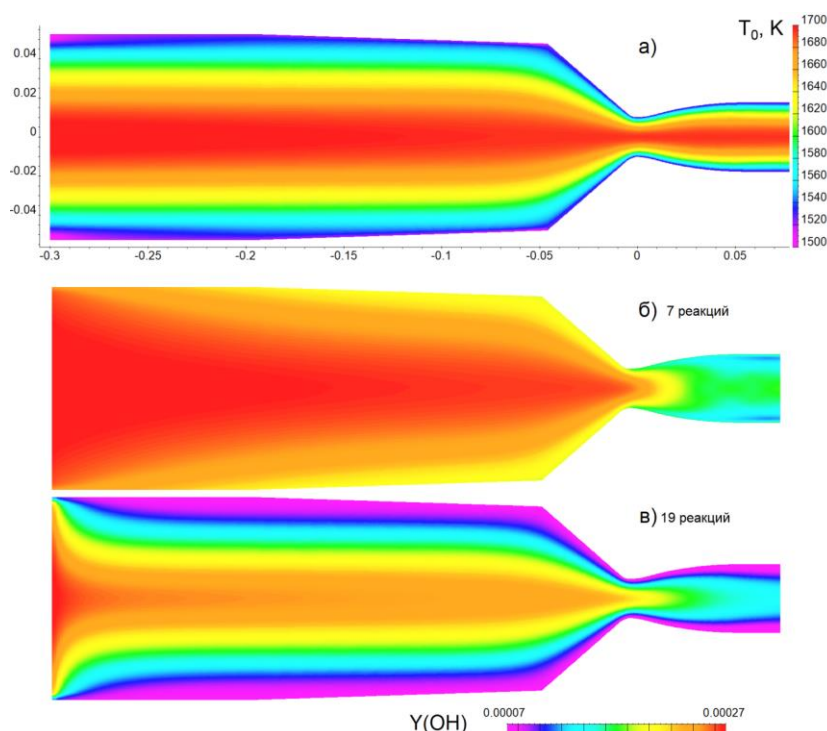


Рисунок 70 — Полученные в расчетах поля течения в подогревателе: а) поле и изолинии температуры торможения [K]; б) поле и изолинии массовой доли OH в расчете с 7 реакциями; в) поле и изолинии массовой доли OH в расчете с 19 реакциями

Полученные в этих расчётах продольные распределения Y_{OH} вдоль оси симметрии и вдоль стенок подогревателя изображены на рисунке 71. Состав газа у стенок подогревателя стремится к равновесному составу, соответствующему $p \approx 4.07$ бар, $T_w = 1495$ К. Расчёты показывают, что равновесные составы, предсказываемые моделями Яхимовского с 7 и 19 реакциями, очень близки. Но в случае модели с 19 реакциями переход к равновесию происходит быстро, а в случае модели с 7 реакциями — очень медленно, так что равновесное состояние не достигается.

Расчёты течения в подогревателе существенны для правильного описания течения в экспериментальной модели. Например, если обнулить скорости реакций в подогревателе, то расчёты экспериментального канала по модели кинетики с 19 реакциями дают поле течения, в котором горение начинается на 0.2 м ниже по

течению и попадает в секцию 3 (см. рисунок 63) с быстрым расширением канала, что существенно сокращает эффективность тепловыделения.

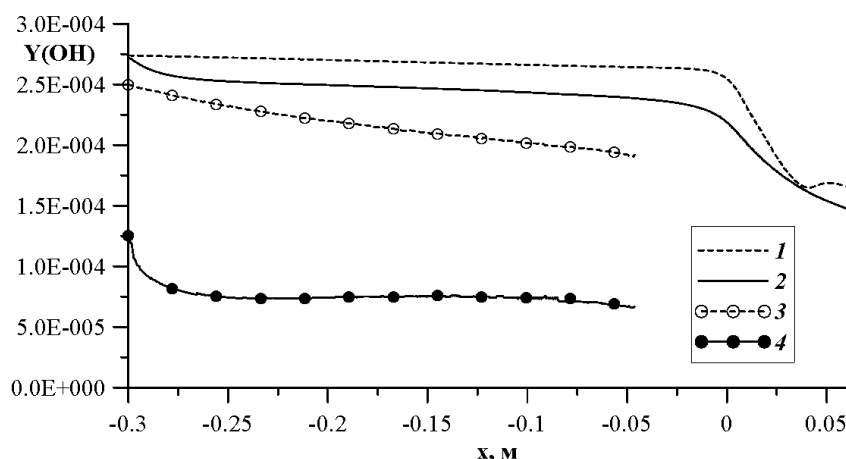


Рисунок 71 — Продольные распределения массовой доли OH, в расчетах подогревателя: 1 — 7 реакций, ось симметрии канала; 2 — 19 реакций, ось симметрии канала; 3 — 7 реакций, стенка подогревателя; 4 — 19 реакций, стенка подогревателя

На основе полученных результатов для дальнейших расчётов экспериментальной модели ONERA на входе в канал будет использоваться поле, полученное в расчёте подогревателя с 19 реакциями. В случае расчета экспериментальной модели по кинетике с 7 реакциями значения массовых долей семи компонент берутся из расчета подогревателя с 19 реакциями, а потом перенормировываются, чтобы их сумма равнялась единице.

3.2.3 Граничное условие «инжектор»

Для упрощения построения сетки было реализовано граничное условие (ГУ) «инжектор», которое позволяет не нарушать равномерности и однородности численной сетки в области струи. Его идея состоит в следующем. Рассмотрим грань ячейки, прилегающую к границе расчётной области. Введём локальную систему координат (ξ, η) вдоль рёбер этой грани (рисунок 72), и разобьём каждое из рёбер на N одинаковых частей, тогда для каждой ячейки мы получим $N_{\text{total}} = (N + 1)^2$ точек. Зная уравнение поверхности втекания топлива, можно

определить, какие из точек окажутся внутри (N_{jet}), а какие снаружи ($N_{\text{solid}} = N_{\text{total}} - N_{\text{jet}}$) области втекания для каждой ячейки.

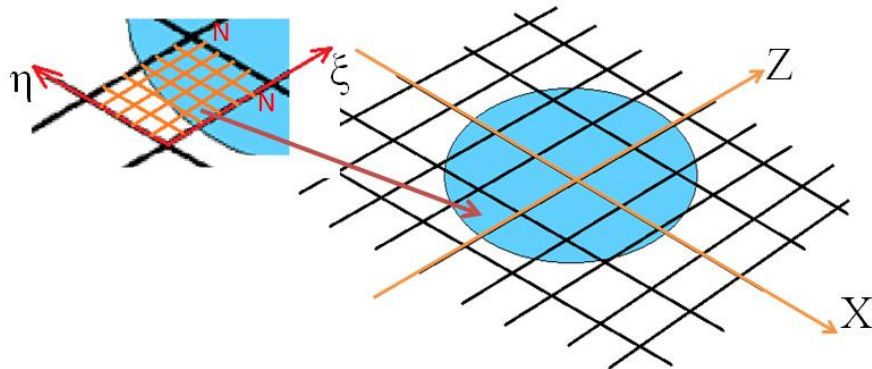


Рисунок 72 — Схематическое представление ГУ «инжектор»

Далее на всех гранях ячеек, находящихся на границе расчётной области, потоки параметров газа (F) определяются как линейная комбинация потоков, вычисленных по условию «втекание» (F_{jet}) и «твёрдая стенка» (F_{solid}), с весовыми коэффициентами, пропорциональными количеству точек, попавших внутрь поверхности втекания:

$$F = \alpha F_{\text{solid}} + (1 - \alpha) F_{\text{jet}}, \quad \alpha = \frac{N_{\text{solid}}}{N_{\text{total}}}.$$

Очевидно, что $\lim_{N \rightarrow \infty} (N_{\text{solid}} / N_{\text{total}}) = S_{\text{solid}} / S_{\text{face}}$, где S_{face} — площадь грани ячейки, а S_{solid} — её часть, не занятая поверхностью втекания. Как видно из приведённой формулы, коэффициент α равен 1, если все точки грани находятся за пределами области втекания, и равен 0, если все точки оказываются внутри. Таким образом, можно решать задачи с инжекцией без адаптации сеточных линий к геометрии отверстия.

В качестве тестовой задачи был выбран эксперимент Бен-Якар и др. [49], [220]. Рассматривается поперечная инжекция струи водорода в сверхзвуковой поток воздуха с последующим самовоспламенением. Плоская пластина с круглым отверстием диаметра $d_j = 2$ мм установлена в потоке воздуха с числом Маха 3.38. Из отверстия вертикально инжектируется звуковой поток водорода. Отношение

величины потока импульса струи к потоку импульса набегающего потока $J=1.4$. Отверстие истечения располагается на расстоянии $25d_j$ вниз по потоку от передней кромки, а толщина ламинарного пограничного слоя δ перед отверстием составляет примерно $0.38d_j$. Сводка параметров набегающего потока и инжектируемой звуковой струи в выходном сечении дана в таблице 8. Структура течения изображена на рисунке 73.

Таблица 8 — Параметры потока воздуха и выдуваемой струи водорода

Параметры набегающего сверхзвукового потока		Параметры струи инжектируемого водорода	
Число Маха M_∞	3.38 ± 0.04	Число Маха M_j	1
Статическая температура T_∞ [K]	1290	Статическая температура T_j [K]	246
Статическое давление p_∞ [кПа]	32.4	Статическое давление p_j [кПа]	490
Расстояние от передней кромки пластины до центра отверстия l / d_j	25	Диаметр инжектора d_j [мм]	2
Толщина пограничного слоя в месте инжекции, δ / d_j	0.38	Отношение потоков импульса в струе и набегающего потока J	1.4
Число Рейнольдса Re_∞ по l	2.2×10^5	Число Рейнольдса Re_j по d_j	1.5×10^5

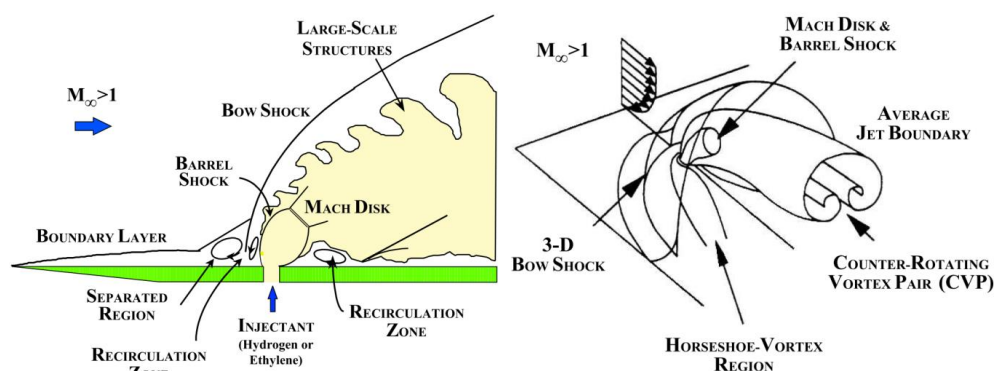


Рисунок 73 — Структура течения в задаче об инжекции водорода (рисунки взяты из [49])

Данный тест близок к целевой задаче главы. Отличие состоит в том, что рассматривается не канал, а только нижняя пластина. Таким образом, помимо тестирования работы ГУ «инжектор» можно проанализировать качество работы выбранного вихререзающего метода.

В RANS-постановке задачи расчётная область состоит из 2 блоков (основного и вспомогательного), каждый из которых представляет собой прямоугольный параллелепипед (на рисунке 74 представлен вид сбоку). Сетка сгущается к нижней поверхности, на которой установлено граничное условие теплоизолированной стенки с прилипанием и граничное условие «инжектор», а также короткий буферный участок скольжения вблизи входной границы. Такие же сгущение сетки и схема расчетной области используются для воспроизведения расчётов, проведённых в работе [87]. Высота первой ячейки над пластиной в обеих сетках равна $8 \cdot 10^{-8}$ м. Центру вдуваемой струи соответствует точка с координатами (0; 0; 0) в обоих тестах. Также присутствует сгущение в продольном и боковом направлениях к месту выдува струи.

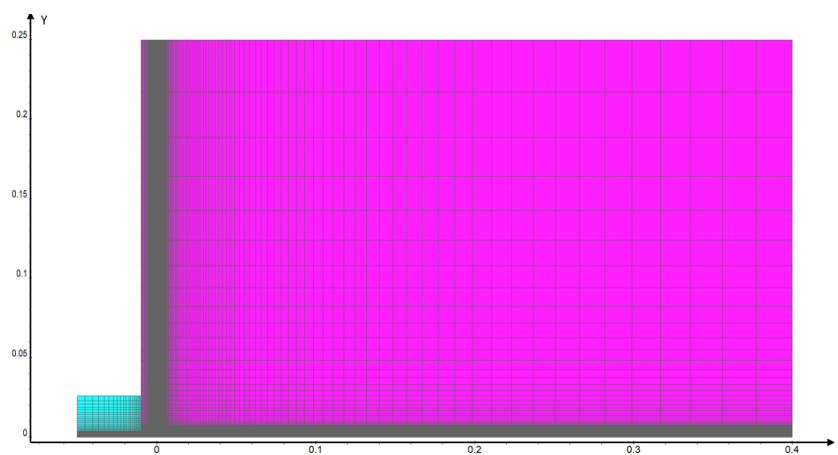


Рисунок 74 — Расчётная область для тестов в RANS постановке (вид сбоку)

На рисунке 75 изображены расчётные сетки для обоих тестов: с использованием граничного условия «инжектор» — справа («правая» сетка), и без его использования — слева («левая» сетка). Принципиальное отличие сетки для нового граничного условия заключается в отсутствии искривлённых сеточных линий в области расположения струи. Количество ячеек в сетке, расчёт на которой проводился с использованием нового ГУ, равно 886090, тогда как во второй сетке их количество равно 799986. Вдоль диаметра отверстия d_j было расположено 20 ячеек в «правой» сетке, а в «левой» — 22 ячейки.

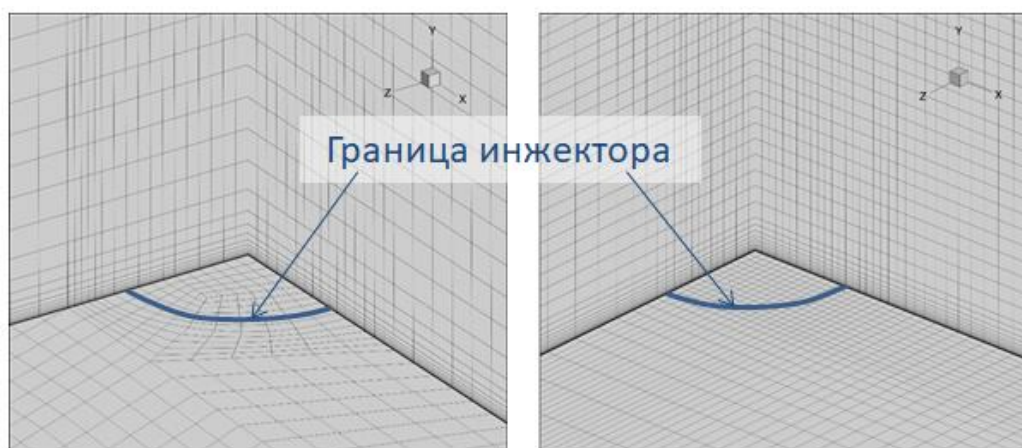


Рисунок 75 — Сравнение структур расчётной области

Для более корректного сопоставления с данными работы [87] использовалась та же модель турбулентности $q-\omega$ [60], учитывающая химические реакции по упрощённой кинетике ONERA [221]. Граничные значения параметров представлены в таблице 9 (остальные как в таблице 8).

Таблица 9. Граничные параметры потоков

Набегающий сверхзвуковой поток		Втекающий поток	
Параметр турбулентности q [м/с]	15	Параметр турбулентности q [м/с]	0.02264
Параметр турбулентности ω [1/с]	200	Параметр турбулентности ω [1/с]	2000
Концентрация кислорода Y_{O_2}	0.2346	Концентрация водорода Y_{H_2}	1
Концентрация азота Y_{N_2}	0.7654		

Согласно экспериментальным данным, ПС перед инжектором был ламинарным. Этот эффект был воспроизведен в расчетах благодаря выбору параметров турбулентности в набегающем потоке.

На рисунке 76 изображены поля концентраций в сечении, проходящем через середину струи в плоскости XY. Вертикальная ось является Y-координатной. Единицы измерения координат — метры. На цветовой шкале изображена концентрация водорода, которая изменяется от 0 (розовый цвет) до 1 (красный цвет). Качественно поля похожи. Можно обратить внимание на различия концентрации на внешней границе выдуваемой струи.

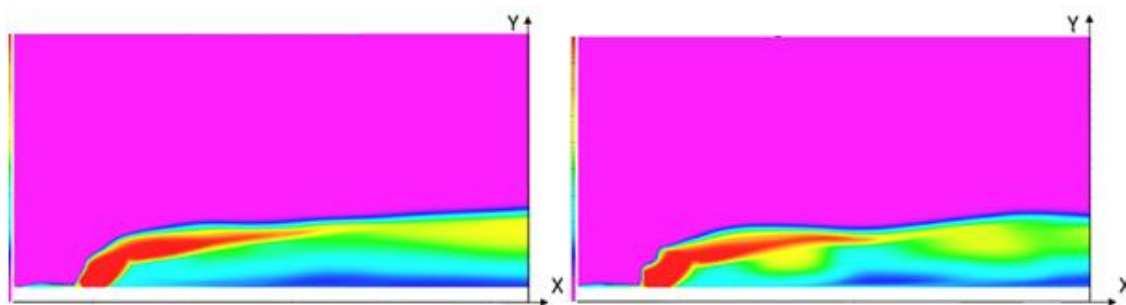


Рисунок 76 — Поля концентраций водорода в области выдуваемой струи.
Слева — с ГУ «инжектор», справа — без ГУ «инжектор»

Различия в расчётах можно продемонстрировать по интегральному коэффициенту сопротивления, связанного с трением. На рисунке 77 представлены графики зависимости данного коэффициента от номера итерации. Как видно из графиков, расчёт с ГУ «инжектор» колеблется около значения 0.003035, а значения коэффициента сопротивления расчёта без ГУ «инжектор» продолжает расти, тем не менее, следует ожидать, что оно не выйдет за значение 0.0031. Таким образом, разница значений данного коэффициента между двумя расчётами будет менее 2.3%.

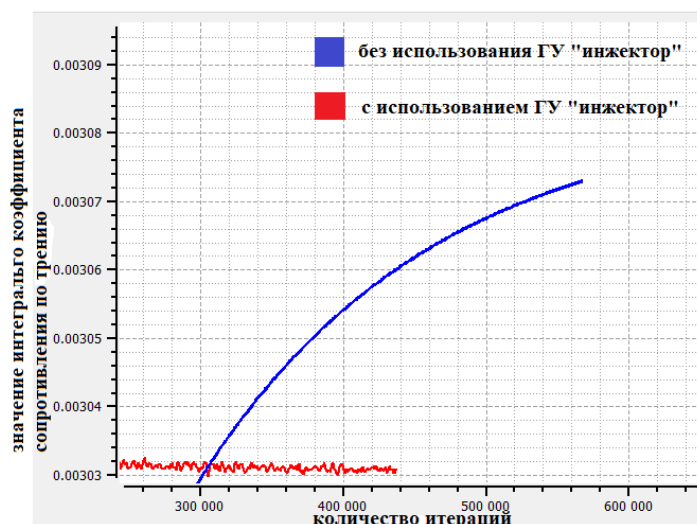


Рисунок 77 — Сходимость коэффициента сопротивления, связанного с трением

Для более детального анализа были построены по обоим расчётам графики концентрации водорода в зависимости от высоты над струёй в различных сечениях продольной координаты (рисунок 78), а также в сечении $x = 4.5d_j$; графики температуры, давления, концентрации водорода и ОН (рисунок 79).

Стоит отметить, что отличия не являются кардинальными. Для концентрации водорода в большинстве случаев наблюдается сдвиг по величине. Графики давлений и температуры схожи всюду, за исключением узкого начального участка от 0 до $2d_j$. Аналогичное суждение можно сделать относительно концентрации ОН. Полученные данные качественно похожи на результаты, приведённые в статье Ширяевой [87].

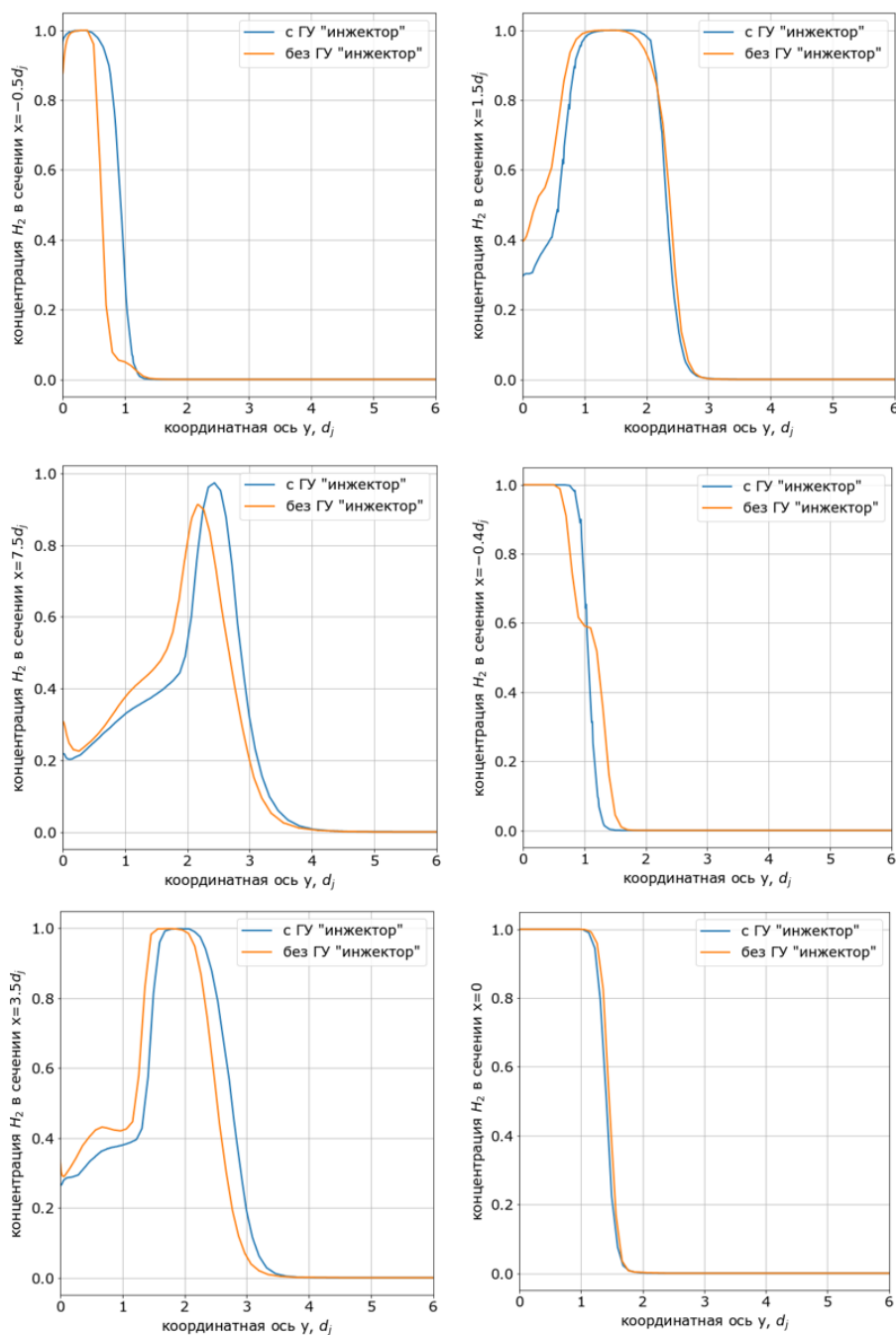


Рисунок 78 — Графики концентрации водорода в различных сечениях

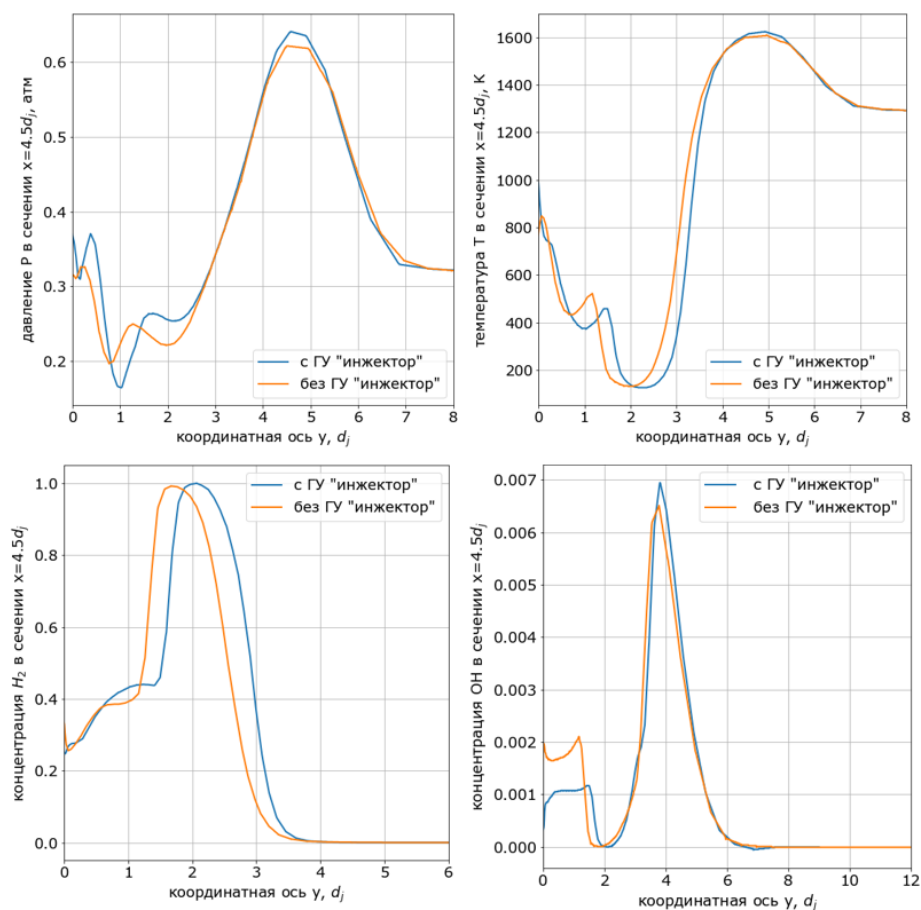


Рисунок 79 — Графики давления, температуры и концентраций в сечении $x = 4.5d_j$

Одним из ключевых параметров в данном тесте является глубина проникновения струи, которая оценивается изолинией, соответствующей 1% концентрации водорода. Данная величина была посчитана в сечении $x = 7.5d_j$, и её значение оказалось равным $3.82d_j$ для расчёта с явным выделением инжектора сеткой и равным $3.96d_j$ в случае использования ГУ «инжектор». В работе Ven-Yakar [49] этой величине соответствует значение $5.3d_j$, в работе [87] — $3.9d_j$.

Также в обоих тестах был найден расход водорода через отверстие инжектора. Вычислялись интегралы потока массы по нормали к инжектору по его площади. Было установлено, что расход газа в тесте без использования ГУ «инжектор» больше на 2.26% чем в случае с использованием данного ГУ.

Перейдём теперь к вихреразрешающим расчётам, которые проводились с использованием вышеописанной модели SST-IDDES. Расчётная область имела

вид прямоугольного параллелепипеда, см. рисунок 80. В области перед зоной взаимодействия струи водорода с основным течением источники члены модели турбулентности были отключены, при этом на пластине возник ламинарный пограничный слой, что соответствует эксперименту. Ниже по потоку источники члены включались, и возникал турбулентный пограничный слой, моделируемый с помощью граничного условия «Закон стенки» [60]. Температура пластины была взята равной 288 К, что соответствует условиям эксперимента в импульсной трубе, где твердые поверхности не успевают прогреться за время измерений.

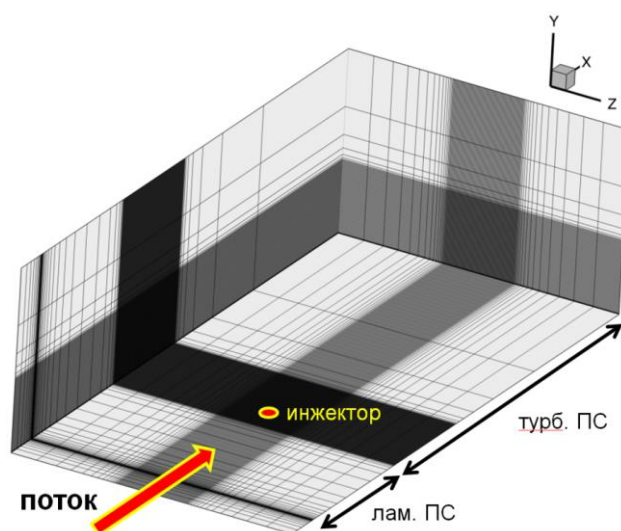


Рисунок 80 — Схема расчетной области в задаче об инжекции водорода

Расчётная сетка в этой задаче прямоугольная и содержит 22 миллиона ячеек (рисунок 81). Область интереса с постоянным шагом сетки простирается на 10 калибров инжектора вниз по потоку от места его расположения. Для моделирования химических реакций использовалась кинетика ONERA [221].

Поскольку данная задача является менее ресурсоёмкой, чем основная (22 млн. ячеек против 92 млн.), было решено на её примере сопоставить две аппроксимации конвективных потоков: «чистую» противопоточную схему WENO5 и гибридную (WENO5+центральная разность), основанную на анализе из главы 2. Схема без гибридизации далее будет называться «базовой». Все остальные численные настройки были одинаковы. Течение устанавливалось за

период времени $T_{\text{est}} = 100d_j / U_j$, где $U_j \approx 1250$ м/с – скорость потока водорода на срезе сопла. После этого статистика собиралась в течение $T_{\text{coll}} = 200d_j / U_j$.

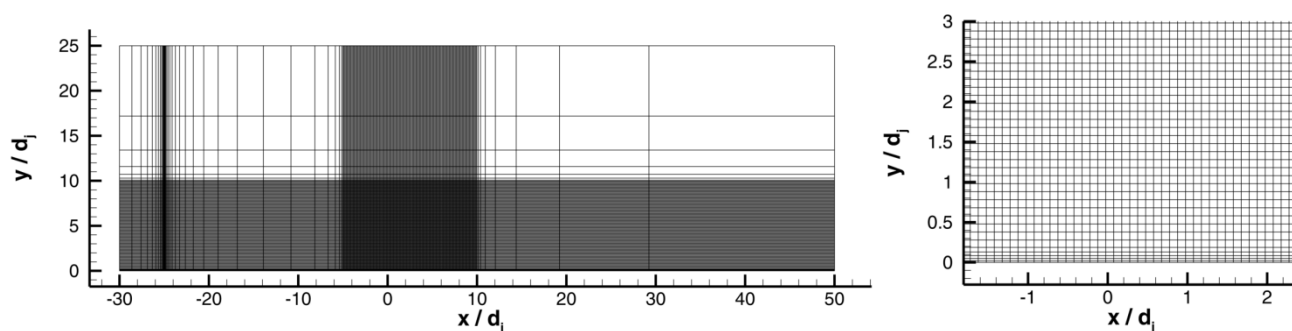


Рисунок 81 — Сетка в плоскости xu и область инжекции (показан каждый второй узел)

На рисунке 82 показано сравнение мгновенного поля течения (статическая температура) со шпирен-фотографией из эксперимента. Видно согласование по структуре течения и характерному размеру крупных вихрей на наветренной стороне слоя смешения. Гибридная схема позволяет разрешить более мелкомасштабные вихревые структуры. Также заметно сокращение длины отрывной зоны перед инжектором, которое будет проанализировано ниже.

На рисунке 83 изображены расчётные и экспериментальные поля концентрации радикала OH . И в эксперименте, и в расчёте наблюдается активное горение на наветренной стороне слоя смешения, в то время как на его подветренной стороне горение почти не идёт. В отрыве перед областью инжекции в эксперименте интенсивность горения невысока, а в расчёте и вовсе почти равна нулю. При сравнении базовой схемы с гибридной, последняя демонстрирует решение с более мелкими искривлениями поверхности горения.

Размеры отрывной зоны перед инжектором были определены по осреднённым полям течения. Как видно на рисунке 84, длина отрыва в расчёте по базовой схеме составляет 5.5 калибров инжектора, в то время как в эксперименте — около 2. Анализ проблемы выявил недостаточную турбулизацию течения в начале отрывной зоны, что приводит к частично ламинаризованному отрыву завышенного размера (поведение поля k показано на рисунке 85).

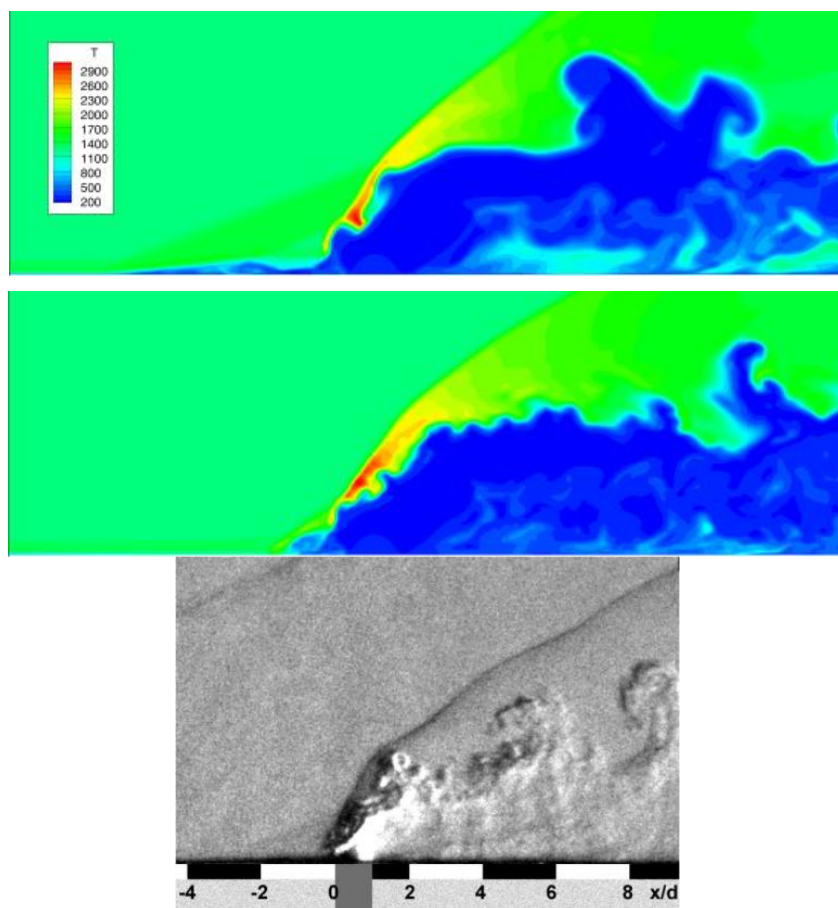


Рисунок 82 — Сравнение мгновенных полей температуры со шпиреном из эксперимента (снизу): базовая схема — сверху, гибридная — центр

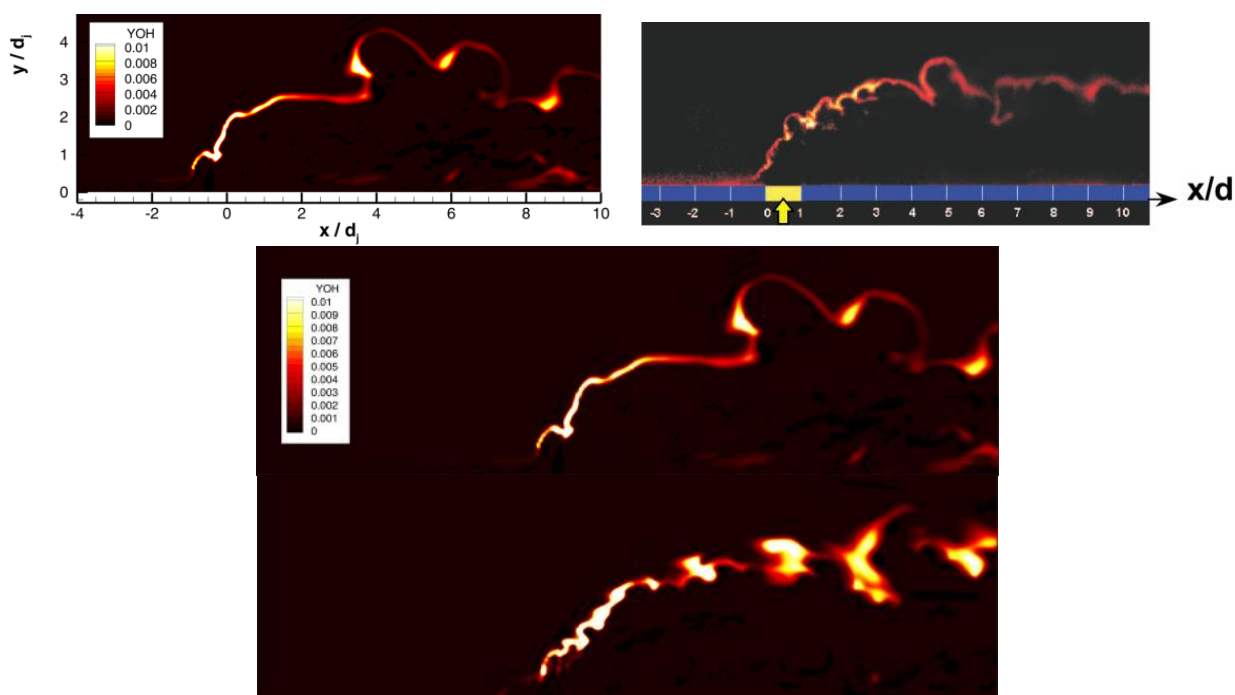


Рисунок 83 — Сравнение мгновенных полей концентрации радикала ОН. Сверху — базовая схема (слева) и эксперимент (справа); центр — базовая схема; снизу — гибридная в окрестности инъекции

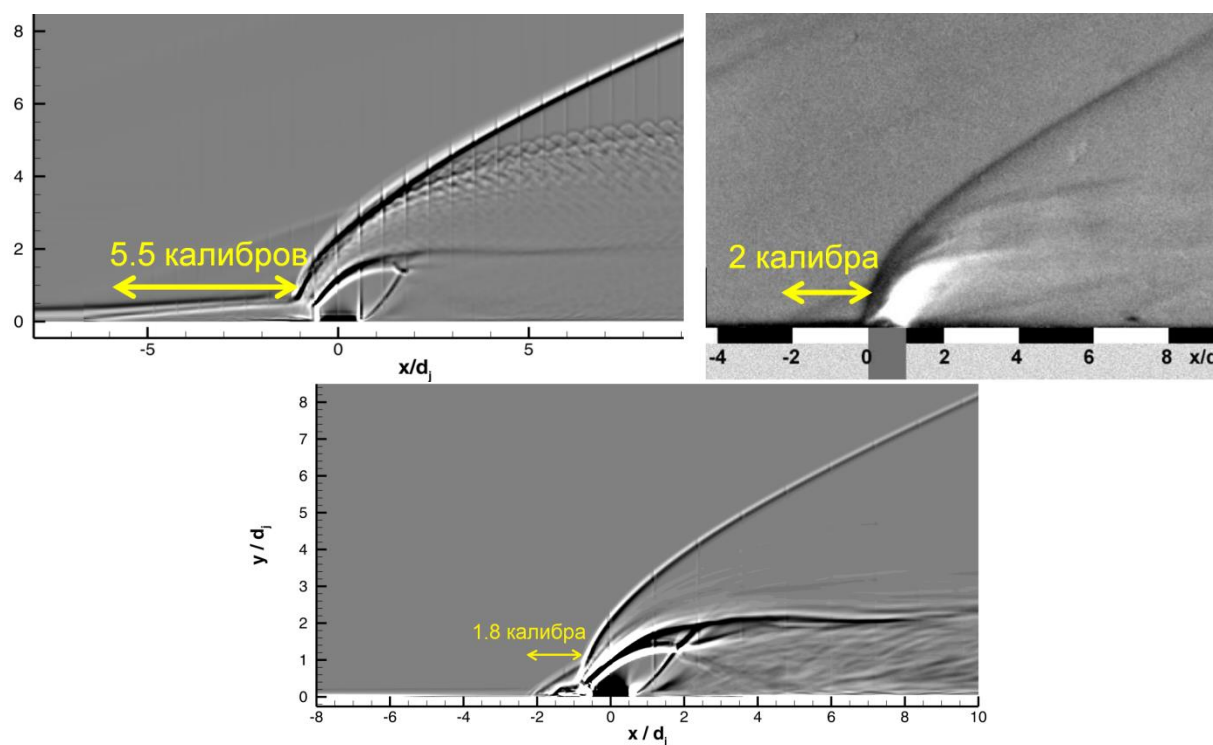


Рисунок 84 — Анализ длины отрывной зоны по полю величины градиента плотности: сверху — базовая схема (слева) и эксперимент (справа), снизу — гибридная

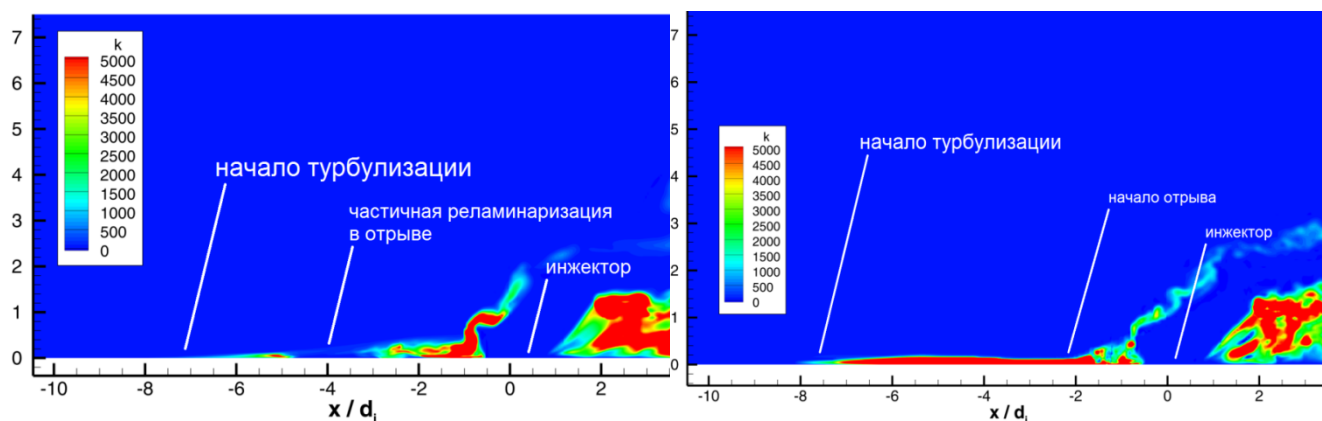


Рисунок 85 — Поле k в окрестности отрывной зоны. Расчёт по базовой схеме слева и по гибридной справа

В случае гибридной схемы оказалось, что длина отрывной зоны, найденная по осреднённому полю течения (рисунок 84 снизу), почти совпадает с экспериментальной. Это связано с тем, что в расчёте по гибридной схеме турбулизация отрыва более интенсивная. Элементы схемы повышенного порядка точности порождают большие градиенты скорости, отвечающие за производство k , в результате чего k не испытывает провала в точке отрыва (рисунок 85 справа).

Также проведена оценка глубины проникновения струи водорода в основной поток. В таблице 10 приведены значения поперечной координаты (отсчёт от поверхности пластины), на которой обнаруживается массовая доля водорода 0.01 в сечении $x/d_j = 7.5$. По сравнению с RANS-расчётом [87] и DES-расчётом [85], в настоящих расчётах получено более близкое соответствие экспериментальным данным, причём ошибка имеет величину менее 10%.

Таблица 10 — Размер отрыва перед струей и глубина проникновения струи водорода в сечении $x/d_j = 7.5$

Данные	Размер отрыва перед струей, L_{omp} / d_j	Глубина проникновения, y / d_j
Эксперимент	2.0	5.3
RANS [86]	—	3.9
DES [84]	—	4.3
SST-IDDES-расчёт по базовой схеме (WENO5)	5.5	5.0
SST-IDDES-расчёт по гибридной схеме (WENO5+CD4)	1.8	5.0

Полученные результаты позволяют заключить, что, во-первых, граничное условие «инжектор» работает корректно; во-вторых, исследованный в главе 2 гибридный численный метод позволяет более корректно описать отрыв перед инжекцией.

3.3 Обзор проведённых расчётов экспериментальной установки ONERA

Описанные в разделе 3.2 расчеты, вместе с тестовыми расчетами из главы 2, завершают тестирование выбранного вихреразрешающего метода. Далее будет описано применение этого метода к описанию одного режима течения в канале экспериментальной модели ONERA.

В первой серии расчётов (раздел 3.4) проверялась адекватность физико-математической модели и численного метода для моделирования эксперимента

ONERA. Эта серия началась с попытки вихреразрешающего расчета, в которой использовалось граничное условие “закон стенки” для уменьшения числа узлов сетки. В такой постановке были сопоставлены расчеты с гладкими и шероховатыми стенками, которые подтвердили существенное влияние шероховатости. Однако полученные распределения давления существенно отличались от экспериментальных. Поэтому была выполнена серия RANS-расчетов с изменением различных настроек расчетной модели. Был совершен переход к граничному условию прилипания (с соответствующим изменением расчетной сетки). Продемонстрировано влияние теплообмена на стенках канала, перехода к схеме 1-го порядка аппроксимации и других настроек модели. Сопоставлены теневая фотография из эксперимента и рассчитанное поле течения в окрестности инжекции. Оказалось, что наиболее сильное влияние на структуру течения оказывают шероховатость и теплообмен на стенках канала.

В эксперименте была установлена средняя высота шероховатости стенок модели, а измерить температуру стенок не удалось. Поэтому во второй серии расчетов (раздел 3.5) высота шероховатости фиксировалась, а значение температуры стенок подбиралось так, чтобы получить такое же положение пика давления, как в эксперименте. Подбор температуры стенок был осуществлен в серии RANS-расчетов. После этого был проведён IDDES-расчёт с этим значением температуры. В расчете была достигнута стабилизация горения за счёт взаимодействия ударно-волновой структуры и пограничного слоя. Данный процесс носит квазипериодический характер. При этом в течении реализовывалось локальное частичное заклинивание канала. Аналогичный процесс присутствовал в исходном эксперименте, но с другими амплитудами и частотами. Были отмечены и другие расхождения с экспериментом. Поэтому с помощью решения одномерного уравнения теплообмена был проведён анализ возможной температуры стенок, и было установлено, что выбранная температура не могла быть достигнута в ходе эксперимента.

Поэтому в третьей серии расчетов (раздел 3.6) была зафиксирована температура стенок, которая, согласно оценкам, могла быть реализована в эксперименте. Сначала в RANS-расчетах были рассмотрены другие возможные физические факторы, не учтенные ранее в математической модели: вторичное течение в углах канала, наличие оптических стёкол в установке. Также варьировалась шероховатость стенок, так как в последнее время исследователи склонны считать ее настроечным параметром, который не обязательно должен совпадать с характерной высотой реальной шероховатости. Далее был выполнен последний IDDES-расчёт, в котором были учтены все рассмотренные факторы, и дополнительно использовался генератор пульсаций в пограничном слое вверх по потоку от инжекции (в отличие от предыдущих IDDES-расчетов, в которых на входе задавалось стационарное поле из RANS-расчета, и разрешенная турбулентность возникала лишь в струе инжектируемого топлива).

В разделе 3.7 подводятся итоги по влиянию всех физических факторов, рассмотренных в диссертации. В качестве параметров сравнения выступают продольное распределение давления и форма центрального отрыва.

В разделе 3.8 анализируется механизм стабилизации горения, установленный в IDDES-расчёте второй серии, поскольку именно в нём удалось воспроизвести квазипериодическое изменение структуры течения, наиболее близкое к наблюдаемому в эксперименте.

3.4 Первая серия расчётов целевой задачи

Результаты данного раздела опубликованы в [200]. Поскольку в [199] было показано, что реакции с участием пероксидов важны для описания течения в подогревателе, но слабо влияют на структуру течения в модельном канале, в этой серии использовалась кинетическая схема Яхимовского [108] с 7 реакциями между компонентами H , O , OH , H_2O , O_2 , H_2 при участии инертного N_2 . При этом поле течения на входе в канал бралось из расчетов подогревателя с учетом реакций с участием пероксидов. Взаимодействие турбулентности с горением, как

и везде далее, не учитывалось. Для аппроксимации конвективных членов применялась ранее представленная гибридная схема. В качестве временного оператора использовалась явная схема Рунге-Кутты 2-го порядка аппроксимации (схема Эйлера с центральной точкой). Всё остальное как в разделе 3.1. Сетка для данных расчётов была «облегчена»: LES-область была ограничена участком $0.175\text{ м} < x < 0.5\text{ м}$. Ячейки сетки в области инъекции были практически кубическими со стороной около $1.5 \cdot 10^{-4}$ м. Всего ячеек в модельном канале оказалось порядка 76 млн.. Расчёты проводились на суперкомпьютере Вычислительного центра РФЯЦ ВНИИЭФ [222]. В качестве начального поля использовалось стационарное поле течения, полученное в RANS-расчёте на базе модели турбулентности SST на той же расчётной сетке. Генератор синтетической турбулентности (STG) не использовался. В этом случае подход IDDES приводит к тому, что вверх по потоку от струй водорода поток описывается в RANS-модели. Разрешённая расчётом турбулентность генерируется струей водорода и охватывает всю область влияния струи, включая внешние области пограничного слоя, а пристенная часть пограничного слоя в этой области моделируется в URANS-модели (на базе нестационарных уравнений Рейнольдса). Для наглядности основные физические факторы сведены в таблицу 11.

Таблица 11 — Физические факторы в первой серии расчётов

Кинетика в канале	h_s , мкм	Модель стёкол	Модель турбулентности	STG на входе в канал	Температура стенок
7 реакций	варьировалась	нет	линейная	нет	°K

Для перечисленных выше параметров течения были выполнены IDDES-расчёты в приближении гладких стенок и в приближении шероховатых стенок с характерной высотой шероховатости $h_s = 120$ мкм (базовый IDDES-расчёт). Данное значение почти в 2 раза больше рекомендованного в [5] значения $h_s = 65$ мкм. Такой выбор был связан с тем, что тестовые расчёты шероховатой пластины с пристенной функцией [214] дали заниженную величину коэффициента трения по сравнению с экспериментом.

На рисунке 86 сравниваются мгновенные поля продольной компоненты скорости в вертикальной плоскости симметрии канала, полученные с гладкими и шероховатыми стенками (здесь применялся закон стенки для шероховатости [214]). Видно, что “включение” шероховатости приводит к увеличению толщины пограничного слоя, в котором вниз по потоку от инжектируемой струи появляются зоны с околонулевой скоростью. Там и наблюдается тепловыделение, тогда как в случае с гладкими стенками это происходит существенно ниже по течению. Над зонами околонулевой скорости, в узкой части невязкого ядра потока, в течение некоторой части периода наблюдения происходит запирание (достигается число Маха $M = 1$).

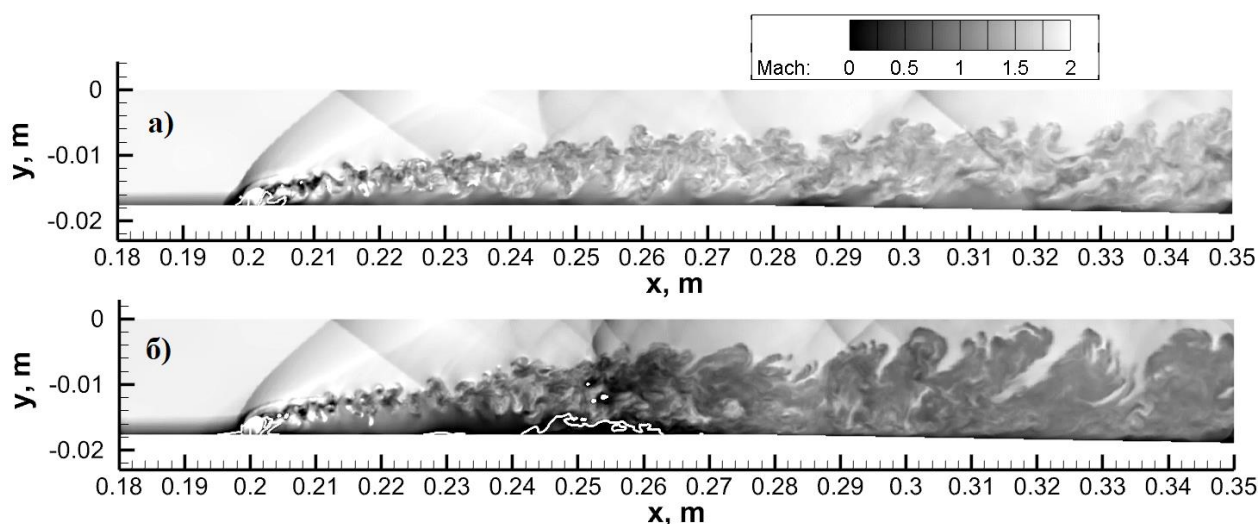


Рисунок 86 — Сравнение полей числа Маха M , полученных в IDDES-расчетах: а) с гладкими стенками канала; б) с шероховатыми стенками. Белым цветом показаны изолинии $u = 0$

Анализ экспериментальных данных привел авторов к выводу, что имеется два существенных расхождения в постановке задачи в базовом IDDES-расчёте и в эксперименте. Во-первых, в работе [5] сказано, что экспериментаторы выполнили сканирование внутренней поверхности модели электронным микроскопом и установили, что шероховатость близка по характеру к песчинкам и ее характерная высота близка к 65 мкм. Во-вторых, значение расхода водорода в данном режиме, приведенное, например, в работе [195], меньше, чем идеальное значение, рассчитанное по приведённым выше параметрам на срезе инжектора. Это говорит

о том, что необходимо учитывать неидеальность течения в инжекторе, которое приводит к различным потерям. После внесения обоих изменений был проведён ещё один IDDES-расчёт. Снижение высоты шероховатости и коррекция расхода привели к существенной перестройке течения и отступлению горения вниз по потоку, рисунок 87. Было сделано предположение, что сеточное разрешение в области инъекции и у стенок является недостаточным. Второй вероятной причиной является применение закона стенки (в [5] тепловыделение начинается непосредственно у стенки). При возвращении к исходной сетке с 92 млн. ячеек из раздела 3.1 было установлено, что прилипание не спасает ситуацию (кривая 4 на рисунке 87,а).

Для поиска причин рассогласования с экспериментом было решено перейти к расчётам в RANS-постановке на той же сетке (рисунок 88,а), поскольку RANS-расчёты требуют меньшего времени счета. Все расчеты проводились на базе модели турбулентности SST [127] и доводились до сходимости к стационарному состоянию. Численный метод отличался лишь тем, что вместо гибридной схемы всюду применялась WENO5 [138] с MP [142]. Продольные распределения давления для RANS-расчётов с прилипанием и $h_s = 65$ мкм представлены на рисунке 87,б.

Была предпринята попытка увеличить характерную высоту шероховатости до 100 мкм (что близко к максимальному значению в разбросе высот шероховатости, измеренному в [1, 195]). Это позволило сдвинуть пик давления заметно выше по потоку (кривая 3 на рисунке 89), но он далеко не достиг положения, зафиксированного в эксперименте. Увеличивать высоту дальше не имело смысла, поэтому было принято решение вернуться к рекомендованной средней высоте шероховатости 65 мкм и искать другие причины расхождения расчёта и эксперимента.

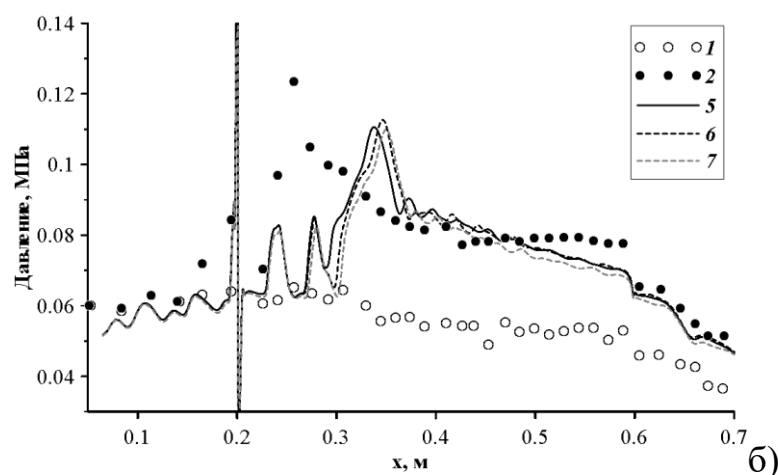
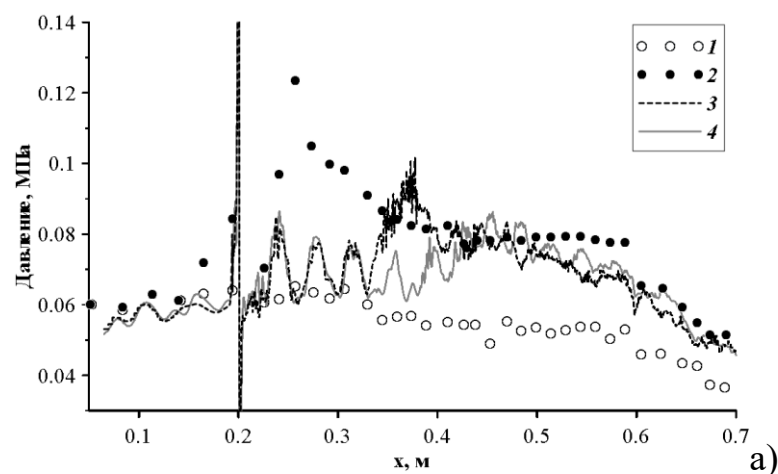


Рисунок 87 — Продольное распределение статического давления: 1 — эксперимент ONERA [1], без подачи топлива; 2 — эксперимент ONERA [1], с подачей топлива; 3 — IDDES-расчёт, $h_s = 65$ мкм и уточненный расход, граничное условие “закон стенки”; 4 — IDDES-расчёт для тех же параметров, условие прилипания; 5 — RANS-расчёт для тех же параметров; 6 — RANS-расчёт, кинетика 19 реакций; 7 — RANS-расчёт, $Pr_t = 0.7 = \text{const}$

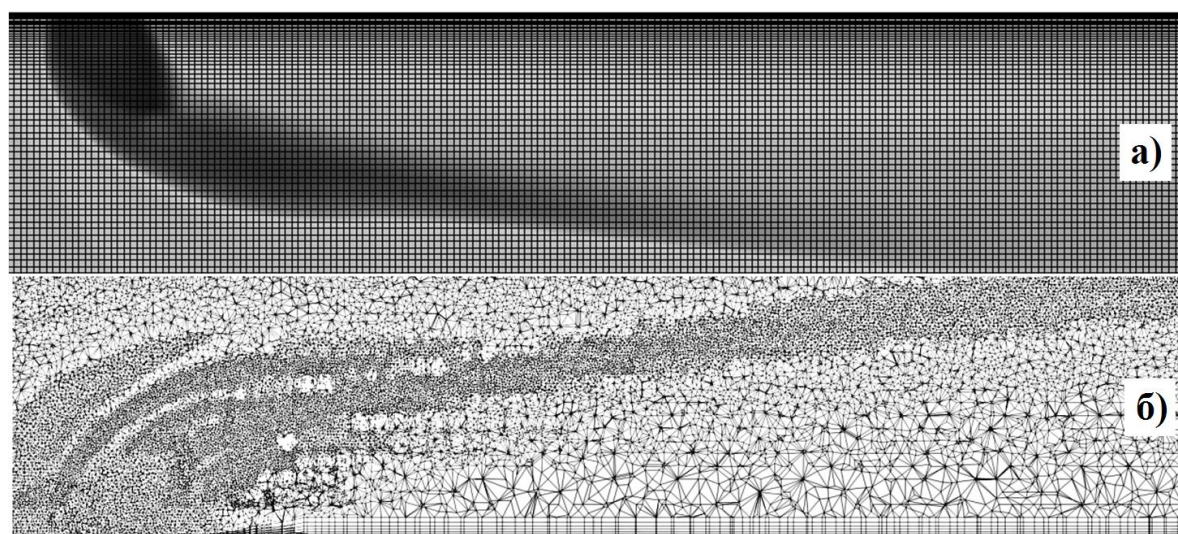


Рисунок 88 — Структура расчётных сеток в области инжекции струй водорода: а) наша сетка (фон — поле продольной скорости); б) сетка ONERA из [196]

В рамках сопоставления отдельно было рассмотрено описание вдува струй водорода: изолинии числа Маха, полученные в RANS-расчёте, были наложены на теневую фотографию области инжекции, полученную в эксперименте [1] для данного режима течения — см. рисунок 90. Видно, что первая бочка струи предсказывается в расчёте очень точно; есть лишь небольшая погрешность в положении наклонного головного скачка уплотнения перед струей. Таким образом, и расход, и пробивная способность струи топлива моделируются корректно.

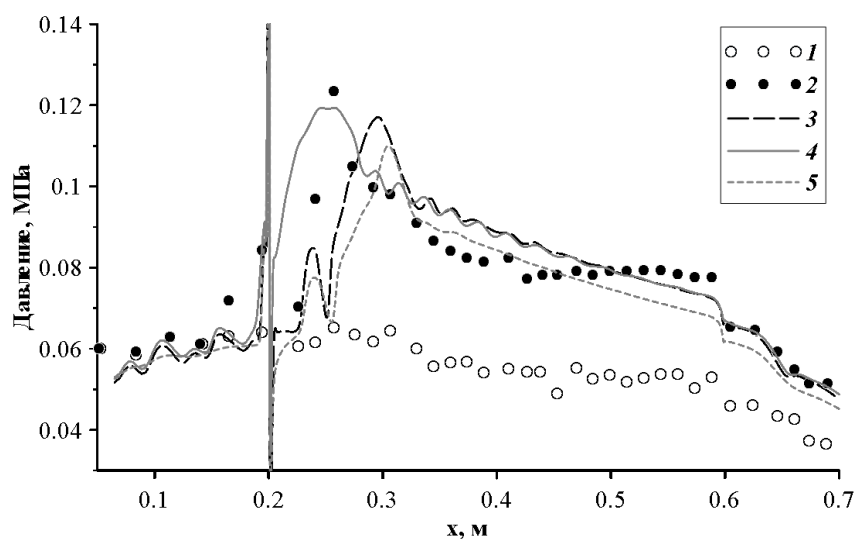


Рисунок 89 — Продольное распределение давления на стенке. Кривые 1-2 — как на рис. 87. RANS-расчёты: 3 — $h_s=100$ мкм; 4 — теплоизолированные стенки; 5 — 1-й порядок аппроксимации

Также была предпринята попытка расчёта при теплоизолированных стенках (кривая 4 на рисунке 89). Эффект оказался очень сильным, и пик давления расположился выше по потоку, чем в эксперименте. Таким образом, вывод из [199] о существенном влиянии теплообмена на стенках канала подтвердился.

Стоит отметить, что в RANS-расчётах ONERA [5] удалось достичь лучшего согласования по продольному распределению давления на стенке с той же высотой шероховатости $h_s = 65$ мкм. Возможное объяснение основано на особенностях сетки в расчётах ONERA. В этих расчётах использовалась сетка, подобная той, что показана на рисунке 88. Эта сетка взята из [196]; в [5] использовалась немного другая сетка, но близкая по разрешению к

представленной. Видно, что в расчёте ONERA сетка в области инъекции является гораздо более подробной. Также размер первой пристенной ячейки в сетке ONERA в 10 раз меньше, но роспуск более грубый. Попытка провести расчёт на сетке, продробленной в 2 раза по всем направлениям, привела к тому, что концентрация водорода около стенки снизилась, т.е. условия для воспламенения ухудшились. Зато в области следа за струёй водорода используемая сетка является более подробной, чем сетка ONERA. Чтобы оценить силу эффекта более грубой сетки, был выполнен расчёт с использованием схемы Годунова [140] 1-го порядка. Это дало кривую 5 на рисунке 89. Сравнение с расчётом по схеме 2-го порядка (кривая 5 на рисунке 87,б) показывает, что пик давления смещается вверх по потоку. Таким образом, лучшие результаты [5] могут быть связаны с недостаточным сеточным разрешением в следе за струей водорода.

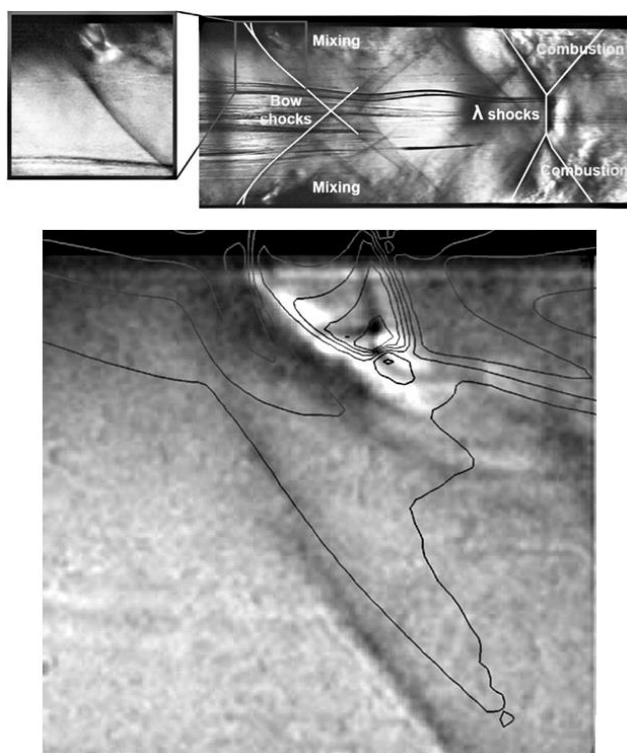


Рисунок 90 — Теневое изображение течения в области инъекции топлива. Вверху — рисунок из [1] с интерпретацией элементов течения и увеличенной областью выдува струи; внизу — область выдува струи при ещё большем увеличении с наложенными изолиниями числа Маха, полученными в RANS-расчёте

3.5 Вторая серия расчётов

3.5.1 Влияние температуры стенок

Результаты представленные в данном разделе опубликованы в [206]. Поскольку в первой серии расчётов достигнуть соответствия с расчётами и экспериментом ONERA, оставаясь в рамках установленной высоты шероховатости, не удалось, был продолжен поиск других возможных физических факторов. В частности, следует отметить, что в [1] было выражено сомнение в надёжности измерений температуры стенок, т.к. теплозащитное покрытие в районе термопар разрушилось. К тому же значение 716 К, как следует из [211], взято как среднее арифметическое по 4 термопарам вдоль всего канала. Таким образом, температуру стенок можно рассматривать как неопределённый параметр в данной задаче. Была проведена серия RANS-расчётов с различной температурой стенок. Физические факторы сведены в таблице 12. Всё остальное как в разделе 3.1.

Таблица 12 — Физические факторы во второй серии расчётов

Кинетика в канале	h_s , мкм	Модель стёкол	Модель турбулентности	STG на входе в канал	Температура стенок
7 реакций	65	нет	линейная	нет	варьировалась

Был выполнен расчёт с температурой стенки $T_w = 1000^\circ\text{K}$ (зелёная кривая на рисунке 91). По положению пика давления на этой кривой и на кривой для $T_w = 716^\circ\text{K}$ (синяя кривая) была сделана экстраполяция к положению пика давления в эксперименте, которая дала значение $T_w = 1413^\circ\text{K}$ (красная кривая). Дальнейшее увеличение температуры было принято нецелесообразным. Отметим, что данное распределение ($T_w = 1413^\circ\text{K}$) близко по положению пика к полученному при адиабатической стенке (кривая 4 на рисунке 89).

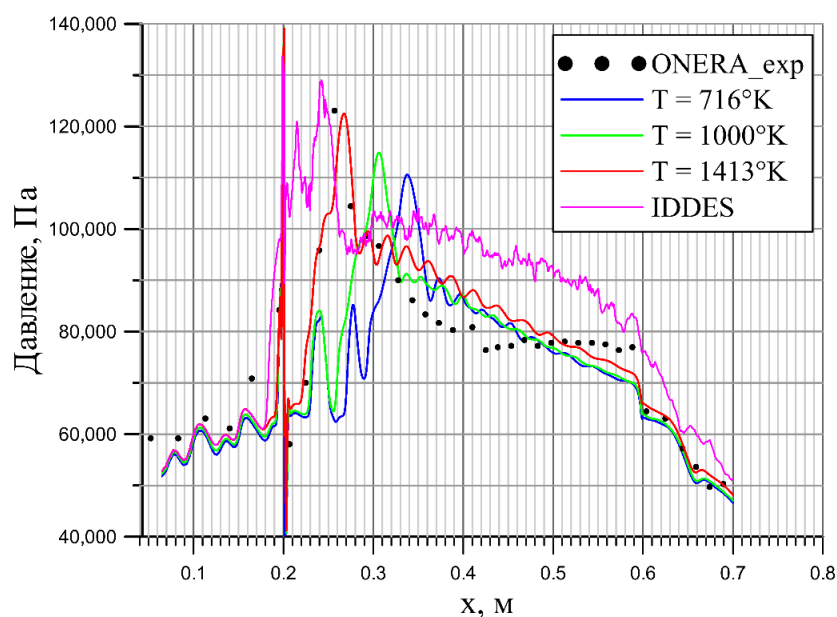


Рисунок 91 — Продольное распределение давления на стенке при различной температуре стенки. Чёрные круги — эксперимент [1]

3.5.2 Вихреразрешающий расчёт при $T_w = 1413$ К

С полученным значением температуры был проведён IDDES-расчёт на суперкомпьютере РФЯЦ ВНИИЭФ [222], использовалось 3000 процессорных ядер. Полный объём памяти для расчёта составил 830 Гбайт. Расчёт потребовал 2.2 миллиона ядро-часов процессорного времени. Было воспроизведено 11 мс физического времени. В качестве начального поля было выбрано конечное состояния IDDES-расчёта из предыдущей серии со значением температуры стенки $T_w = 716^\circ\text{K}$, распределение давления для которого представлено на рисунке 87,а (4 кривая). Поэтому в начале расчёта происходила перестройка потока, после чего течение вышло на квазистационарный режим. Характерное время задачи, за которое невязкий поток проходит через канал — около 1 мс. На рисунке 92 показана полученная в IDDES-расчёте зависимость интегрального коэффициента трения по стенкам канала от физического времени. Перестройка потока заняла примерно 3 мс, после чего можно выделить два условных “периода” по 3.5 мс каждый. К концу расчёта полное установление течения ещё не было достигнуто.

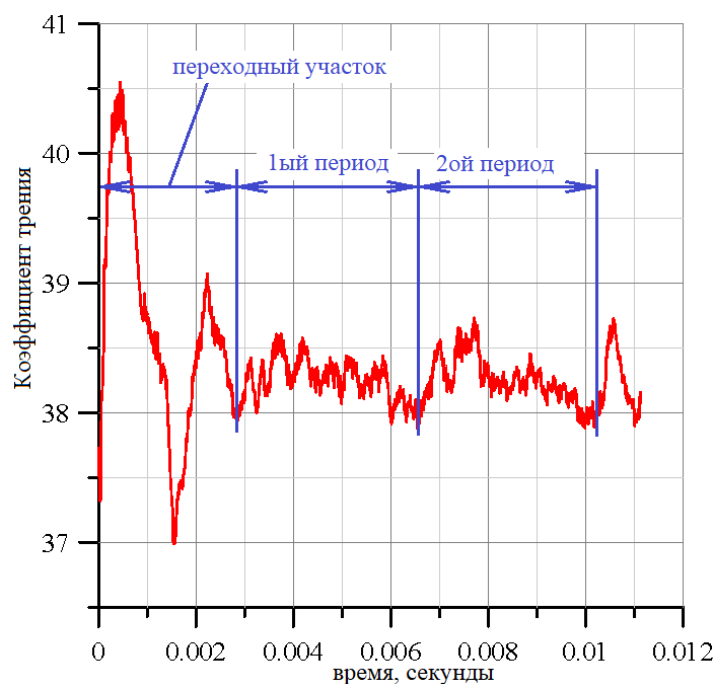


Рисунок 92 — Зависимость интегрального коэффициента трения от времени в IDDES-расчёте

Для сопоставления на рисунке 91 также представлено распределение давления в случае IDDES-расчёта в один из последних моментов времени счёта. Видно, что в вихреразрешающем расчёте получается больший пик давления, который сдвинут вверх по потоку относительно решения, полученного с помощью RANS-расчёта, и относительно экспериментальных данных. Стоит также отметить, что, помимо основного пика, распределение давления оказывается завышенным в диапазоне от 0.3 м до 0.7 м относительно эксперимента.

На рисунке 93 сравниваются поля числа Маха, температуры и концентрации ОН в вертикальной плоскости симметрии канала, полученные в IDDES- и RANS-расчётах. Данные вихреразрешающих расчётов представлены в конечный момент (11.13 мс). В проведённом RANS-расчёте (в отличие от RANS-расчёта ONERA [5]) отсутствует локальное заклинивание. Газодинамическая структура скачков оказывается существенно менее интенсивной, чем в IDDES-расчёте. Поэтому в RANS-расчёте отрывная зона оказывается смещённой вниз по потоку, что ближе к экспериментальной картине течения.

На полях температуры и массовой доли ОН видно, что в IDDES- и RANS-расчётах оба параметра повышаются у горячей стенки в следе за инжектируемой струей. Затем зона тепловыделения (которая отличается большими значениями массовой доли ОН) смещается к верхней границе пограничного слоя — к области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем.

На рисунке 94 представлено типичное мгновенное поле числа Маха в вертикальной плоскости симметрии канала. Поверх поля также стрелочками изображены мгновенные линии тока, которые выходят из рециркуляционных зон и попадают в середину канала вниз по потоку. Таким образом, можно заключить, что эти зоны незамкнуты. Слева внизу на рисунке 94 видна выдуваемая струя водорода, которая формирует перед и за собой рециркуляционные зоны (непосредственно у стенки), а также ударную волну (в ядре потока), которая в свою очередь взаимодействует с пограничным слоем (чуть ниже по потоку). Именно в этой области взаимодействия ударной волны и пограничного слоя инициируется химическая реакция. Толстыми чёрными линиями выделены области повышенной концентрации ОН, показывающие зоны тепловыделения. В результате горения у стенки пограничный слой утолщается, а ядро потока сужается вплоть до локального запираания (на данном рисунке при $x = 0.238$ м). Образуется ударная волна. Газ, прошедший через зону тепловыделения в следе за струей, смещается от стенки к центру канала, смешивается со свежей горючей смесью в ядре потока, нагревает её и добавляет к ней радикалы из зоны горения. Взаимодействие этой смеси с возникшей ударной волной приводит к возникновению основного очага самовоспламенения.

Возникающая при запираании дозвуковая область является нестационарной. Ударно-волновая структура, содержащая прямой скачок уплотнения, колеблется вдоль продольной оси вместе с зоной горения.

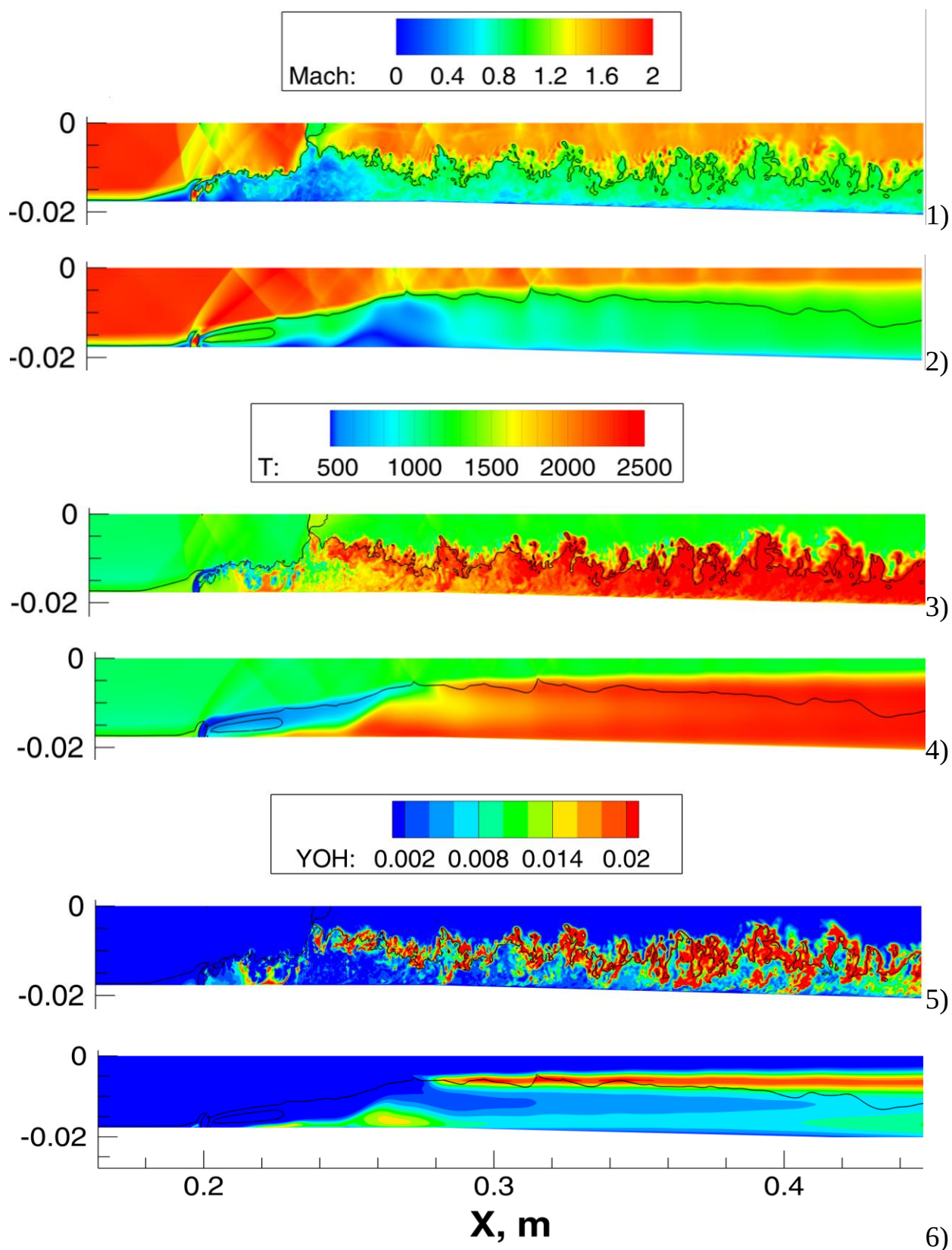


Рисунок 93 — Конечное состояние поля течения в IDDES-расчёте (11.13 мс) и в установившемся RANS-расчёте: 1, 3, 5 — IDDES; 2, 4, 6 — RANS; 1, 2 — число Маха; 3, 4 — температура [K], 5, 6 — массовая доля OH. Чёрная линия — $M=1$

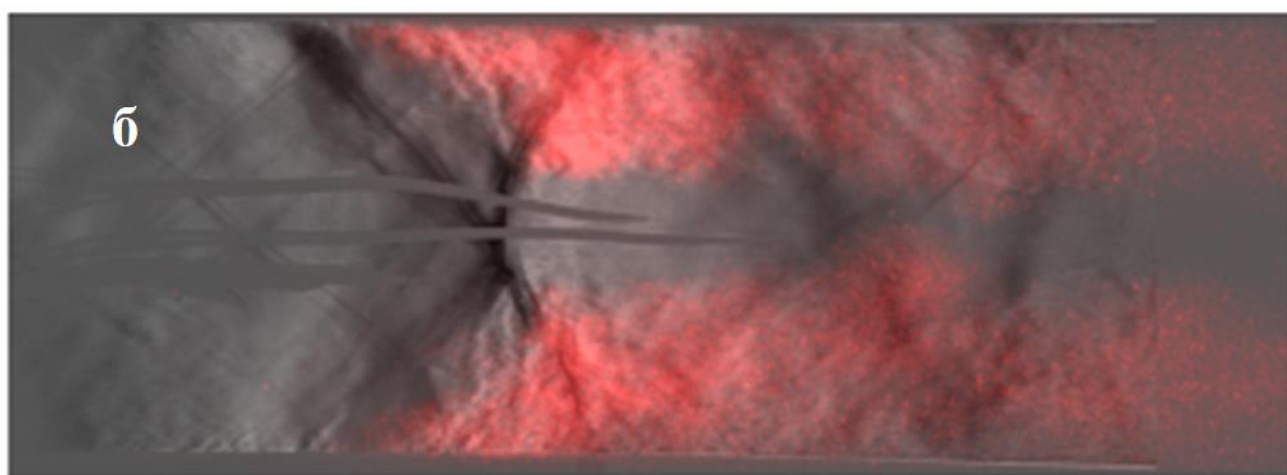
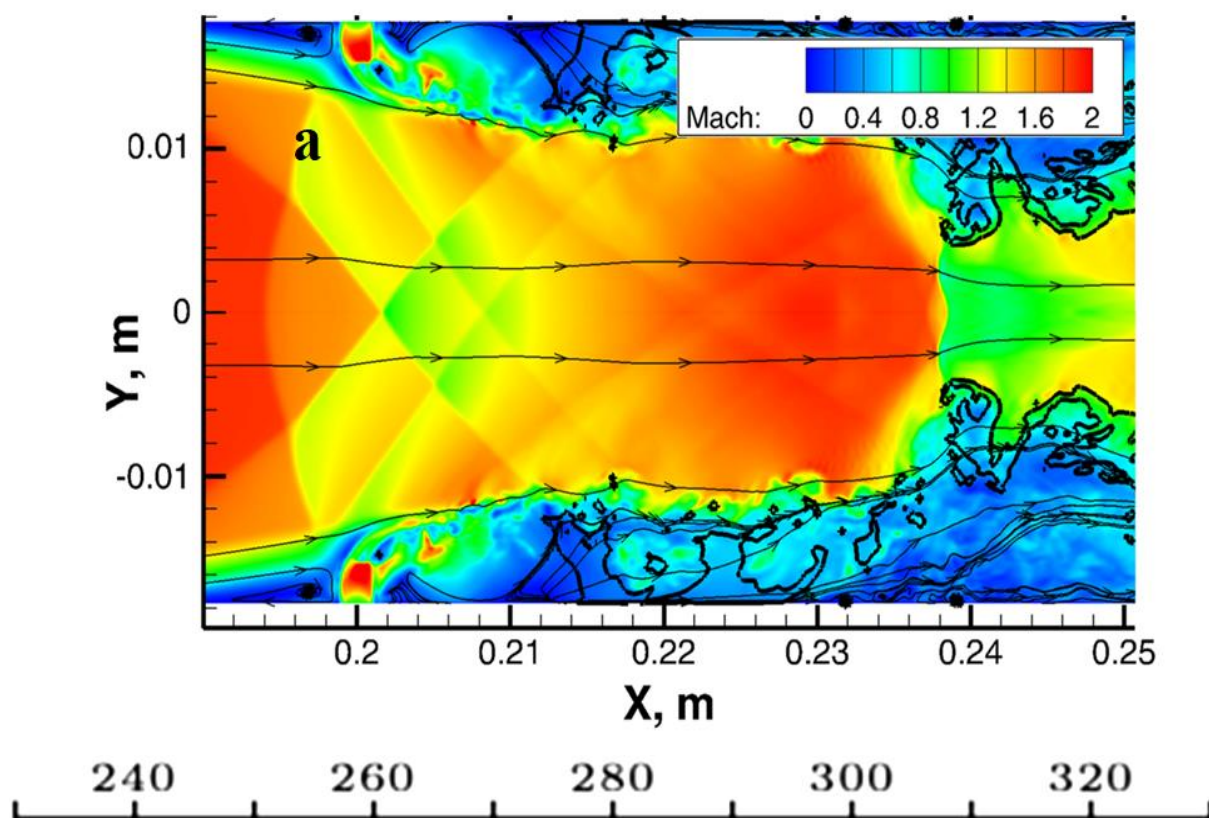


Рисунок 94 — а) мПоле числа Маха и мгновенные линии тока в вертикальной плоскости симметрии из IDDES-расчёта. Жирные чёрные кривые — изолинии концентрации $\text{OH}=0.01$. Показана полная высота канала; б) Теневая фотография с наложением хемилюминесценции радикалов OH , полученная в эксперименте ONERA. Рисунок взят из [5]

Как видно из рисунка 94б, в эксперименте была получена похожая картина течения, но запирание происходило на 3 см ниже по потоку. Основной очаг воспламенения также возникает в результате взаимодействия ударной волны с пограничным слоем. При этом само горение оказывает влияние вверх по потоку

за счёт возникновения локального частичного заклинивания. Структура скачков в эксперименте также колеблется вместе с отрывной областью и зоной горения.

На рисунке 94б также видно, что в эксперименте горение достаточно быстро теряет свою интенсивность на интервале от 0.29 м до 0.33 м в продольном направлении. Этот эффект не воспроизводится в расчётах: на полях температуры и концентраций ОН (рисунок 93) видно, что интенсивность горения в этой области увеличивается, а максимальная температура достигается при $x = 0.37$ м и $x = 0.33$ м в IDDES- и RANS-расчётах соответственно. Скорее всего, этот эффект, а также повышенное по сравнению с экспериментом давление на участке от 0.3 м до 0.7 м (рисунок 91) обусловлены тем, что выбранная температура стенки (1413°K) является избыточной. Данные, представленные на рисунке 91, показывают, что в IDDES-расчёте можно было бы немного понизить температуру стенки по сравнению с RANS-расчётом так, чтобы локальное заклинивание сохранилось бы, а положение пика давления соответствовало эксперименту. Но полученная таким образом температура стенки все равно оказалась бы существенно большей, чем значение 716°K , использованное в расчётах ONERA.

3.5.3 Оценка возможной температуры стенок

Для проверки достижимости в эксперименте температуры значения 1413°K была проведена следующая оценка. Решалось одномерное уравнение теплопроводности: $\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)$, где n, T, ρ, C, λ — расстояние по нормали к поверхности, температура, плотность, теплоёмкость и теплопроводность соответственно. Был учтён факт того, что на стенки канала было нанесено жаропрочное покрытие ($\text{O}_5\text{Y}_2\text{Zr}$), основной целью которого было предотвратить окисление и деформацию стенок канала. Средняя толщина данного покрытия составляет 0.0003 м. Далее следует сама стенка, сделанная из меди, толщиной 0.066 м. Остальную часть расчетной области занимает покоящийся воздух. Длина всей расчётной области составила 1 м. Значения ρ, C, λ для жаропрочного

покрытия, меди и воздуха были различны и менялись скачкообразно. Внутри участков данные параметры аппроксимировались квадратично от температуры.

Чтобы поставить граничное условие на стороне жаропрочного покрытия, обращенной внутрь канала экспериментальной модели (левая граница расчетной области, $n = 0$), предполагалось, что вдоль стенки течет стационарный поток воздуха, между которым и стенкой расположен стационарный пограничный слой. Параметры потока за пределами пограничного слоя известны. На границе $n=0$ задавалась величина теплового потока, выражаемая через значение коэффициента трения C_f при помощи аналогии Рейнольдса [223]. На правой границе расчетной области ($n = 1$ м) тепловой поток полагался равным нулю. В начальный момент температура на всей длине расчетной области была принята равной 300°K .

Было установлено, что за время эксперимента температура стенки не успевает повыситься до 1413°K , рисунок 95. При длительности эксперимента 50 с стенка нагревается до 610°K , а при длительности 150 с — до 940°K . Посередине между этими значениями лежит значение 716°K , рекомендованное в [212]. Именно это значение было решено использовать в описанных ниже расчётах. При этом следует отметить, что одномерный расчёт игнорирует множество факторов и является только приблизительной оценкой.

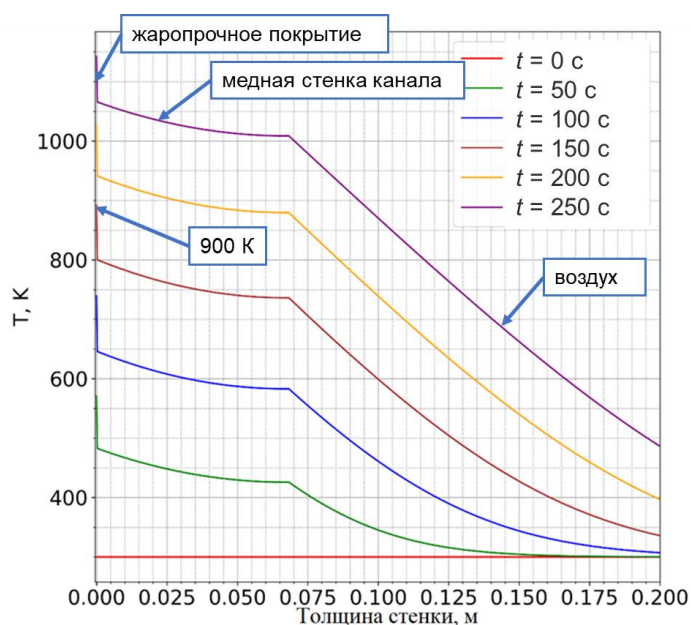


Рисунок 95 — Распределения температуры в различные моменты времени

3.6 Третья серия расчётов

С учетом описанной выше оценки возможной температуры стенок, в третьей серии расчетов была зафиксирована температура стенок, которая могла быть реализована в эксперименте. Был проведен поиск других физических факторов, не учтенных ранее в математической модели: вторичного течения в углах канала, наличия оптических стёкол в стенках модели, разрешенных расчетом пульсаций в пограничном слое перед сечением инъекции. Также варьировалась шероховатость стенок, так как в последнее время исследователи склонны считать ее настроечным параметром, который не обязательно должен совпадать с характерной высотой реальной шероховатости. Наконец, был выполнен последний IDDES-расчёт, в котором были учтены все рассмотренные факторы.

Результаты, представленные в данном разделе, опубликованы в [204] и [224].

3.6.1 Влияние стёкол на боковых стенках

Поскольку на стёкла не было нанесено жаропрочное покрытие, а коэффициент теплопроводности стекла достаточно низкий, то в первом приближении учесть наличие оптических стёкол можно с помощью замены граничного условия на стенке на условие гладкой теплоизолированной поверхности. Было учтено, что стёкла занимают 3 участка по оси X : [0.1394; 0.5584], [0.6593; 0.8286], [0.9495; 0.1119], и при этом охватывают всю высоту канала. На рисунке 96 изображены поля чисел Маха в плоскости симметрии для двух RANS-расчётов, отличающихся модификацией граничного условия. Как и следовало ожидать, учёт стёкол приводит к тому, что отрывная область, расположенная в центре канала, смещается вниз по потоку, поскольку интегральное трение меньше. При этом высота отрывной области увеличивается. Это объясняется увеличением второго числа Дамкёлера: $Da_{II} = (q_{chem} - q_{wall}) / (C_p T)$, где q_{chem} — количество теплоты, выделенной в

результате химической реакции, q_{wall} — поток тепла в стенки канала, C_p — теплоёмкость при постоянном давлении. В случае стекла $q_{\text{wall}} = 0$. Тем не менее, влияние стёкол оказывается весьма умеренным и не приводит к качественному изменению картины течения.

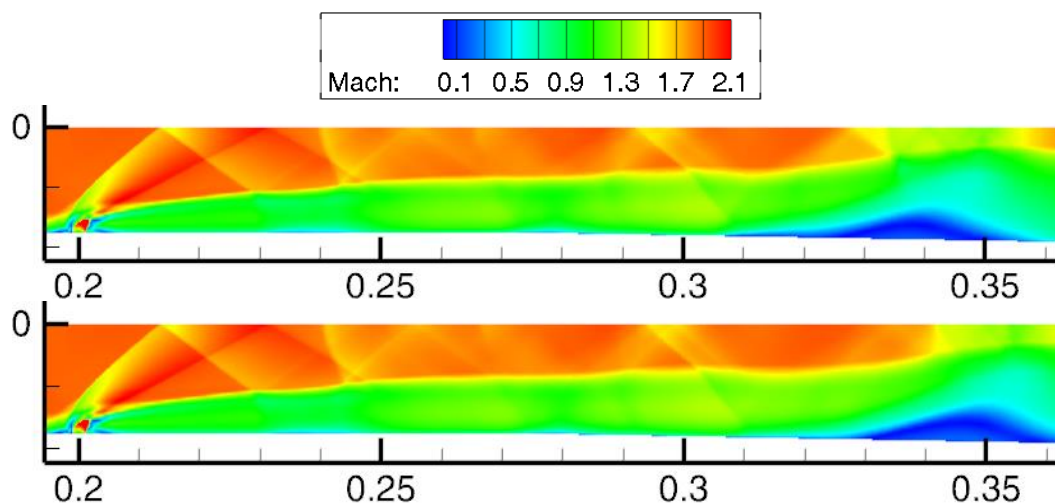


Рисунок 96 — Поля чисел Маха в плоскости симметрии, RANS-расчёты. Сверху расположено поле без учёта стёкол. Снизу — с учётом.

3.6.2 Влияние вторичных токов

В данном подразделе сопоставляется два RANS-расчёта по линейной модели SST и нелинейной SST-NL (см. раздел 3.1), позволяющей описать вторичные токи в углах. Как было продемонстрировано в главе 1, в течениях со сверхзвуковым ядром в каналах прямоугольного сечения наблюдается зависимость между отрывными зонами в углах и около плоскости симметрии канала; а именно, чем больше угловые отрывы, тем меньше отрыв около плоскости симметрии и наоборот. При этом основной вклад в ошибку размеров угловых отрывов вносит навязанная моделью турбулентности линейная связь между турбулентными напряжениями и градиентами среднего поля скорости (что является общепринятым для базовых дифференциальных моделей).

На рисунке 97 представлены два RANS-расчёта по модели SST и SST-NL, изображены отрывные области в углах и центральной плоскости, как изоповерхности нулевой продольной компоненты скорости. Также представлены

распределения продольной компоненты скорости по поверхностям, близким к нижней и боковой стенкам экспериментальной модели. Помимо этого на рисунке 97 представлен поперечный срез, на котором изображено распределение вертикальной компоненты скорости v . Видно, что в исходной постановке (слева) в углу напротив центрального отрыва присутствует угловой отрыв. При переходе к модели SST-NL в углу возникают вторичные токи, и в результате угловой отрыв исчезает. При этом размер центрального отрыва увеличивается, что согласуется с данными из главы 1. Таким образом, учёт вторичных токов приводит к существенному изменению структуры основного течения, что можно наблюдать на рисунке 98, где изображена четверть канала. Серым цветом обозначены границы расчётной области. Металлическим цветом изображены изоповерхности $M = 1$. Также на рисунке представлены линии тока (черные кривые) и поперечные поля продольной компоненты скорости u . Видно, что поток вытесняется центральным отрывом к боковым стенкам канала. В случае модели SST-NL наблюдается частичное запираание, поскольку большую площадь сечения занимает дозвуковое течение, и среднее число Маха по сечению становится меньшим единицы. Также в случае SST-NL линии тока расположены более разреженно относительно поля, полученного с помощью модели SST. На рисунке 99 изображены поля числа Маха в плоскости симметрии, линии тока струи водорода, а также изоповерхности концентрации радикала $\text{OH}=0.017$ (бордовым цветом). Видно, что образование радикалов происходит по периметру струи топлива. При этом можно выделить два региона их присутствия: отрывную зону, расположенную под струёй водорода, и слой смешения струи. В обоих случаях топливо попадает из слоя смешения в рециркуляционную область, которая становится стабилизатором дальнейшего горения вниз по потоку, поскольку является источником горячих продуктов реакций. В случае модели SST-NL, в отличие от SST, наблюдается дополнительная поддержка, связанная с горением непосредственно за ПСУ. Горение непрерывно взаимодействует с турбулентностью и газодинамической структурой — дополнительно повышает температуру и давление, а, значит, увеличивает толщину ПС и высоту отрыва.

Поэтому вся структура сдвигается немного вверх по потоку. При этом пик давления практически не меняет своего расположения (рисунок 100), однако существенно возрастает его амплитуда, что лучше согласуется с экспериментом.

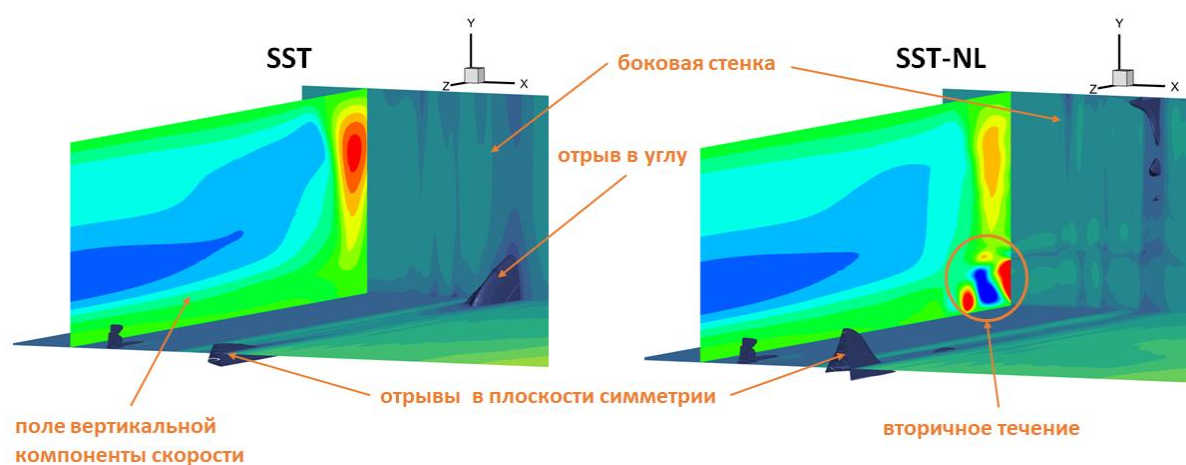


Рисунок 97 — Структура отрывов. RANS-расчёт по модели SST (слева) и SST-NL (справа)

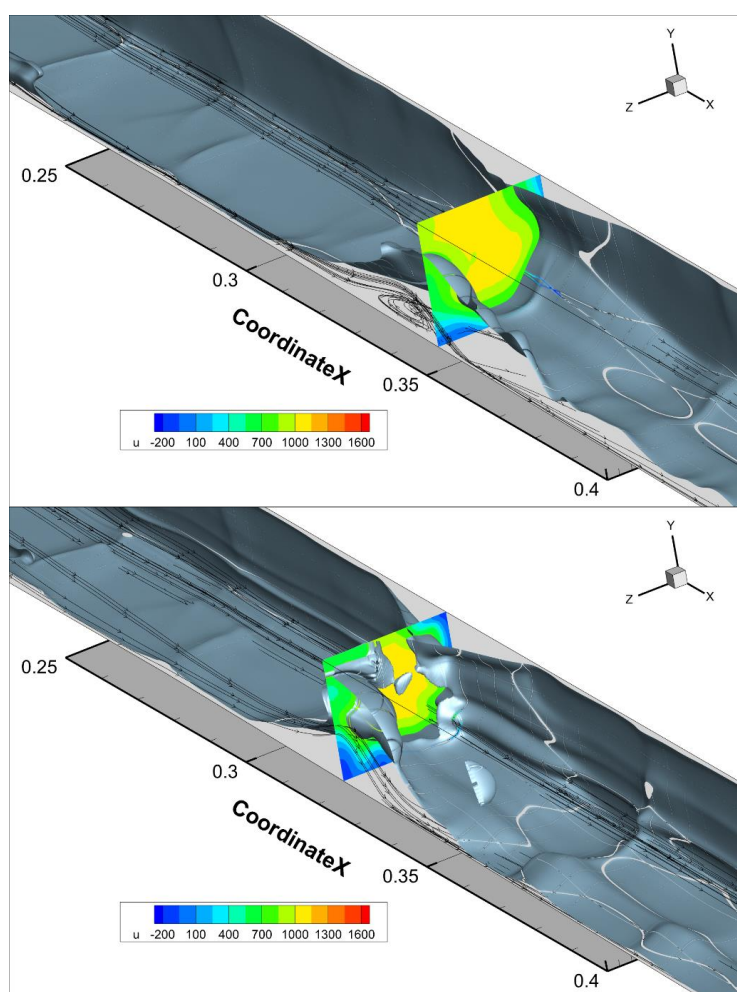


Рисунок 98 — Влияние вторичных токов. RANS-расчёт по модели SST (сверху) и SST-NL (снизу). Изображена четверть канала

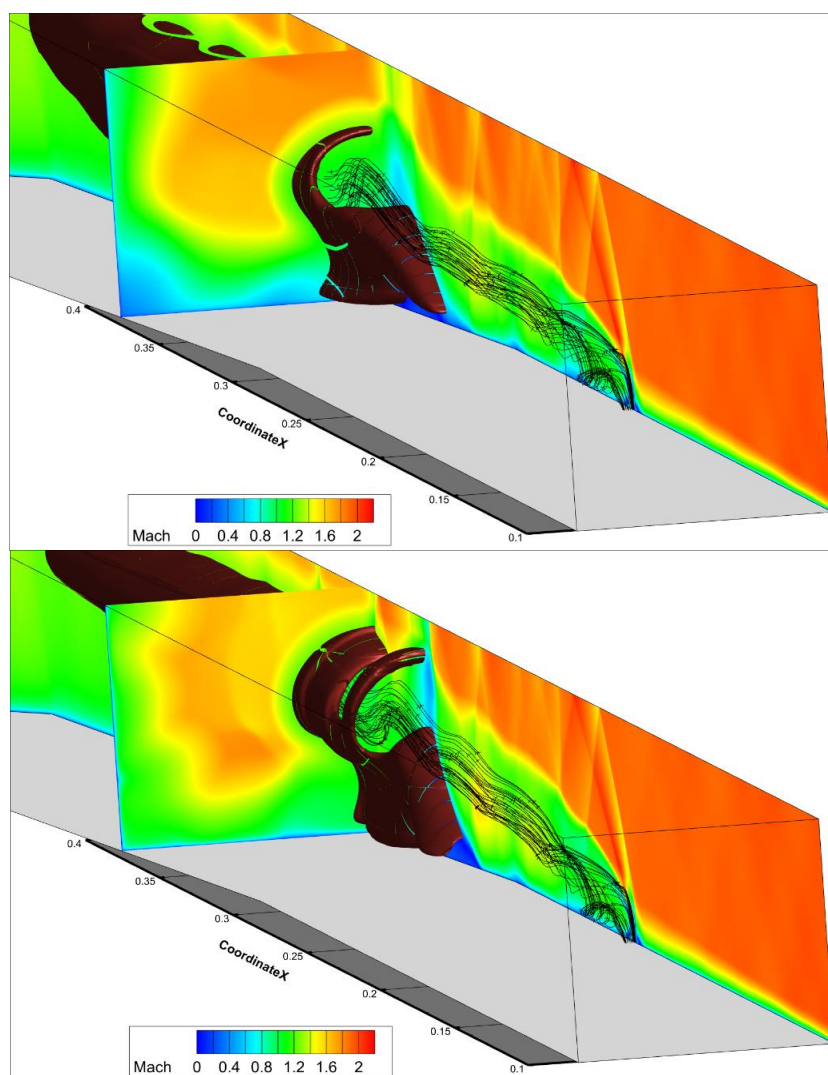


Рисунок 99 — Изоповерхности концентрации радикала $\text{OH}=0.017$. RANS-расчёт по модели SST (сверху) и SST-NL (снизу). Изображена четверть канала

3.6.3 Влияние высоты шероховатости

Как уже было установлено в разделе 3.3, модельный параметр шероховатости существенным образом влияет на распределение давления. Согласно современным представлениям [215], модели шероховатости, основанные на предположении о сдвиге профиля скорости, должны правильно воспроизводить эффекты, связанные с реальной шероховатостью, а именно увеличивать трение и тепловой поток. В этом смысле в [215] предлагается относиться к h_s как свободному параметру, значение которого нужно подобрать так, чтобы обеспечить правильное распределение трения на поверхности. Однако в эксперименте [1] не проводилось измерений трения. Поэтому настройка параметра h_s проводилась по распределению давления вдоль канала. Установлено,

что наиболее близким по положению пика давления к экспериментальному обладает расчёт со значением $h_s = 85$ мкм (рисунок 100). Следует также отметить, что все RANS-расчёты даже с моделью SST-NL не позволяют получить полочку давления, наблюдаемую в эксперименте на интервале (0.45; 0.6), а также занижают уровень давления перед инжекцией, что связано с плохим качеством моделирования отрыва перед инжекцией. Вероятным объяснением может являться недостаточное сеточное разрешение в этой части расчётной области (на диаметр инжектора приходится 15 ячеек). Эти две проблемы также наблюдались в первых двух сериях расчётов. Обратим внимание, что расчёт с $h_s = 90$ мкм приводит к избыточному росту давления непосредственно за инжектируемой струей. Это является следствием того, что отрывная область при таком значении h_s пристыковывается к инжектируемой струе (рисунок 101), из-за чего меняется и газодинамическая структура в невязком ядре потока. При этом горение по периметру слоя смешения исчезает, остаётся лишь горение, обусловленное отрывом, об этом свидетельствует распределение температуры вдоль канала (рисунок 102).

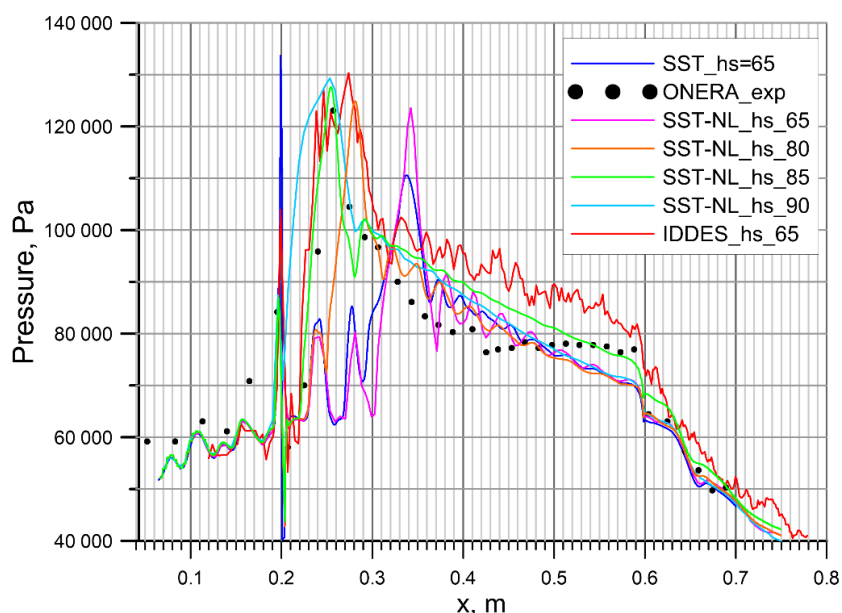


Рисунок 100 — Распределение давления вдоль канала. Синяя кривая — расчёт по модели SST с $h_s = 65$ мкм, розовая — SST-NL с $h_s = 65$ мкм, оранжевая — SST-NL с $h_s = 80$ мкм, зелёная — SST-NL с $h_s = 85$ мкм, бирюзовая — SST-NL с $h_s = 90$ мкм, красная — IDDES с $h_s = 65$ мкм, чёрные точки — эксперимент [1]

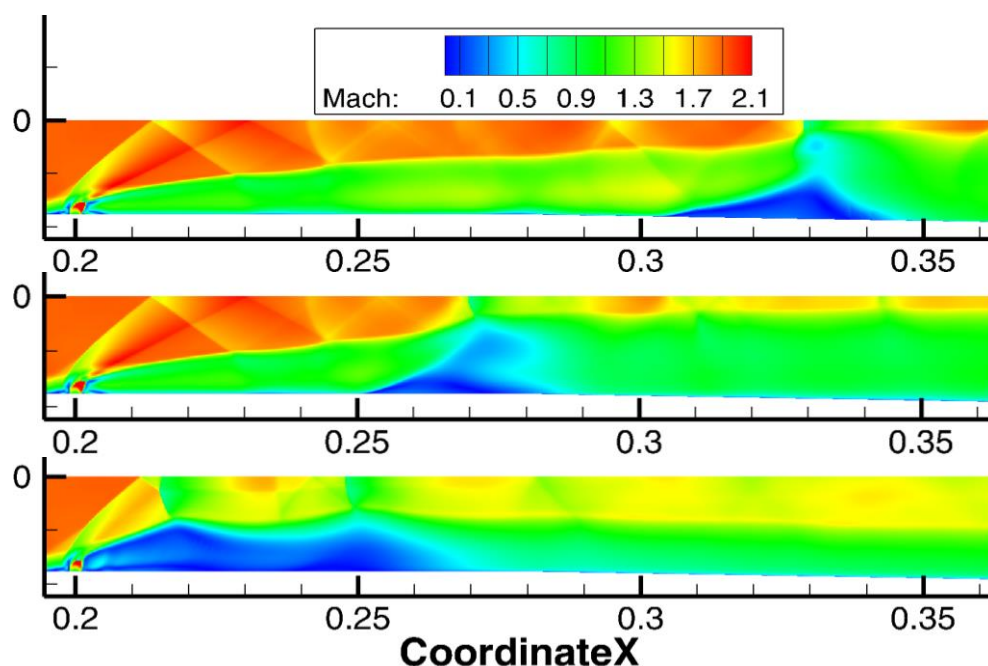


Рисунок 101 — Поле числа Маха в плоскости симметрии. RANS-расчёты с $h_s = 65; 80$ и 90 мкм (сверху вниз).

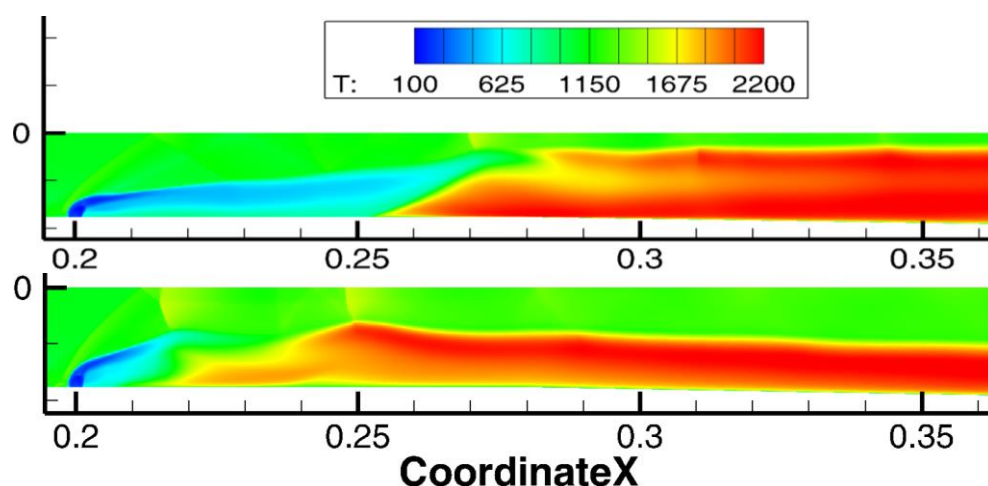


Рисунок 102 — Поле температуры в плоскости симметрии. RANS-расчёты с $h_s = 80$ и 90 мкм (сверху вниз).

3.6.4 Влияние разрешённой турбулентности на входе в канал

В IDDES-расчёте в предыдущих двух сериях не использовался STG (генератор синтетической турбулентности), так как считалось, что поперечная инжекция сама по себе является достаточным механизмом турбулизации. Однако при этом пограничный слой перед инжекцией остаётся невозмущённым (рисунок 103), а турбулентные структуры, характерные для вихреразрешающего метода, наблюдаются ниже по потоку от струи. В текущем IDDES-расчёте в

сечении 0.12 м по оси X был установлен STG (см. раздел 2.3). В качестве начального поля было взято поле, полученное в RANS-расчёте по модели SST-NL с $h_s = 80$ мкм. Сам IDDES-расчёт проводился при $h_s = 65$ мкм (за первые 2 мс был осуществлён переход от 80 к 65 мкм), поскольку из прошлого опыта было известно, что переход от RANS к IDDES приводит к сдвигу газодинамической структуры, отрыва и пика давления вверх по потоку. Также была изменена сетка: начало расчётной области было сдвинуто вниз по потоку до координаты 0.12 м (примерно 20 толщин ПС перед инжекцией), а сами ячейки были сгущены, чтобы удовлетворить требованиям STG. Таким образом, новая расчётная область короче исходной на 0.055 м и содержит примерно 104 млн. ячеек (на 12 млн. больше исходной). В начальное поле были внесены возмущения компонент скорости (u', v', w') по формулам, основанным на [225], чтобы предотвратить диссипацию турбулентности и переход численного метода в RANS-режим:

$$\begin{aligned} u' &= 0, \\ v' &= 0.3u_0 \cdot \sin\left(0.5 \cdot \frac{2\pi x}{H}\right) \cdot \sin\left(4 \cdot \frac{2\pi y}{H}\right) \cdot \sin\left(4 \cdot \frac{2\pi z}{H}\right), \\ w' &= 0.3u_0 \cdot \sin\left(0.5 \cdot \frac{2\pi x}{H}\right) \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{2\pi y}{H}\right) \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{2\pi z}{H}\right), \end{aligned}$$

где $H = H(x)$ — локальная высота канала, а u_0 — условное среднее значение продольной компоненты скорости (было выбрано равным 900 м/с). На рисунке 103 изображены поля числа Маха в плоскости симметрии в окрестности струи. Видно, что внесение возмущений приводит к сокращению размеров отрывной области перед инжекцией, что приводит к снижению угла клина отрыва, а, значит, и к падению интенсивности КСУ. Всё это взаимодействует с отрывной областью, в которой происходит тепловыделение. Примечательно, что STG также влияет на ПС на боковых стенках, то есть, и на угловые отрывы.

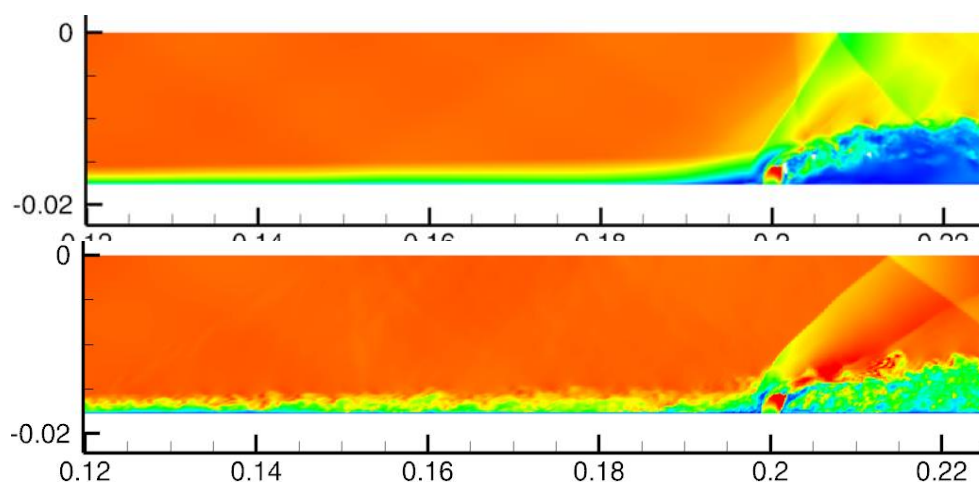


Рисунок 103 — Поле числа Маха в плоскости симметрии в окрестности струи. IDDES-расчёт без STG (сверху) и IDDES-расчёт с STG (снизу).

3.6.5 Результаты последнего IDDES-расчёта

Параметры расчёта для удобства сведены в таблицу 13. Стоит отметить, что после второй серии расчётов вышла работа [226], в которой продемонстрировано, что кинетика хоть и почти не влияет на распределение давления (согласуется с ранее представленными данными), влияет на форму центрального отрыва. Особый вклад вносят реакции с участием пероксидов. Поэтому в текущем расчёте применялась кинетика с 19 реакциями [219], учитывающая реакции пероксидов.

Таблица 13 — Физические факторы в третьей серии расчётов

Кинетика в канале	h_s , мкм	Модель стёкол	Модель турбулентности	STG на входе в канал	Температура стенок
19 реакций	варьировалась	есть	нелинейная	есть	716°K

На рисунке 104 показаны поля числа Маха в плоскости симметрии. Видно, что, в отличие от предыдущих расчётов, удалось достичь стабилизации прямого скачка при температуре стенок 716°K. Вероятно, к этому привели начальное поле, содержащее вторичные токи в углах и крупный центральный отрыв, и STG на входе.

Несмотря на то, что RANS-расчёт был доведён до стационарного состояния, в случае IDDES размер прямого скачка над центральным отрывом увеличился и газодинамическая структура вместе с отрывом начала смещаться вверх по потоку. В момент времени 0.00205 с можно наблюдать смещение всей структуры вниз по

потoku, связанное с переходом от $h_s = 80$ мкм до $h_s = 65$ мкм. Однако, как только течение адаптировалось под новое граничное условие, смещение ударных волн и центрального отрыва вверх по потоку продолжилось.

В окрестности момента времени 0.00400 с центральный отрыв примкнул к рециркуляционной области за инжектируемой струей. С этого момента началось осреднение поля течения по времени, и расчёт был продолжен до момента времени 0.00488 с. На рисунке 105 представлено осреднённое поле числа Маха в плоскости симметрии. Оказалось, что центральный отрыв практически стационарен. Это не соответствует экспериментальным данным, согласно которым ударно-волновая структура вместе с областью повышенной концентрации радикалов ОН должна колебаться на участке $0.23 < x < 0.28$ м. Возможно, это расхождение вызвано неправильным описанием слоя смешения между газами с существенно различной плотностью и сильным влиянием модели подсеточных напряжений.

Возможным объяснением разницы между экспериментальными данными и расчётом является неправильное описание слоя смешения между газами существенно различной плотности. Похожая проблема уже встречалась автору при моделировании турбулентного смешения гелиево-воздушных спутных струй [193]. Источником ошибок в том случае было взаимодействие центрально-разностной схемы и подсеточной модели. Достичь лучшего согласия с экспериментами удалось за счёт увеличения вихревой вязкости, меняя значения констант подсеточной модели. Чтобы проверить эту гипотезу, от полученного в момент времени 0.00205 с поля был проведён расчёт со значениями констант использованными в [193] ($C_{DES_2} = 3$). На рисунке 106 изображено мгновенное поле числа Маха в плоскости симметрии через 0.00069 с после пуска. Видно, что частичное запирание исчезло, центральный отрыв уменьшился и сместился вниз по потоку, а мельчайшие вихревые структуры были подавлены вязкостью. Итоговое течение также не соответствует эксперименту. Полученные результаты

подчёркивают сильное влияние модели подсеточных напряжений в данном течении, что требует отдельного исследования в будущем.

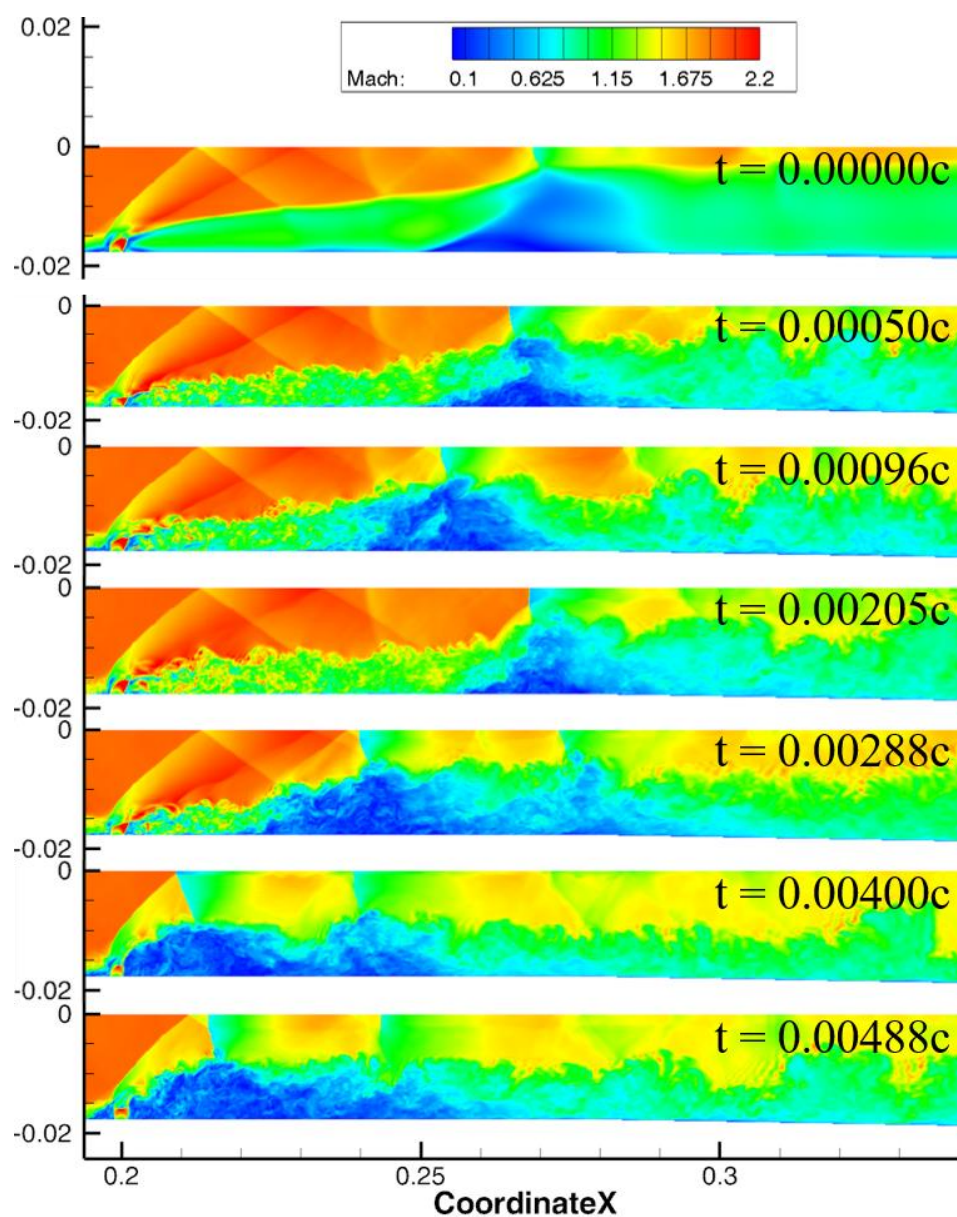


Рисунок 104 — Поле числа Маха в плоскости симметрии в последовательные моменты времени IDDES-расчёта. Сверху — начальное поле

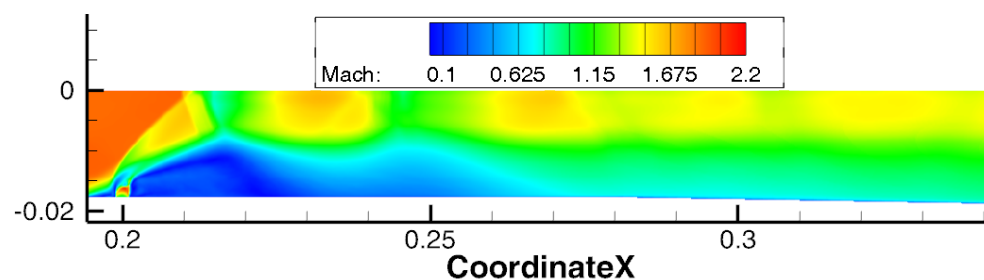


Рисунок 105 — Осреднённое поле числа Маха в плоскости симметрии

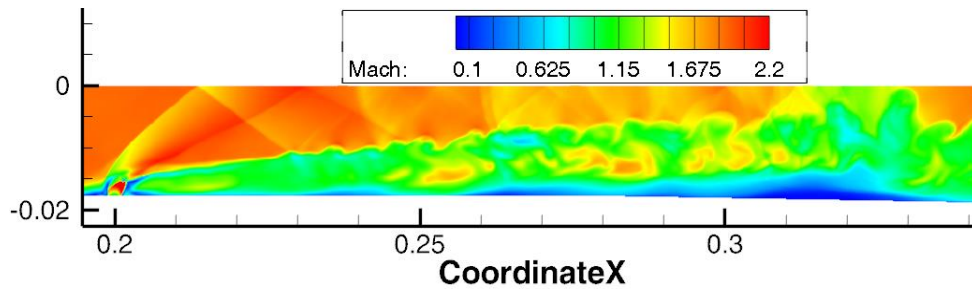


Рисунок 106 — Мгновенное поле числа Маха в плоскости симметрии с увеличенной подсеточной вязкостью

3.7 Выводы по влиянию физических факторов

На основании проведённых расчётов можно сделать выводы о влиянии различных физических факторов на распределение давления и структуру турбулентного потока в прямоугольном канале с поперечной инъекцией и горением.

Для количественной оценки влияния различных физических факторов на распределение давления можно использовать величину ε [227], определяемую с

помощью L_2 -нормы:
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (p_i^{\text{расч}} - p_i^{\text{эксп}})^2}{N \cdot \max_i p_i^{\text{эксп}}^2}}, \quad \text{где } N — \text{ количество}$$

экспериментальных точек, $p_i^{\text{эксп}}$ — экспериментальное значение давления в i -й точке, $p_i^{\text{расч}}$ — результат интерполяции данных расчётов в i -ю точку. При этом интерес представляют не сами значения ошибки ε , а разница $\Delta\varepsilon$ между расчётом, в котором рассматриваемый физический фактор учитывался, и расчётом, в котором он не учитывался. Значения $\Delta\varepsilon$ приведены ниже для каждого фактора.

Кроме распределения давления по стенкам канала, важное значение имеет *структура центрального отрыва*. Это понятие включает форму и размер отрывной зоны и не может быть определено строго количественным образом.

По влиянию рассмотренных в Главе физических факторов можно сделать следующие выводы:

- учёт стёкол слабо влияет на распределение давления вдоль канала ($\Delta\varepsilon = 0.4\%$). Однако влияет на структуру отрыва;
- шероховатость и температура стенок — наоборот, сильно влияют на продольное распределение давления ($\Delta\varepsilon = 7.3\%$ и $\Delta\varepsilon = 6.3\%$ соответственно) и слабо на форму отрывов;
- умеренное влияние на продольное распределение давления ($\Delta\varepsilon = 1.4\%$ и $\Delta\varepsilon = 1.7\%$ соответственно) оказывают нелинейная модель для турбулентных напряжений в случае RANS-подхода и генерация синтетической турбулентности в случае IDDES-подхода. Также оба фактора существенно влияют на форму отрывов;

Сильное изменение формы и размера отрывной зоны при небольших значениях параметра $\Delta\varepsilon$ свидетельствуют о том, что по одному лишь распределению давления нельзя судить о влиянии того или иного физического фактора на структуру течения с высокоскоростным горением в канале.

Также было продемонстрировано, что в рамках RANS подхода при заданной температуре стенок (716°K) удовлетворительного соответствия с экспериментальным распределением давления можно достичь, увеличив высоту шероховатости с 65 до 85 мкм, при условии воспроизведения вторичных токов в углах канала. В этом случае течение содержит большой центральный отрыв и частичное заклинивание, которое не противоречит теневым фотографиям, полученным в эксперименте. Однако колебания газодинамической структуры в RANS-расчете не наблюдаются.

3.8 Механизм стабилизации горения

Т.к. IDDES-расчёт из третьей серии дал картину течения, сильно отличающуюся от экспериментальных данных, для анализа механизма стабилизации был выбран IDDES-расчёт из второй серии, в котором была получена картина течения, похожая на экспериментальную (рис. 94б), хотя

температура стенок была завышенной и не были учтены факторы, рассмотренные в третьей серии расчетов. Эксперимент ONERA относится к задачам, в которых близкие распределения давления можно получить при существенно разных структурах течения [226]. К тому же, как отмечалось выше, измеренных в эксперименте данных недостаточно для постановки краевой задачи. Поэтому можно лишь утверждать, что выявленный ниже механизм стабилизации горения действует в рамках используемой физико-математической модели течения.

Механизм стабилизации горения может быть описан следующим образом. На рисунке 107 показано изменение поля числа Маха в вертикальной плоскости симметрии канала. Видно, что в момент времени 0.01 мс (вскоре после начала расчёта) в окрестности плоскости симметрии течение всюду сверхзвуковое. Но из-за повышения T_w у стенки канала начинается рост зон дозвукового течения. В зоне смешения струи топлива за одним из отраженных скачков уплотнения начинается горение, что приводит к росту температуры, падению плотности (т.е. увеличению удельного объема газа) и, как следствие, к утолщению пограничного слоя. На следующем кадре (0.5 мс) пограничный слой практически полностью вытесняет ядро потока. Возмущения распространяются вверх по каналу. Затем (1 мс) формируется прямой скачок уплотнения, распространяющийся вверх по потоку и вызывающий отрыв пограничного слоя. Движение скачка поддерживается горением в слое смешения, который образуется за тройной точкой под прямым скачком. По мере приближения к инжектору прямой скачок вместе с этим слоем смешения входят в область все более низких температур, обусловленных низкой температурой инжектируемого водорода. В определенный момент температура за скачком становится недостаточной для самовоспламенения, и горение отделяется от скачка уплотнения. Это приводит к вырождению прямого скачка уплотнения. Однако срыва горения не происходит: к моменту 2.5 мс отрывная зона фиксируется в области следа за инжектируемой струей и взаимодействует с газодинамической структурой, порождённой струей водорода. В результате этого взаимодействия локально возникают благоприятные

условия для горения. Крупномасштабные движения границы пограничного слоя приводят к тому, что в ядре потока периодически возникают сильные ударные волны, образующие локальные дозвуковые области течения. На рисунке 107 также показаны моменты, близкие к концам первого и второго условных “периодов” — 6.5 мс и 9.5 мс.

Можно видеть, что в течение первого условного “периода” (между моментами $г$ и $д$) происходит существенная перестройка ударно-волновой структуры течения в районе инъекции топлива. В момент $г$ (2.5 мс) трехмерная ударная волна, вызванная запиранием канала, располагается при $x \approx 0.215$ м. В области её пересечения с горизонтальной плоскостью симметрии канала видна небольшая область дозвукового сечения. К концу первого “периода” (6.5 мс, см. рис. 92) она смещается вперед и останавливается перед инжектируемой струей водорода. Из-за созданного этой ударной волной противодействия отрыв перед струей топлива увеличивается по длине и высоте. Благодаря трёхмерной форме ударной волны область дозвукового течения у плоскости симметрии канала в районе струи исчезает. В течение второго условного “периода” ударно-волновая структура в окрестности инъекции почти не меняется. Другая дозвуковая область в ядре потока продолжает менять форму и колебаться между координатами 0.238 м и 0.242 м, то увеличиваясь, то уменьшаясь (ср. моменты $г$ и $е$). Отметим, что в RANS-расчётах ONERA [5] дозвуковая область оказывается расположенной в сечении 0.236 м в плоскости симметрии и занимает около 1 мм в каждом боковом направлении от плоскости симметрии.

Стоит также отметить, что в IDDES-расчёте периодически прямой скачок уплотнения переходит в пересечение косых скачков уплотнения и запираение исчезает. Крайние положения локального запираения в первом «периоде» составили 0.254 м и 0.236 м; качественно схожие поля можно видеть на рисунке 107 в моменты времени 6.5 и 9.5 мс соответственно. Длительность времени, в течение которого в первом условном «периоде» присутствовало локальное запираение, составила 3.2 мс (длительность всего «периода» — 3.5 мс).

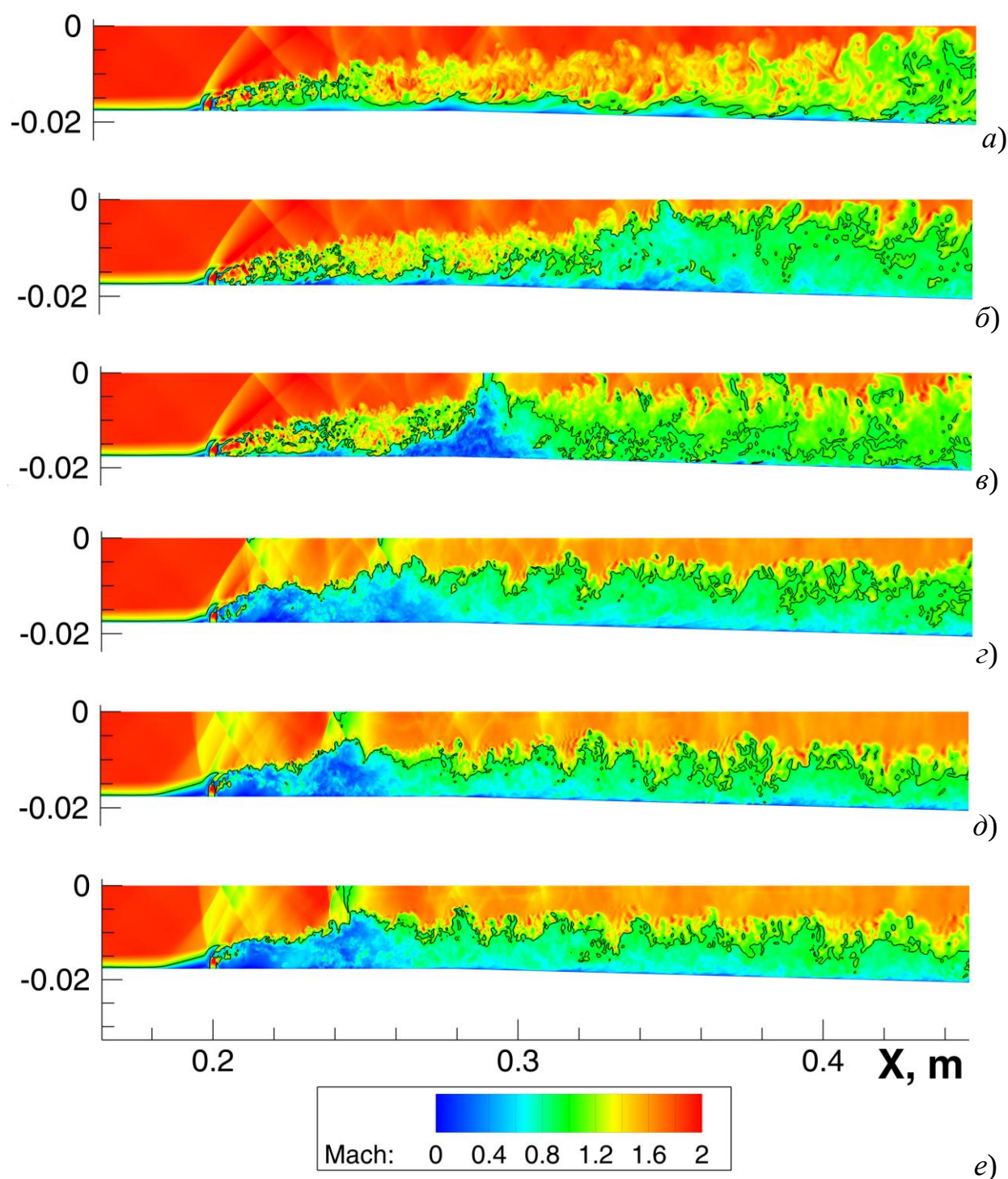


Рисунок 107 — Поле числа Маха в последовательные моменты времени в IDDES-расчёте: а) 0.01 мс, б) 0.5 мс, в) 1 мс, г) 2.5 мс, д) 6.5 мс, е) 9.5 мс,. Чёрная линия — $M=1$

Во втором условном «периоде» дозвуковые области присутствовали на протяжении всего периода, хотя их вертикальный размер и варьировался от 2 мм до полного перекрытия канала. При этом передний край дозвуковой области колеблется в диапазоне от 0.236 м до 0.24 м. Подобные явления наблюдались и в

эксперименте. Стабилизация режима горения в IDDES-расчёте обусловлена взаимодействием турбулентности, ПС и газодинамической структуры. Топливо из инжектируемой турбулентной струи и отрывной области за ней попадает в пограничный слой, на который падает косой скачок уплотнения, увеличивая толщину ПС, температуру и давление. За счёт этого возникают благоприятные условия для самовоспламенения, которое дополнительно увеличивает значения температуры, давления и толщины ПС вплоть до запираания канала и образования прямого скачка уплотнения, бегущего вверх по потоку, сдвигая область повышенного давления и температуры, до тех пор, пока не окажется в сечении, в котором топливо с окислителем недостаточно перемешаны для самовоспламенения. В результате, горение за скачком исчезает, а, следовательно, из-за понижения температуры и давления, исчезает и сам прямой скачок. Весь процесс возобновляется.

В случае же RANS-расчёта локальное запираение воспроизвести не удалось; горение стабилизировалось за счёт высокой температуры стенки. По-видимому, в RANS-расчёте газодинамическая структура играет второстепенную роль в стабилизации самовоспламенения. Впрочем, и в эксперименте, и в IDDES-расчёте запираение оказывается локальным и существенно нестационарным. Поэтому после осреднения по времени (в рамках RANS-подхода) дозвуковые области в ядре потока могут исчезнуть.

Заключение

В диссертационной работе с использованием численных методов получено решение задачи о горении при поперечной инжекции топлива в сверхзвуковой поток в канале прямоугольного сечения. Полученные результаты имеют важное значение для развития газовой динамики турбулентных течений с горением и для практических приложений.

По итогам проделанной работы можно сделать следующие выводы:

1. Предложена методика выбора пространственно-временных аппроксимаций и настройки констант подсеточной модели для гибридного вихреразрешающего метода. На основе данной методики выбрана гибридная схема, основанная на центральной разности 2-го порядка и явном трёхшаговом методе Хойна. Эта схема дает максимальную вычислительную эффективность на квазиравномерной сетке. Рекомендовано находить оптимальные значения констант подсеточной модели после согласования начальных полей параметров модели турбулентности с начальным полем скорости. Тогда значения констант почти не зависят от шага сетки — по крайней мере, если масштаб отсечки попадает в инерционный интервал.
2. Установлено влияние различных физических факторов на структуру турбулентного течения с горением в канале. Было показано, что учёт стёкол слабо влияет на распределение давления вдоль канала ($\Delta\epsilon=0.4\%$) и немного изменяет форму центрального отрыва. Шероховатость и температура стенок сильно изменяют распределение давления ($\Delta\epsilon>6\%$), но почти не влияют на структуру отрыва. Нелинейная модель для турбулентных напряжений в случае RANS-подхода и генерация синтетической турбулентности в случае IDDES-подхода умеренно изменяют распределение давления ($\Delta\epsilon<2\%$), но существенно меняют структуру и положение отрывных зон и ударно-волновую структуру ядра потока.
3. В рамках выбранной физико-математической модели течения выявлен механизм стабилизации режима горения в рассматриваемом канале.

Стабилизация обусловлена взаимодействием турбулентности, пограничных слоёв и газодинамической структуры. Самовоспламенение возникает в пограничном слое за одним из отражённых скачков уплотнения, вызывая утолщение пограничного слоя и временное запираание канала. Это приводит к смещению ударно-волновой структуры в сторону инжектора, где температура в слое смешения оказывается все более низкой. В некоторый момент она становится недостаточной для самовоспламенения. Горение прекращается. Но в дальнейшем оно возникает снова за одним из отражённых скачков уплотнения. Таким образом, горение удерживается в ограниченной области пространства. Выполненные RANS-расчеты на той же сетке породили стационарное решение со стабилизацией горения за счет самовоспламенения в слое смешения струи или в развитой отрывной зоне под сильным скачком уплотнения.

За рамками описанного в диссертации исследования остался ряд проблем, которые предстоит решить в будущем. В частности, можно предположить, что ошибки модели турбулентности SST в области благоприятного градиента давления влияют и на результаты гибридных расчётов, где эта модель используется вблизи стенки. Таким образом, интересным направлением будущих исследований является усложнение модели турбулентности в RANS-подслое гибридного расчёта, например, переход к дифференциальной модели для напряжений Рейнольдса. Стоит отметить, что в финальном вихреразрешающем расчёте центральный отрыв достиг инжектируемой струи и присоединился к отрыву за ней. Продольное распределение давления при этом на участке (0.3;0.6) оказалось существенно завышенным по сравнению с экспериментом и RANS-расчётами. Завышенное давление указывает на более интенсивное тепловыделение в этой области. Это означает, что условия для самовоспламенения в случае вихреразрешающего подхода наступают гораздо раньше, чем в RANS-расчёте, что требует отдельного изучения. Ещё одним вопросом остаётся описание отрыва перед инъекцией — во всех расчётах

распределение давления перед подачей топлива не совпадает с экспериментальным. Вероятной причиной этого может быть недостаточная густота сетки в этой области. Корректное моделирование этого отрыва и его влияние на процесс горения остаётся открытым вопросом. Ещё одно направление, требующее дальнейшего исследования, — возможно завышенный уровень кинетической энергии в ПС перед инжекцией. STG переводит энергию турбулентности, полученную в ходе RANS-расчёта, в разрешённую и подсеточную энергии с сохранением суммарной величины. Однако исходное значение берётся из относительно грубого RANS-расчёта подогревателя и может быть завышенным. Это может не сказываться на дальнейших RANS-расчётах, но влиять на вихреразрешающие. Уменьшение энергии турбулентности на входе в канал приведёт к уменьшению подсеточной энергии. Таким образом, вихревая вязкость и степень смешения топлива и окислителя уменьшатся. Стоит также отметить, что везде в расчётах в целях экономии ресурсов рассматривалась нижняя половина канала с условием симметрии. Согласно экспериментальным данным (4098 снимков, коэффициент корреляции между начальными участками верхнего и нижнего пламени ≈ 0.95) выбранный режим является статистически симметричным, однако мгновенные положения верхнего и нижнего пламени могут отличаться до 6 мм в продольном направлении. В рамках вихреразрешающего расчёта это может оказаться существенным. Исследование данного вопроса потребует построение полной модели, и, как следствие, увеличение вычислительных ресурсов не менее чем в два раза. Также во всех расчётах, как представленных в данной работе, так и в зарубежных, не удалось воспроизвести полочку давления на участке (0.4;0.6). Возможно, что это связано с неучтённой в рамках расчётов нишей в нижней стенке канала толщиной 1 мм. Также возможно, что данный эффект определяется взаимодействием мелких и крупных масштабов турбулентности напрямую, что не описывается выбранным численным методом. Для учёта данного эффекта требуется включение дополнительных членов уравнений и их корректная аппроксимация.

Список литературы

1. Vincent-Randonnier A., Moule Y., Ferrier M. Combustion of hydrogen in hot air flows within LAPCAT-II dual mode ramjet combustor at Onera-LAERTE facility- Experimental and numerical investigation // AIAA Paper 2014-2932, 2014.
2. Fotia M.L. Mechanics of Combustion Mode Transition in a Direct-Connect Ramjet–Scramjet Experiment // J. of Propulsion and Power, Vol. 31, No. 1, 2015. pp. 69-78.
3. Fotia M.L., Driscoll J.F. Isolator–Combustor Interactions in a Direct-Connect Ramjet-Scramjet Experiment // J. of Propulsion and Power, Vol. 28, No. 1, 2012. pp. 83-95.
4. Micka J. Combustion stabilization, structure, and spreading in a Laboratory Dual-Mode scramjet combustor, The University of Michigan, Dissertation 2010.
5. Pelletier G., Ferrier M., Vincent-Randonnier A., Sabelnikov V., Mura A. Wall roughness effects on combustion development in confined supersonic flow // J. of Propulsion and Power, Vol. 37, No. 1, 2021. pp. 151-166.
6. Fureby C. Large eddy simulations of the LAPCAT-II and the SSFE combustor configurations // AIAA SciTech Forum, No. 2020-1109, 2020.
7. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 56, 1894. pp. 40-45.
8. Meneveau C., Katz J. Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation // Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 32, 2000. pp. 1-32.
9. Sagaut P. Large eddy simulation for incompressible flows: an introduction. 3rd ed. Springer Science & Business Media, 2006.
10. Rodi W., Constantinescu G., Stoesser T. Large-eddy simulation in hydraulics. Hoboken: CRC Press, 2013.
11. Barnett H.C., Hibbard R.R. Basic considerations in the combustion of hydrocarbon fuels with air. NACA-TR-1300, 1957. 273 pp.
12. Knudsen M. The kinetic theory of gases. London: Methuen & Co., 1934.
13. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса (перепечатка 1941) // УФН, Т. 93, № 3, 1967. С. 476-481.

14. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. 2nd ed. DCW Industries, 1998.
15. Poinso T., Veynante D. Theoretical and numerical combustion. 2nd ed. R.T. Edwards, 2005. 522 pp.
16. Rathakrishnan E. Theoretical Aerodynamics. John Wiley & Sons, 2013.
17. Ferziger J.H., Kaper H.G. Mathematical theory of transport processes in gases. Amsterdam. 1972. 579 pp.
18. Burcat A., Ruscic B. Third millenium ideal gas and condensed phase thermochemical database for combustion with updates from active thermochemical tables, Argonne nat. lab., Argonne, 2005.
19. Kee R.J., Rupley F.M., Meeks E., Miller J.A. CHEMKIN-III: A FORTAN chemical kinetics package for the analysis of gas-phase chemical and plasma kinetics, Sandia national laboratories, SAND96-8216, 1996.
20. Глушко ВП, editor. Термодинамические свойства индивидуальных веществ в 6 томах. Москва: Наука, 1978-2004.
21. Штиллер В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика. Москва: Мир, 2000. 176 с.
22. Westbrook C.K., Dryer F.L. Simplified reaction mechanisms for the oxidation of hydrocarbon fuels in flames // Combustion science and technology, Vol. 27, No. 1-2, 1981. pp. 31-43.
23. Davidenko D., Gökalp I., Dufour E., Magre P. Numerical simulation of hydrogen supersonic combustion and validation of computational approach // 12th AIAA Int. space planes and hypersonic systems and tech. Norfolk. 2003.
24. Li J., Zhao Z., Kazakov A., Dryer F.L. An updated comprehensive kinetic model of hydroge combustion // Int. J. of chemical kinetics, Vol. 36, No. 10, 2004. pp. 566-575.
25. McAllister S., Chen J.Y., Fernandez-Pello A.C. Fundamentals of combustion processes. New York: Springer, 2011. 15-47 pp.
26. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). 2-е изд. Москва: Наука, 1977. 440 с.
27. Troshin A.I. A turbulence model taking into account the longitudinal flow inhomogeneity in mixing layers and jets // Progress in Flight Physics, Vol. 9, 2017. pp. 481-496.

28. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment // Monthly weather review, Vol. 91, No. 3, 1963. pp. 99-164.
29. Lilly D.K. The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments York-town Heights. 1967. pp. 195-210.
30. Deardorff J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // J. Fluid Mech., Vol. 41, 1970. pp. 453-480.
31. Deardorff J.W. The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence // J. of Fluids Engineering, Vol. 9, 1973. pp. 429-438.
32. Белоцерковский О.М. Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности // ЖВМиМФ, Т. 25, № 12, 1985. С. 1856-1882.
33. Batchelor G.K. The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge: University press, 1953. 197 pp.
34. Chapman D.R. Computational aerodynamics development and outlook // AIAA Journal, Vol. 17, No. 12, 1979. pp. 1293-1313.
35. Craft T.J., Gerasimov A.V., Iacovides H., Launder B.E. Progress in the generalization of wall-function treatments // Int. j. of heat and fluid flow, Vol. 23, No. 2, 2002. pp. 148-160.
36. Spalart P.R., Jou W.H., Strelets M., Allmaras S.R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // In: Advances in DNS/LES / Ed. by Liu C., Liu Z. Columbus: OH: Greyden Press, 1997. pp. 137-147.
37. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M., Travin A. Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack // In: Engineering turbulence modelling and experiments 4 / Ed. by Rodi W., Laurence D. Oxford: UK: Elsevier Sci., 1999. pp. 669-678.
38. Spalart P.R. Detached-Eddy Simulation // Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 41, 2009. pp. 181-202.
39. Spalart P.R., Deck S., Shur M.L., Squires K.D., Strelets M.K., Travin A.K. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities // Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 20, No. 3, 2006. pp. 181-195.
40. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities // Int. J. Heat Fluid Flow, Vol. 29, 2008. pp. 1638-1649.
41. Nikitin V., Nicoud F., Wasistho B., Squires K.D., Spalart P.R. An approach to wall

- modeling in Large-Eddy Simulations // *Physics of Fluids*, Vol. 12, No. 7, 2000. pp. 1629-1632.
42. Law C.K. Mechanisms of flame stabilization in subsonic and supersonic flows // *Major research topics in combustion*, 1992. pp. 201-236.
 43. Власенко В.В. О различных способах определения теплового эффекта и полноты сгорания в потоке реагирующего газа // *Учёные записки ЦАГИ*, Т. 45, № 1, 2014. С. 22-40.
 44. Liu Q., Baccarella D., Lee T. Review of combustion stabilization for hypersonic airbreathing propulsion // *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 119, 2020. P. 100636.
 45. Щетинков Е.С. Физика горения газов. Москва: Наука, 1965. 292 с.
 46. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. Москва: Мир, 1987. 588 с.
 47. Steinberg A.M., Arndt C.M., Meier W. Parametric study of vortex structures and their dynamics in swirl-stabilized combustion // *Proceedings of the Combustion Institute*, Vol. 34, No. 2, 2013. pp. 3117-3125.
 48. Ling W., Zhu P., Zhang Y., Wang Y., Wang Y., Jiang N. Experimental Study on the Ignition/Extinction Performances of a Central Staged Direct Mixing Combustor and the Construction of an Engineering Prediction Model // *Aerospace*, Vol. 12, No. 3, 2025.
 49. Ben-Yakar A. Experimental investigation of mixing and ignition of transverse jets in supersonic crossflows, Stanford university, Dissertation 2000.
 50. Lin K.C., Ryan M., Carter C., Gruber M., Raffoul C. Raman scattering measurements of gaseous ethylene jets in a Mach 2 supersonic crossflow // *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 26, No. 3, 2010. pp. 503-513.
 51. Gamba M., Miller V.A., Mungal G. The reacting transverse jet in supersonic crossflow: physics and properties // *19th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference*, 2014. P. 3107.
 52. Walther R., Sabelnikov V., Korontsvit Y., Voloschenko O., Ostras V., Sermanov V. Progress in the joint German-Russian scramjet technology programme, ISABE Paper 95-7121, 1995.
 53. Sabel'nikov V., Korontsvit Y., Ivanov V., Voloschenko O., Zosimov S., Schadow K. Investigation of supersonic combustion enhancement using barbotage and injectors with noncircular nozzles // *8th AIAA International Space Planes and*

Hypersonic Systems and Technologies Conference, 1998. P. 1516.

54. Сабельников В.А., Пензин В.И. К истории исследований в области высокоскоростных ПВРД в России. Москва: ЦАГИ, 2008. 64 с.
55. Barber M.J., Shetz J.A., Roe L.A. Normal, sonic helium injection through a wedge-shaped orifice into supersonic flow // *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 13, 1997. pp. 257-263.
56. Hirano K., Matsuo A., Kouchi T., Izumikawa M., Tomioka S. New injector geometry for penetration enhancement of perpendicular jet into supersonic flow, 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Jt. Propuls. Conf. Exhib AIAA 2007-5028, 2007.
57. Hariharan A.R., Babu V. Transverse injection into a supersonic cross flow through a circular injector with chevrons // *J. Fluids Eng.*, Vol. 136, No. 2, 2013.
58. Chang J., Zhang J., Bao W., Yu D. Research progress on strut-equipped supersonic combustors for scramjet application // *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 103, 2018. pp. 1-30.
59. Баев В.К., Климчик Г.В., Константиновский В.А., Соловова Е.А., Третьяков П.К. Диффузионное горение водорода в плоском канале с внезапным расширением // *Физика горения и взрыва*, Т. 12, № 3, 1976. С. 382-389.
60. Власенко В.В. Расчётно-теоретические модели высокоскоростных течений газа с горением и детонацией в каналах, ФГУП ЦАГИ, Жуковский, Диссертация 2017.
61. Виноградов В.А., Шихман Ю.М., Гольдфельд М.А., Старов А.В. Рабочий процесс и стабилизация горения керосина в модели камеры сгорания при больших скоростях потока на входе // *Физика горения и взрыва*, Vol. 49, No. 5, 2013. pp. 8-16.
62. Власенко В.В., Волощенко О.В., Иванькин М.А., Николаев А.А., Чевагин А.Ф., Ширяева А.А., Семёнов И.В., Фролов С.М., Зангиев А.Э., Фролов Ф.С. Исследования высокоскоростных течений в модельных камерах сгорания // В кн.: *Результаты фундаментальных исследований в прикладных задачах авиастроения*. Москва: Наука, 2016. С. 215-227.
63. Magre P., Moreau P., Collin G., Borghi R., Péalat M. Further studies by CARS of premixed turbulent combustion in a high velocity flow // *Combust.&Flame*, Vol. 71, No. 2, 1988. pp. 147-168.
64. Баев В.К., Бузуков А.А., Зудов В.Н., Третьяков П.К., Шумский В.В. Физическое и математическое моделирование течений с горением в каналах с внезапным расширением при существенном проявлении нестационарности,

65. Власенко В.В., Волощенко О.В., Фролов С.М., зангиев А.Э., Семёнов И.В., Фролов Ф.С. Влияние теплообмена, турбулентности и кинетики на колебательный процесс в модельной высокоскоростной камере сгорания с уступом // Горение и взрыв, Т. 11, № 2, 2018. С. 40-50.
66. Фёдорова Н.Н., Гольдфельд М.А., Пикалов В.В. Исследование пульсационных режимов в высокоскоростном потоке с теплоподводом. I. Эксперимент // Физика горения и взрыва, Т. 58, № 5, 2022. С. 33-43.
67. Wang Z., Wang H., Sun M. Review of cavity-stabilized combustion for scramjet applications // Proc. Inst. Mech. Eng. Part G: J. Aerosp. Eng., Vol. 228, 2014. pp. 2718 – 2735.
68. Barnes F.W., Segal C. Cavity-based flameholding for chemically-reacting supersonic flows // Progress in Aerospace Sciences, Vol. 76, 2015. pp. 24-41.
69. Ефимов Б.Г., Иванов В.В., Скворцов В.В., Стародубцев М.А. Стабилизация горения пропана в сверхзвуковом потоке воздуха с помощью неравновесного продольного разряда и соосной с ним локальной зоны пониженного давления // Известия РАН. Механика жидкости и газа, Т. 4, 2010. С. 142-151.
70. Леонов С.Б., Савелкин К.В., Фирсов А.А., Яранцев Д.А. Зажигание топлива и стабилизация фронта пламени в сверхзвуковом потоке при помощи электрического разряда // Теплофизика высоких температур, Т. 48, № 6, 2010. С. 941-947.
71. Firsov A., Bityurin V., Tarasov D., Dobrovolskaya A., Troshkin R., Bocharov A. Longitudinal DC discharge in a supersonic flow: numerical simulation and experiment // Energies MDPI, Vol. 15, No. 19, 2022. P. 7015.
72. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Копыл П.В., Логунов А.А. Стабилизация с помощью низкотемпературной плазмы сверхзвукового горения пропана в расширяющемся аэродинамическом канале // Теплофизика высоких температур, Т. 57, № 2, 2019. С. 183-197.
73. Зудов В.Н., Третьяков П.К., Тупикин А.В. оспламенение и стабилизация гомогенного горения в высокоскоростном потоке импульсно-периодическим лазерным излучением // Nonequilibrium processes, 2019. С. 174-183.
74. Ombrello T., Qin X., Ju Y., Gutsol A., Fridman A., Carter C. Combustion enhancement via stabilized piecewise nonequilibrium gliding arc plasma discharge // AIAA Journal, Vol. 44, 2006. pp. 42-150.
75. Do H., Mungal M.G., Cappelli M.A. Jet flame ignition in a supersonic crossflow

using a pulsed nonequilibrium plasma discharge // IEEE Trans. Plasma Sci., Vol. 36, 2008. pp. 2918 – 2923.

76. Vlasenko V.V., Sabelnikov V.A., Molev S.S., Voloschenko O.V., Ivankin M.A., Frolov S.M. Transient combustion phenomena in high-speed flows in ducts // Shock Waves, Vol. 30, No. 3, 2020. pp. 245-261.
77. Cohen L.S., Guile R.N. Investigation of the mixing and combustion of turbulent, compressible free jets // AIAA 5th propulsion joint specialist conf. 1969. pp. 69-538.
78. Eggers J.M. Turbulent mixing of coaxial compressible hydrogen-air jets, NASA, TN D-6487, 1971.
79. Evans J.S., Schexnayder C.J., Beach H.L. Application of a two-dimensional parabolic program to prediction of turbulent reacting flows, NASA, TP-1169, 1978.
80. Cheng T.S., Wehrmeyer J.A., Pitz R.W., Jarrett O., Northam G.B. Raman measurement of mixing and finite-rate chemistry in a supersonic hydrogen-air diffusion flame // Combustion and flame, Vol. 99, No. 1, 1978. pp. 157-173.
81. Burrows M.C., Kurkov A.P. Analytical and experimental study of supersonic combustion of hydrogen in a vitiated airstream, NASA, TM-X-2828, 1973.
82. Suraweera M., Mee D., Stalker R. Skin friction reduction in hypersonic turbulent flow by boundary layer combustion // 43rd AIAA aerospace sciences meeting and exhibit. 2005. P. 613.
83. Won S.H., Jeung I.S., Shin J.R., Cho D.R., Choi J.Y. Three-Dimensional Dynamic Characteristics of Transverse Fuel Injection into a Supersonic Crossflow, AIAA Paper 2008-2515, 2008.
84. Won S.H., Jeung I.S., Choi J.Y. DES Investigation of the Ignition of Hydrogen Transverse Jet into High Enthalpy Supersonic Crossflow, AIAA Paper 2009-1557, 2009.
85. Won S.H., Jeung I.S., Parent B., Choi J.Y. Numerical investigation of transverse hydrogen jet into supersonic crossflow using detached-eddy simulation // AIAA Journal, Vol. 48, No. 6, 2010. pp. 1047-1058.
86. Liu C., Wang Z., Wang H., Sun M. Numerical investigation on mixing and combustion of transverse hydrogen jet in a high-enthalpy supersonic crossflow // Acta Astronautica, Vol. 116, 2015. pp. 93-105.
87. Ширяева А.А. Особенности численного метода и результаты тестирования

программы ZEUS-S3pp для моделирования трехмерных течений с горением // Труды ЦАГИ, 2014.

88. Troshin A., Vlasenko V., Sabelnikov V. Large eddy simulation of a transverse hydrogen jet in supersonic crossflow // Proceedings of EUCASS. 2019.
89. Valger S., Fedorova N. Study of coherent structures effect on mixing characteristics of jet injection into supersonic crossflow, AIP Conference Proceedings Vol. 2351. – No.1, 2021.
90. Баев В.К., Третьяков П.К., Забайкин В.А. Термогазодинамический анализ процесса в камере сгорания с внезапным расширением при сверхзвуковой скорости на входе и существенном проявлении нестационарности процесса, ИТПМ СО РАН, Новосибирск, №3-2000, 2000.
91. Ivankin M., Nikolaev A., Sabelnikov V., Shiryaeva A., Talyzin V., Vlasenko V. Complex numerical-experimental investigations of combustion in model high-speed combustor ducts // Acta Astronautica, Vol. 158, 2019. pp. 425-437.
92. Roudakov A., Kopchenov V., Bezgin V., Gouskov O., Lomkov K., Prokhorov A. Researches of hypersonic propulsion in Central Institute of Aviation Motors // 4th symposium on aerothermodynamics for space vehicles. 2002. Vol. 487. pp. 81-92.
93. Аврашков В.Н., Метёлкина Е.С., Мещеряков Д.В. Исследование высокоскоростных ПВРД // Физика горения и взрыва, Т. 46, № 4, 2010. С. 36-44.
94. Gardner A.D., Hannemann K., Pauli A., Steelant J. Ground testing of the HyShot supersonic combustion flight experiment in HEG // Proc. 24th int. symp. shock waves. Beijing. 2005. pp. 329-334.
95. O'Byrne S., Danehy P., Cutler A. Dual-pump CARS thermometry and species concentration measurements in a supersonic combustor // AIAA Paper, No. 710, 2004. P. 16.
96. Jackson K., Gruber M., Barhorst T. The HIFiRE flight 2 experiment: an overview and status update // AIAA Paper, No. 5029, 2009. P. 19.
97. Shiryaeva A., Sabelnikov V. Critical analysis of classical turbulent combustion experiments on the basis of RANS simulation // AIP conf. proceedings. 2018. Vol. 2027.
98. McDaniel J., Fletcher D., Hartfield R., Hollo S. Transverse injection into Mach 2 flow behind a rearward-facing step - A 3-D, compressible flow test case for hypersonic combustor CFD validation // AIAA, No. A92-31693, 1991.

99. Segal C., McDaniel J.C., Krauss R.H., Whitehurst III R.B. Combustion efficiency determined from wall pressure and temperature measurement in a Mach 2 combustor // AIAA , No. A91-21336, 1991. pp. 1-10.
100. Sharma V., Eswaran V., Chakraborty D. Determination of optimal spacing between transverse jets in a SCRAMJET engine // Aerospace science and technology, 2019.
101. Menter F.R. Review of the shear-stress transport turbulence model experience from an industrial perspective // Int. J. Comput. Fluid Dyn., Vol. 23, No. 4, 2009. pp. 305-316.
102. Micka D.J., Driscoll J.F. Combustion characteristics of a dual-mode scramjet combustor with cavity flameholder // Proc. of the comb. inst., Vol. 32, No. 2, 2009. pp. 2397-2404.
103. Fotia M.L. Experimental study of shock-train/combustion coupling and flame dynamics in a heated supersonic flow, The University of Michigan, Dissertation 2012.
104. Annamalai K., Puri I.K. Combustion science and engineering. CRC Press, 2006.
105. Fureby C. The complexity of LES of high-speed reactive flows for combustor applications // AIAA SciTech Forum, 2020.
106. Kim W.W., Menon S. A new dynamic one equation subgrid-scale model for large eddy simulations // AIAA, No. 95-0356, 1995.
107. Sabelnikov V.A., Fureby C. LES combustion modeling for high Re flames using a multi-phase analogy // Comb. Flame, No. 160, 2013. P. 83.
108. Jachimowski C.J. An analytical study of the hydrogen–air reaction mechanism with application to scramjet combustion, NASA-TP-2791, 1988.
109. Zettervall N., Fureby C. A computational study of ramjet, scramjet and dual-mode ramjet combustion in combustor with a cavity flameholder // AIAA, No. 2018-1146, 2018.
110. Jeong S.M., Lee J.H., Choi J.Y. Numerical investigation of low-frequency instability and frequency shifting in a scramjet combustor // Proc. Comb. Inst., Vol. 39, No. 3, 2023. pp. 3107-3116.
111. Cheng Y., Chen Q., Niu X., Cai S. Large eddy simulation and dynamic mode decomposition of supersonic combustion instability in a strut-based scramjet combustor // Aerospace, Vol. 10, No. 857, 2023.
112. Li F., Zhang J., Zhao G., Sun M., Li F., Ma G., Liu M. Combustion modes of

- kerosene spray in a scramjet combustor with different injection schemes // Phys. Fluids, Vol. 36, No. 096104, 2024.
113. Wang T.Y., Cai Z., An B., Wang J.R., Sun M.B., Liang C.H., Wang Z.G. Behaviors of the reacting flowfield during the spontaneous formation of ramjet mode under a supersonic inflow // Phys. Fluids, Vol. 35, No. 024105, 2023.
 114. Frost M., Paull A., Alesi H. HyShot T4Supersonic combustion experiments, NASA, Queensland, NAG- 1-2113, 2001.
 115. Hannemann K., Karl S., Schramm J.M., Steelant J. Methodology of a combined ground based testing and numerical modelling analysis of supersonic combustion flow paths // Shock Waves, Vol. 20, 2010. pp. 353-366.
 116. Laurence S., Schramm J.M., Karl S., Hannemann K. An experimental investigation of steady and unsteady combustion phenomena in the HyShot II combustor // AIAA Paper, No. 2011-2310, 2011.
 117. Laurence S., Schramm J.M., Karl S., Hannemann K. Ground-based testing of the Hyshot II combustor using OH* chemiluminescence // proceedings of the 7th European symposium on aerothermodynamics for space vehicles. Brugge. 2011.
 118. Ingenito A., Cecere D., Giacomazzi E. Large eddy simulation of turbulent hydrogen-fuelled supersonic combustion in an air cross-flow // Shock Waves, Vol. 23, No. 5, 2013. pp. 481-494.
 119. Cecere D., Ingenito A., Giacomazzi E., Romagnosi L., Bruno C. Hydrogen/air supersonic combustion for future hypersonic vehicles // Int. J. hydrogen energy, Vol. 36, No. 18, 2011. pp. 11969-11984.
 120. Tang T., Wang Z., Yu J., Huang Y., Sun M., Wang H., Zhao G., Yang Y., Xiong D. Numerical study of transverse jet mixing and combustion in a high-enthalpy supersonic crossflow with trace gases // Phys. Fluids, Vol. 35, No. 036120, 2023.
 121. Бахнэ С., Власенко В.В., Волощенко О.В., Зосимов С.А., Иванькин М.А., Курсаков И.А., Матяш С.В., Михайлов С.В., Молев С.С., Морозов А.Н. и др. Опыт тестирования и применения программы zFlare для численного моделирования течений с горением в каналах // Труды ЦАГИ, № 2810, 2022. С. 34-98.
 122. Безруков Д.В., Власенко В.В., Морозов А.Н., Ноздрачев А.Ю. Комплексная панорамная мультиспектральная визуализация горения на экспериментальном стенде // Физика горения и взрыва, Т. 60, № 4, 2024.
 123. Sabnis K. Supersonic corner flows in rectangular ducts, University of Cambridge, Cambridge, Ph.D. Thesis 2020.

124. Babinsky H., Harvey J.K. Shock wave-boundary-layer interactions. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
125. Bruce P.J.K., Burton D.M.F., Titchener N.A., Babinsky H. Corner effect and separation in transonic channel flows // J. of Fluid Mechanics, No. 679, 1997. pp. 247-262.
126. Xiang X., Babinsky H. Corner effects for oblique shock wave/turbulent boundary layer interactions in rectangular channels // J. of Fluid Mechanics, No. 862, 2019. pp. 1060-1083.
127. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, heat and mass transfer, Vol. 4, No. 1, 2003. pp. 625-632.
128. Cécora R.D., Radespiel R., Eisfeld B., Probst A. Differential Reynolds-Stress Modeling for Aeronautics // AIAA Journal, Vol. 53, No. 3, 2015. pp. 739-755.
129. Bruce P.J.K., Babinsky H., Tartinvill B., Hirsch C. Corner effect and asymmetry in transonic channel flows // AIAA Journal, Vol. 49, No. 11, 2011. pp. 2382-2392.
130. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulations // Int. J. Heat Fluid Flow, Vol. 21, 2000. pp. 252-263.
131. Mani M., Babcock D., Winkler C., Spalart P.R. Predictions of a supersonic turbulent flow in a square duct // 51st AIAA Aerospace sciences meeting, 2013.
132. Boychev K. Shock wave-boundary-layer interactions in high-speed intakes, University of Glasgow, Glasgow, Ph.D. Thesis 2021.
133. Hellsten A. New advanced k- ω turbulence model for high-lift aerodynamics // AIAA Journal, Vol. 43, No. 9, 2005. pp. 1857-1869.
134. Gritskevich M.S., Garbaruk A.V., Schütze J., Menter F.R. Development of DDES and IDDES formulations for the k- ω Shear Stress Transport model // Flow Turbulence Combust, Springer, Vol. 88, 2012. pp. 431-449.
135. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. An Enhanced Version of DES with Rapid Transition from RANS to LES in Separated Flows // Flow Turbulence Combust, Springer. 2015. No. 95. pp. 709-737.
136. Shu C.W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // J. of Comp. Physics, Vol. 77, No. 2, 1988. P. 439—471.
137. Shu C.W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. II // J of Comp. Physics, Vol. 83, No. 1, 1989. pp. 32-78.

138. Zhang R., Zhang M., Shu C.W. On the order of accuracy and numerical performance of two classes of finite volume WENO schemes // *Communications in Computational Physics*, Vol. 9, No. 3, 2011. pp. 807-827.
139. Buchmüller P., Helzel C. Improved accuracy of high-order WENO finite volume methods on Cartesian grids // *J. Sci. comput.*, Vol. 61, 2014. pp. 343-368.
140. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Математический сборник*, Т. 47(89), № 3, 1959. С. 271-306.
141. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // *Journal of Computational Physics*, Vol. 32, No. 1, 1979. pp. 101-136.
142. Suresh A., Huynh H. Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge–Kutta Time Stepping // *J. of Computational Physics*, Vol. 136, No. 1, 1997. pp. 83-99.
143. Годунов С., Забродин А., Иванов М., Крайко А., Прокопов Г. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Москва: Наука, 1976.
144. Guseva E.K., Garbaruk A.V., Strelets M.K. An automatic hybrid numerical scheme for global RANS-LES approaches // *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 929, No. 1, 2017.
145. Martin M.P., Taylor E.M., Wu M., Weirs V.G. A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence // *Journal of Computational Physics*, Vol. 220, 2006. pp. 270-289.
146. Hu X.Y., Wang Q., Adams N.A. An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme // *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, 2010. pp. 8952-8965.
147. Taylor E.M., Wu M., Martin M.P. Optimization of nonlinear error for weighted essentially non-oscillatory methods in direct numerical simulations of compressible turbulence // *Journal of Computational Physics*, Vol. 223, 2007. pp. 384-397.
148. Kaizhuo Lei, Xiaolong Liu, Ning Li, Xuchao Fan. An Optimized Symmetric WENO Method-Based Numerical Simulation of Intense Sound Field Generated by Underwater Plasma Sound Source // *Journal of Sensors*, Vol. 2018, 2018.
149. Sun D., Guo Q., Li C., Liu P. Assessment of optimized symmetric fourth-order weighted essentially non-oscillatory scheme in direct numerical simulation of compressible turbulence // *Computers and Fluids*, Vol. 197, 2020.

150. Li Q., Guo Q., Sun D., Liu P., Zhang H. A Fourth-Order Symmetric WENO Scheme with Improved Performance by New Linear and Nonlinear Optimizations // J Sci Comput, Vol. 71, 2017. pp. 109-143.
151. Borges R., Carmona M., Costa B., Don W.S. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics, Vol. 227, 2008. pp. 3191-3211.
152. Li L., Wang H., Zhao G., Sun M., Xiong D., Tang T. Efficient WENOCU4 scheme with three different adaptive switches // J Zhejiang Univ-Sci A (Applied Physics & Engineering), Vol. 21, No. 9, 2020. pp. 695-720.
153. Zhao S., Lardjane N., Fedioun I. Comparison of improved finite-difference weno schemes for the implicit large eddy simulation of turbulent non-reacting and reacting high-speed shear flows // Computational Fluids, Vol. 95, 2014. pp. 74-87.
154. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. comp. phys., Vol. 49, 1983. pp. 357-393.
155. Fu L. Review of the high-order TENO schemes for compressible gas dynamics and turbulence // Arch. Computat. Methods Eng., 2023.
156. Толстых А.И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. Москва: Наука, 2015. 349 с.
157. Mullenix N.J., Gaitonde D.V. A bandwidth and order optimized weno interpolation scheme for compressible turbulent flows // AIAA paper, 2011. pp. 1-18.
158. Henrick A.K., Aslam T.D., Powers J.M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points // J. Comput. Phys., Vol. 207, 2005. pp. 542-567.
159. Li H., Luo Y., Zhang S. Assessment of Upwind/SymmetricWENO Schemes for Direct Numerical Simulation of Screech Tone in Supersonic Jet // J. of Scientific Computing, Vol. 87, No. 3, 2021.
160. Vichnevetsky R., Bowles J.B. Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations. Philadelphia: Studies in Applied Mathematics, 1982. 140 pp.
161. Pirozzoli S. On the spectral properties of shock-capturing schemes // Journal of Computational Physics, No. 219, 2006. pp. 489–497.
162. Yamaleev N.K., Carpenter M.H. A systematic methodology for constructing high-order energy-stable weno schemes // J. Comput. Phys., Vol. 228, 2009. pp. 4248–4272.

163. Baldauf M. Stability analysis for linear discretisations of the advection equation with Runge–Kutta time integration // *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, June 2008. pp. 6638–6659.
164. Butcher J.C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 3rd ed. John Wiley & Sons, 2016. 513 pp.
165. Олейник О.А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // *УМН*, Т. 12, № 3, 1957. С. 3-73.
166. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // *УМН*, Т. 14, № 2, 1959. С. 87-158.
167. Бахнэ С. Сравнение аппроксимаций конвективных членов в методах семейства DES // *Математическое моделирование*, Т. 33, № 7, 2021. С. 47-62.
168. Bakhne S., Sabelnikov V. A method for choosing the spatial and temporal approximations for the LES approach // *Fluids*, Vol. 7, No. 376, 2022.
169. Бахнэ С., Трошин А.И. Сравнение противопоточных и симметричных WENO-схем при моделировании базовых турбулентных течений методом крупных вихрей // *ЖВМиМФ*, Т. 63, № 6, 2023. С. 144-159.
170. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. *Современные подходы к моделированию турбулентности (учеб. пособие)*. Санкт–Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. 234 с.
171. Yu H., Grimaji S.S., Luo L.S. DNS and LES of decaying isotropic turbulence with and without frame rotation using lattice Boltzmann // *J. of Comp. Physics*, Vol. 209, No. 2, 2005. pp. 599-616.
172. Hansen A., Sørensen N.N., Johansen J., Michelsen J.A. Detached-eddy simulation of decaying homogeneous isotropic turbulence // *AIAA*, No. 2005-885, 2005.
173. Chumakov S.G., Rutland C.J. Dynamic structure subgrid-scale models for large eddy simulation // *International journal for numerical methods in fluids*, No. 47, 2005. pp. 911-923.
174. Zhou Z., He G., Wang S., Jin G. Subgrid-scale model for large-eddy simulation of isotropic turbulent flows using an artificial neural network // *Computers & Fluids*, Vol. 195, 2019.
175. Трошин А.И., Молев С.С., Власенко В.В., Михайлов С.В., Бахнэ С., Матяш С.В. Моделирование турбулентных течений на основе подхода IDDES с помощью программы zFlare // *Выч. мех. сплош. сред*, Т. 16, № 2, 2023. С. 203-218.

176. Bosnyakov S., Kursakov I., Lysenkov A., Matyash S., Mikhailov S., Vlasenko V., Quest J. Computational tools for supporting the testing of civil aircraft configurations in wind tunnels // Prog. Aerosp. Sci., Vol. 44, 2008. pp. 67-120.
177. Fornberg B. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids // Mathematics of Computation, Vol. 51, No. 184, October 1988. pp. 699-706.
178. van Leer B., Lee W.T., Roe P.L., Powell K.G., Tai C.H. Design of Optimally Smoothing Multistage Schemes for the Euler Equations // Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 8, No. 10, October 1992. pp. 761-769.
179. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K. Synthetic Turbulence Generators for RANS-LES Interfaces in Zonal Simulations of Aerodynamic and Aeroacoustic Problems // Flow Turbulence Combust, Vol. 93, 2014. pp. 63-92.
180. Etkin B. Dynamics of atmospheric flight. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972.
181. Pope S.B. Turbulent flows. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
182. Comte-Bellot G., Corrsin S. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence // J. Fluid Mech., Vol. 25, 1966. pp. 657-682.
183. Comte-Bellot G., Corrsin S. Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, 'isotropic' turbulence // J. Fluid Mech., Vol. 48, 1971. pp. 273-337.
184. Pantano C., Sarkar S. A study of compressibility effects in the high-speed turbulent shear layer using direct simulation // J. Fluid Mech., Vol. 451, 2002. pp. 329-371.
185. Bell J.H., Mehta R.D. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers // AIAA Journal, Vol. 28, No. 12, 1990. pp. 2034-2042.
186. Sharan N., Matheou G., Dimotakis P.E. Turbulent shear-layer mixing: initial conditions, and direct-numerical and large-eddy simulations // J. Fluid Mech., Vol. 877, 2019. pp. 35-81.
187. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. Москва: БИНОМ, 2006.
188. Трошин А.И., Бахнэ С. Применение гибридных RANS/LES-методов для расчета отрыва турбулентного пограничного слоя из-под скачка уплотнения // Матем. мод., Т. 35, № 10, 2023. С. 36-52.
189. Pasquariello V., Hickel S., Adams N.A. Unsteady effects of strong shock-wave/boundary-layer interaction at High Reynolds number // J. Fluid. Mech., Vol.

- 823, 2017. pp. 617-657.
190. Daub D., Willems S., Gülhan A. Experimental results on unsteady shock-wave/boundary layer interaction induced by an impinging shock // CEAS Space J., Vol. 8, No. 1, 2015. pp. 3-12.
 191. Alexander R. Diagonally implicit Runge-Kutta methods for stiff O.D.E.'s // SIAM J. Numer. Anal., Vol. 14, No. 6, 1977. pp. 1006-1021.
 192. Будникова А.О. Подход к учёту взаимодействия RANS- и LES-областей пограничного слоя в расчётах методом SST-IDDES // Труды МФТИ, Т. 14, № 4, 2022. С. 11-29.
 193. Troshin A., Bakhne S., Sabelnikov V. Numerical and physical aspects of large-eddy simulation of turbulent mixing in a helium-air supersonic co-flowing jet // In: Progress in Turbulence IX. Springer, iTi 2021. pp. 297-302.
 194. Ballouz J.G., Ouellette N.T. Tensor geometry in the turbulent cascade // J. Fluid Mech., Vol. 835, 2018. pp. 1048-1064.
 195. Vincent-Randonnier A., Sabelnikov V., Ristori A., Zettervall N., Fureby C. An experimental and computational study of hydrogen-air combustion in the LAPCAT II supersonic combustor // Proceedings of the Comb. Inst., Vol. 37, No. 3, 2019. pp. 3703-3711.
 196. Pelletier G., Ferrier M., Vincent-Randonnier A., Mura A. Delayed detached eddy simulations of rough-wall turbulent reactive flows in a supersonic combustor // AIAA conf. paper, No. 2020-2409, 2020.
 197. Бахнэ С., Власенко В.В., Матяш Д.С., Матяш С.В. О взаимодействии двух симметричных стационарных плоских волн конечной интенсивности в идеальном газе // Учёные записки ЦАГИ, Т. LIII, № 4, 2022. С. 12-25.
 198. Balland S., Vincent-Randonnier A. Numerical study of hydrogen/air combustion with CEDRE code on LAERTE dual mode ramjet combustion experiment // AIAA, No. 2015-3629, 2015.
 199. Власенко В.В., Лю В., Молев С.С., Сабельников В.А. Влияние условий теплообмена и химической кинетики на структуру течения в модельной камере сгорания ONERA LAPCAT II // Горение и взрыв, Т. 13, № 2, 2020. С. 36-47.
 200. Сабельников В.А., Трошин А.И., Бахнэ С., Молев С.С., Власенко В.В. Поиск определяющих физических факторов в валидационных расчетах экспериментальной модели ONERA LAPCAT II с учетом шероховатости стенок канала // Горение и взрыв, Т. 14, № 4, 2021. С. 55-67.

201. Matyushenko A.A., Garbaruk A.V. Non-linear correction for the $k-\omega$ SST turbulence model // J. of Physics: Conf. series, Vol. 929, 2017.
202. Menter F.R., Garbaruk A.V., Egorov Y. Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows // Progress in Flight Physics, Vol. 3, 2012. pp. 89-104.
203. Savelyev A.A., Kursakov I.A., Matyash E.S., Streltsov E.V., Shtin R.A. Application of the Nonlinear SST Turbulence Model for Simulation of Anisotropic Flows // Supercomput. Front. Innov., Vol. 9, 2022. pp. 38–48.
204. Bakhne S., Vlasenko V., Troshin A., Sabelnikov V., Savelyev A. Improved Delayed Detached Eddy Simulation of combustion of hydrogen jets in a high-speed confined hot air cross flow II: new results // Energies, Vol. 16, No. 21:7262, 2023.
205. Власенко В.В., Кажан Е.В., Матяш Е.С., Михайлов С.В., Трошин А.И. Численная реализация неявной схемы и различных моделей турбулентности в расчетном модуле ZEUS // Труды ЦАГИ, № 2735, 2015. С. 5-49.
206. Bakhne S., Troshin A., Sabelnikov V., Vlasenko V. Improved delayed detached eddy simulation of combustion of hydrogen jets in a high-speed confined hot air cross flow // Energies, Vol. 16, No. 1736, 2023.
207. Ortega J.M. Introduction to parallel and vector solution of linear systems. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.
208. Молев С.С. Численное исследование эффекта повышения скорости самоподдерживающейся детонации при распространении по каналу с пограничными слоями, ФГУП ЦАГИ, Жуковский, Диссертация 2021.
209. Sabelnikov V.A., Vlasenko V.V., Molev S.S. Analysis of the moving detonation interaction with turbulent boundary layers in a duct on the basis of numerical simulation // TsAGI Science Journal, Vol. 51, No. 6, 2020.
210. Бабулин А.А., Босняков С.М., Власенко В.В., Енгулатова М.Ф., Матяш С.В., Михайлов С.В. Опыт валидации и настройки моделей турбулентности применительно к задаче об отрыве пограничного слоя на клине конечной ширины // ЖВМиМФ, Т. 56, № 6, 2016. С. 1034-1048.
211. Pelletier G. Modeling of a Supersonic Combuster: RANS and LES simulations. Comparisons with experiment, ISAE-ENSMA, Poitiers, диссертация 2022.
212. Pelletier G. Modélisation d'un foyer à combustion supersonique: simulations RANS et LES, comparaisons aux résultats expérimentaux, ONERA, Chasseneuil-du-Poitou, Диссертация 2022.

213. Schlichting H. Experimental investigation of the problem of surface roughness. Washington: Technical memorandums national advisory committee for aeronautics, 1937.
214. Suga K., Craft T.J., Iacovides H. An analytical wall-function for turbulent flows and heat transfer over rough walls // International Journal of Heat and Fluid Flow, 2006. pp. 852-866.
215. Volino R.J., Devenport W.J., Piomelli U. Questions on the effects of roughness and its analysis in non-equilibrium flows // J. of Turbulence, 2022.
216. Aupoix B. Roughness corrections for the k- ω SST model: Status and Proposals // Journal of Fluids Engineering, Vol. 137, 2015.
217. Aupoix B. Improved heat transfer predictions on rough surfaces // International Journal of Heat and Fluid Flow, No. 56, 2015. pp. 160-171.
218. Latin R.M., Bowersox R.D. Flow Properties of a Supersonic Turbulent Boundary Layer with Wall Roughness // AIAA Journal, Vol. 38, No. 10, 2000.
219. Jachimowski C.J. An analysis of combustion studies in shock expansion tunnels and reflected shock tunnels, NASA, Hampton, Technical paper 3224, 1992.
220. Ben-Yakar A., Mungal M.G., Hanson R.K. Time evolution and mixing characteristics of hydrogen and ethylene transverse jets in supersonic crossflows // Physics of Fluids, Vol. 18, No. 2, 2006. P. 026101.
221. Davidenko D., Gökalp I., Dufour E., Magre P. 14th AIAA/AHI Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference // Systematic numerical study of the supersonic combustion in an experimental combustion chamber. 2006. P. 7913.
222. Шагалиев Р.М., Корзаков Ю.Н., Логвин Ю.В., Петрик А.Н., Рыбкин А.С., Семёнов Г.П., Шатохин А.В., Черных С.О., Южаков В.В. СуперЭВМ разработки ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ" для гражданских отраслей России // Вестник кибернетики, № 4, 2015. С. 12-29.
223. Михеев М.А. Расчётные формулы конвективного теплообмена // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, № 5, 1966. С. 96-105.
224. Бахнэ С., Власенко В.В. Моделирование горения поперечных струй водорода в высокоскоростном течении в прямоугольном канале методом IDDES // Горение и взрыв, Т. 17, № 4, 2024. С. 29-39.
225. Garbaruk A. Eddy-resolving methods // Turbulence modeling. 2019. URL: https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/SRS_methods/Term10_Part2_Lec02_les_chan.pdf (дата

обращения: 8.August.2023).

226. Лю В. Анализ факторов, определяющих структуру численного решения при расчете течения с горением в экспериментальной модели ONERA // Теплофизика и аэромеханика, Т. 30, № 3, 2023. С. 539-556.
227. Власенко В.В., Ноздрачёв А.Ю., Сабельников А., Ширяева А.А. Анализ механизмов стабилизации турбулентного горения по данным расчетов с применением модели реактора частичного перемешивания // Горение и взрыв, Т. 12, № 1, 2019. С. 42-56.