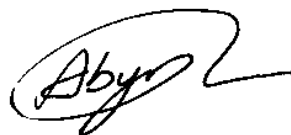


ЦЕНТРАЛЬНЫЙ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

имени профессора Н.Е. Жуковского

На правах рукописи



Бутковский Александр Викторович

**КИНЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ И АНАЛОГИЯ РЕЙНОЛЬДСА В
КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ**

1.1.9— Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2026 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
Гл. 1. ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА.....	15
1.1 Постановка задачи	15
1.2 Численный метод и его верификация	16
1.3 Эффект максимума зависимости потока нормального импульса, от числа Кнудсена.....	20
1.4 Эффект максимума зависимости потока энергии, отдаваемой пластиной, от числа Кнудсена.....	23
1.5 Эффект изменения знака потока энергии, передаваемой пластине, при изменении числа Кнудсена.....	24
Гл. II. ТЕЧЕНИЕ РЭЛЕЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА.....	30
2.1 Постановка задачи	30
2.2 Метод численного решения	35
2.3 Верификация численного метода	36
2.4 Эффект максимума зависимости потока нормального импульса от времени.....	38
2.5 Эффект максимума зависимости напряжения трения на пластине от времени при $M \gg 1$	42
2.6 Эффект максимума зависимости потока энергии, передаваемой пластине, от времени при $M \gg 1$	46
2.7 Эффект максимума зависимости от времени потока энергии, отдаваемой пластиной.....	48
2.8 Эффект изменения со временем знака потока энергии, передаваемой пластине.....	51
Гл. III. ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ ПОД НУЛЕВЫМ УГЛОМ АТАКИ	54
3.1 Постановка задачи	54
3.2 Метод численного решения	56
3.3 Верификация численного метода	61
3.4 Экстремумы зависимости интегрального потока нормального импульса от числа Кнудсена при различных числах Маха	66
3.5 Сильное уменьшения влияния температуры пластины на среднюю силу трения, действующую на пластину, в переходном режиме при дозвуковых и умеренных сверхзвуковых числах Маха.....	70

3.6 Максимум среднего потока энергии, отдаваемой пластиной.....	73
3.7 Изменение знака среднего потока энергии, передаваемой пластине, при изменении числа Кнудсена.....	76
Гл. IV. ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С НЕПОДВИЖНЫМ ВНУТРЕННИМ ЦИЛИНДРОМ.....	
	79
4.1 Постановка задачи	80
4.2 Соотношения между макропараметрами	81
4.3 Метод численного решения и верификация численного метода	83
4.4 Эффекты максимума напряжения трения и потоков энергии.....	89
4.4.1 Свободномолекулярный режим	89
4.4.2 Переходный режим	93
4.5 Эффект очень резкого перехода от слабонеразрезанного течения вблизи внутреннего цилиндра к свободномолекулярному при очень малых средних числах Кнудсена.....	99
4.5.1 Анализ результатов DSMC расчетов	99
4.5.2 Сравнение с решением граничной задачи для уравнений Навье- Стокса.....	105
4.6 Эффект максимума потока нормального импульса, передаваемого неподвижному внутреннему цилиндру.....	107
4.7 Кинетические эффекты, вызванные разностью температур цилиндров	108
4.7.1 Свободномолекулярный режим. Эффект перемены знака потока энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, при изменении отношения радиусов цилиндров.....	108
4.7.2 Переходный режим. Эффект возникновения максимума в зависимости потока энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, от скорости при изменении числа Кнудсена в случае различных температур поверхностей.....	117
Гл. V. ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С НЕПОДВИЖНЫМ ВНЕШНИМ ЦИЛИНДРОМ.....	
	122
5.1 Эффекты максимума в зависимостях потоков тангенциального импульса и энергии, передаваемой цилиндрам, от отношения радиусов цилиндров в свободномолекулярном режиме.....	122
5.2 Неограниченное возрастание потоков тангенциального импульса и	

энергии, передаваемых цилиндрам, с увеличением скорости вращения внутреннего цилиндра.....	127
5.2.1 Свободномолекулярный режим	127
5.2.2 Переходный режим.....	134
5.3 Эффект минимума потока нормального импульса, передаваемого вращающемуся внутреннему цилиндру, в переходном режиме.....	139
Гл. VI. УСЛОВНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ МАКСИМУМЫ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА	146
6.1 Положение и величина локального максимума потока энергии в задаче о теплопередаче между коаксиальными цилиндрами	146
6.1.2 Теплопередача при произвольном числе Кнудсена.....	151
6.2 Положение и величина локального максимума потока энергии в задаче о теплопередаче между концентрическими сферами	152
6.2.1 Свободномолекулярная теплопередача	152
6.2.2 Теплопередача при произвольном числе Кнудсена	154
6.3 Положение и величина локального максимума потока энергии в плоском течении Куэтта	155
6.4 Положение и величина локального максимума потока энергии в продольном цилиндрическом течении Куэтта	156
6.4.1 Максимумы свободномолекулярных потоков энергии, передаваемой внутренней цилиндрической поверхности	160
6.4.2 Максимумы свободномолекулярных потоков энергии, передаваемой внутренней цилиндрической поверхности	164
6.4.3 Локальные максимумы потока энергии в продольном цилиндрическом течении Куэтта при произвольном числе Кнудсена	168
Гл. VII. АНАЛОГИЯ РЕЙНОЛЬДСА.....	170
7.1 Параметры подобия для коэффициента аналогии Рейнольдса и для отношения энергий, передаваемых пластинам в задаче Куэтта	170
7.2 Задача Рэлея для несжимаемой жидкости: эффект максимума по числу Прандтля для коэффициента аналогии Рейнольдса	183
7.3 Параметры подобия для аналогии Рейнольдса в течении Рэлея	186
7.4 Эффект максимума коэффициента аналогии Рейнольдса по числу Прандтля при ламинарном обтекании пластины вязкой несжимаемой жидкостью при больших числах Рейнольдса	192
7.5 Аналогия Рейнольдса для сверхзвукового обтекания пластины разреженным газом	196

7.6 Аналогия Рейнольдса и параметры подобия для продольного цилиндрического течения Куэтта	204
7.6.1 Постановка задачи	204
7.6.2 Взаимосвязь между гидродинамическими переменными	206
7.6.3 Режим сплошной среды и свободномолекулярный режим.....	208
7.6.4 Переходный режим	210
7.6.5 Отношение погонных потоков энергии	216
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	221
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	225

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Работа является фундаментальным исследованием, направленным на решение актуальной проблемы динамики разреженных газов –изучение свойств и особенностей течений газа при числах Кнудсена порядка единицы. Число Кнудсена, характеризующее степень разреженности газа, равно отношению характерной длины пробега молекул в газе к характерному размеру задачи. Физические эффекты, возникают как при изменении степени разреженности газа, так и при изменении параметров задачи при неизменном числе Кнудсена. Исследование свойств неравновесных течений разреженного газа имеет не только академический интерес. Изучение механизмов процессов тепломассопереноса в разреженном газе необходимо для совершенствования вакуумной и авиационно-космической техники, создания новых нанотехнологий. В настоящее время растет интерес к микроэлектромеханическим системам (MEMS). Дозвуковые потоки газа в этих системах представляют собой потоки разреженного газа даже в атмосферных условиях. Решение задач экологии атмосферы также тесно связано с изучением неравновесных процессов в газе с числом Кнудсена порядка единицы.

Известен целый ряд физических эффектов, имеющих место при числах Кнудсена больше или порядка единицы.

Еще во второй половине девятнадцатого века James Clerk Maxwell теоретически, а Osborne Reynolds экспериментально исследовали явление термоэффузии [1]. Оно имеет место, когда два сосуда, заполненные газом с одинаковым, но очень низким давлением и разными температурами $T_1 < T_2$, разделены пористой перегородкой. Несмотря на первоначальное равенство давлений, давление газа в сосуде с более низкой температурой P_1 уменьшается, а в сосуде с более высокой температурой P_2 возрастает.

Система становится равновесной, когда поток массы становится равным нулю, т. е. когда

$$\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Эффект Магнуса также проявляется по-разному в условиях сплошной среды [2] и в свободномолекулярном режиме [3]: если в условиях континуума в поток поместить вращающийся цилиндр и понижать давление (увеличивать число Кнудсена), то при достаточно больших числах Кнудсена подъёмная сила изменит знак. Это связано с тем, что в свободномолекулярном потоке отражённые молекулы приобретают составляющую скорости, перпендикулярную радиусу цилиндра. При этом потоки с наветренной и теневой стороны различны

Наличие температурного градиента на поверхности тела, помещенного в разреженный газ, может вызвать течение газа. Этот процесс называется тепловым скольжением или крипом. Исследованию термоиндуцированных потоков разреженного газа посвящена обширная литература [4-10]. На этом явлении основано действие вакуумных микронасосов, не содержащих движущихся частей [11-23] и названных кнудсеновскими насосами. Крипом вызваны такие явления, как термофорез и фотофорез [24], когда частица, помещенная в газ с отличным от нуля градиентом температуры, приходит в движение, если ее коэффициент теплопроводности отличается от коэффициента теплопроводности разреженного газа. При термофорезе и фотофорезе сила, действующая на частицу в газе, также может менять свой знак при изменении числа Кнудсена [25].

Увеличение числа Кнудсена может приводить к возникновению максимумов или минимумов у различных физических величин. Исследуя течение в трубах при низких давлениях, Martin Knudsen в начале двадцатого века экспериментально обнаружил, что зависимость нормированного расхода

от числа Кнудсена немонотонна и имеет минимум [26]. Это явление называется парадоксом Кнудсена [27-37].

В 1960-1970-х годах в ЦАГИ М.Н. Коганом, В.Н. Гусевым, А.И. Ерофеевым и В.А. Перепуховым были предсказаны и экспериментально и численными расчётами подтверждены эффекты немонотонности аэродинамических характеристик тел различной формы, обтекаемых гиперзвуковым потоком при изменении степени разреженности газа (числа Кнудсена) [38,39]. В дальнейшем аналогичные эффекты были обнаружены в течении Куэтта. В 1969 году Е.М. Шахов (ВЦ АН СССР) обнаружил немонотонность коэффициента трения по числу Кнудсена в плоской задаче Куэтта при больших относительных скоростях пластин [40]. В 1996 году А.К. Ребровым и П.А. Сковородко (ИТПМ СО РАН) была обнаружена немонотонность по числу Кнудсена потока энергии, передаваемого плоской пластине в задаче Куэтта при больших относительных скоростях пластин [41,42]. Кроме немонотонности макропараметров, возникающей при изменении числа Кнудсена, в динамике разреженных газов естественно существуют случаи немонотонной зависимости макропараметров и от других параметров задачи. Примером такой немонотонности является, обнаруженная в 1980 году О.Г. Фридлендером (ЦАГИ) немонотонная зависимость теплового потока между двумя пластинами от отношения температур пластин при фиксированной температуре одной из пластин [43].

Исследование неклассического переноса в неравновесных течениях является актуальным и в настоящее время [44].

Объект исследования. Объектом исследования являются следующие классические задачи динамики разреженных газов:

- 1) Плоская и цилиндрические задачи Куэтта.
- 2) Задача Рэлея.
- 3) Задача об обтекании пластины под нулевым углом атаки.
- 4) Задачи теплопроводности с цилиндрической и сферической симметрией.

Исследуются свободномолекулярный, переходный и сплошносредный режимы. Переходный режим течений является основным объектом исследования.

Задача Куэтта о течении газа между движущимися друг относительно друга двумя параллельными пластинами с различными температурами и задача Рэлея о течении, возникающем при внезапном движении пластины в полупространстве вдоль самой себя при одновременном скачкообразном изменении температуры, являются классическими тестовыми задачами, на которых апробируются различные методы решения уравнения Больцмана [45-74]. В тоже время, как отмечено выше, в [40-42] исследовалось влияние степени разреженности газа на течение Куэтта и были обнаружены эффекты немонотонности трения и теплового потока по числу Кнудсена. Однако всестороннего исследования ни течения Куэтта как плоского, так и цилиндрического, ни течения Рэлея в известной литературе не проводилось. Существует обширная литература, посвященная исследованию гиперзвукового обтекания пластины под нулевым углом атаки [38,75-85]. Однако количество публикаций умеренного сверхзвукового [78,79,85-87] и дозвукового обтекания пластины разреженным газом [88-93] не столь велико. Всестороннего исследования умеренного сверхзвукового, трансзвукового и дозвукового обтекания пластины разреженным газом под нулевым углом атаки не проводилось.

Метод исследования. В данной работе основным методом исследования является метод прямого статистического моделирования.

Цель работы. Целью работы является построение общей картины влияния параметров на силовое и тепловое воздействия на поверхности, ограничивающие рассматриваемые течения: на поток энергии, передаваемой поверхностям, напряжение трения, поток нормального импульса и на их соотношения. При этом необходимо выяснить имеют ли эффекты, найденные ранее в указанных течениях, также место и в других течениях, исследовать течения на предмет существования новых ранее неизвестных эффектов и

рассмотреть аналогию Рейнольдса в сплошносредном и переходном режимах течений.

Задачи работы. Были поставлены следующие задачи:

1. Исследовать влияние чисел Кнудсена, Маха и отношения температур граничных поверхностей на потоки энергии и импульса, передаваемые поверхностям, в переходном режиме плоского и цилиндрических течений Куэтта.
2. Исследовать влияние числа Маха и температуры пластины на потоки энергии и импульса, передаваемых пластине в различные моменты времени в переходном режиме течения Рэлея.
3. Исследовать влияние чисел Маха, Кнудсена и температур пластины на потоки энергии и импульса, передаваемых пластине при дозвуковом, околосзвуковом и умеренно сверхзвуковом обтекании разреженным газом под нулевым углом атаки.
4. Исследовать аналогию Рейнольдса в плоском и продольном цилиндрическом течениях Куэтта, в течении Рэлея и при обтекании пластины под нулевым углом атаки.
5. Исследовать локальные максимумы потока энергии, передаваемой граничной поверхности в плоском и продольном цилиндрическом течении Куэтта и в задаче о теплопередаче с цилиндрической и сферической симметрией.

Научная новизна. В результате проведенных исследований было впервые обнаружены следующие эффекты:

1. Эффект *максимума* потока нормального импульса, передаваемого пластине, *при изменении числа Кнудсена* в плоской задаче Куэтта и задаче Рэлея.
2. Эффект минимума по числу Кнудсена среднего по длине пластины потока нормального импульса, передаваемого пластине, при дозвуковом обтекании пластины под нулевым углом атаки.

3. Эффекты максимума по времени напряжения трения и потоков энергии и нормального импульса, передаваемых пластине, в задаче Рэлея.
4. Эффекты максимума по числу Кнудсена потока энергии, отдаваемой пластиной, в плоской задаче Куэтта, в задаче Рэлея и в задаче об обтекании пластины под нулевым углом атаки.
5. Эффект сильного уменьшения влияния температуры пластины на среднюю силу трения, действующую на пластину в переходном режиме.
6. Эффект перемены знака потока энергии, передаваемой пластине, при изменении числа Кнудсена в плоской задаче Куэтта, в задаче Рэлея и в задаче об обтекании пластины под нулевым углом атаки.
7. Эффекты максимума напряжения трения и потоков энергии и нормального импульса, передаваемых поверхности внутреннего цилиндра в цилиндрическом течении Куэтта с неподвижным внутренним цилиндром при увеличении угловой скорости внешнего цилиндра.
8. Эффект резкого уменьшения напряжения трения и потоков энергии, передаваемых цилиндрам, при малых числах Кнудсена и больших скоростях вращения внешнего цилиндра в цилиндрической задаче Куэтта с фиксированным внутренним цилиндром.
9. Эффект перемены знака потока энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, при изменении отношения радиусов цилиндров в свободномолекулярном течении Куэтта с фиксированным внутренним цилиндром.
10. Эффект минимума потока нормального импульса, передаваемого поверхности внутреннего цилиндра в цилиндрическом течении Куэтта с неподвижным внешним цилиндром при увеличении угловой скорости внутреннего цилиндра.
11. Эффекты максимума зависимостей потоков импульса и энергии, передаваемых внутреннему цилиндру, от отношения радиусов в

свободномолекулярном цилиндрическом течении Куэтта с фиксированным внешним цилиндром.

12. Эффекты максимума коэффициента аналогии Рейнольдса по числу Прандтля в течении Рэлея несжимаемой жидкости и в ламинарном несжимаемом пограничном слое на пластине.

В результате проведенных исследований на очень большом и разнообразном массиве значений чисел Кнудсена, температур и скоростей поверхностей показано, что:

1. В плоской задаче Куэтта *отношение потоков энергий*, передаваемых пластинам, и *коэффициент аналогии Рейнольдса* почти целиком зависят только от двух параметров подобия: *числа Эккерта* и *числа Кнудсена*.
2. В продольной цилиндрической задаче Куэтта *отношение потоков энергий*, передаваемых цилиндрическим пластинам, и *коэффициент аналогии Рейнольдса* с хорошей точностью зависят только от трех параметров подобия: *числа Эккерта*, *числа Кнудсена* и *отношения радиусов*. В сплошнородном пределе эти величины зависят только от числа Эккерта и не зависят от отношения радиусов.
3. В задаче Рэлея *коэффициент аналогии Рейнольдса* зависит, главным образом, только от двух параметров подобия: *числа Эккерта* и *безразмерного времени* прошедшего с момента начала движения.
4. В задаче об обтекании пластины под нулевым углом атаки *коэффициент аналогии Рейнольдса* зависит, главным образом, только от двух параметров подобия: *числа Эккерта* и *числа Кнудсена*.

Кроме того, в работе найдены и аналитически и численно исследованы:

1. Локальные максимумы потока энергии при фиксированной температуре одной из граничных поверхностей и изменении температуры другой поверхности в задачах о теплопередаче в газе с цилиндрической и сферической симметрией.

2. Локальные максимумы потока энергии при фиксированной температуре одной из граничных поверхностей и изменении температуры другой поверхности в плоской и продольной цилиндрической задачах Куэтта.

Достоверность результатов исследования гарантируется высокой эффективностью метода прямого статистического моделирования, выполнением фундаментальных физических законов сохранения энергии и импульса и согласием с результатами, полученными другими авторами другими методами, в том числе экспериментально.

Практическая ценность результатов. Полученные результаты:

- расширяют существующие представления о процессах тепломассопереноса в газах.
- стимулируют дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования явлений переноса в разреженных газах.

Апробация и внедрение результатов. Полученные в диссертации результаты используются в учебном процессе в Московском физико-техническом институте и в Санкт-Петербургском государственном университете.

Результаты диссертационной работы были представлены на международных конференциях по динамике разреженного газа (RGD-28, Сарагоса, Испания, 2012; RGD-31, Глазго, Великобритания, 2018; RGD-32, Сеул, Республика Корея, 2022) и на международной конференции по механике «Шестые Поляховские чтения», Санкт-Петербург, Россия, 2012.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 15 статьях в ведущих рецензируемых журналах, индексируемых в базах Web of Science или Scopus [94-108] (из них 10 статей [97-102, 104-107] входят в первый квартиль в базах Web of Science и Scopus), а также в 5 статьях в трудах конференций [109-113], индексируемых в базах Web of Science или Scopus.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, семи глав, заключения и списка использованных источников. Общий объем составляет

240 страниц, включая 102 рисунка. Список использованных источников содержит 166 наименований.

ГЛАВА I. ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный слой газа между двумя параллельными плоскостями $y = 0$ и $y = L$. Пусть температура неподвижной диффузно отражающей плоскости $y=0$ равна T_1 , а температура плоскости движущейся параллельно ей со скоростью U_r равна T_2 . Скорость пластины направлена вдоль оси x . Оси x и y образуют декартову систему координат. Для исследования, возникающего в задаче Куэтта стационарного течения, необходимо решить уравнение Больцмана

$$v_y \frac{df}{dy} = J(f, f) \quad (1.1)$$

с граничными условиями для функции распределения молекул на нижней и верхней пластинах:

$$f = n_{r1} (2\pi R_{gas} T_1)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_1} \right], \quad v_y > 0, \quad y = 0 \quad (1.2)$$

$$f = n_{r2} (2\pi R_{gas} T_2)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(v_x - U_r)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_2} \right], \quad v_y < 0, \quad y = L \quad (1.3)$$

Здесь $J(f, f)$ - интеграл столкновений молекул [38]; v_x, v_y, v_z - декартовы компоненты скорости молекул; n_{r1} и n_{r2} - параметры функции распределения, соответствующие отраженным молекулам, находятся из условия баланса падающих и отраженных молекул; R_{gas} - газовая постоянная; k - постоянная Больцмана; m - масса молекулы. Для решения задачи (1.1 – 1.3) необходимо задать среднюю плотность газа между пластинами n_{av} и закон взаимодействия молекул при столкновении друг с другом. В дальнейших расчетах будет использоваться модель максвелловских молекул [72] с сечением взаимодействия $\sigma = \sigma_0 / g$, где σ_0 - постоянная, g - относительная скорость сталкивающихся молекул, а

также модель молекул – «твердые сферы». Решение задачи зависит от числа Кнудсена $Kn = \lambda/L$. Для модели максвелловских молекул [72] характерная средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = 3.2c(\sqrt{\pi}n_{av}\sigma_0)^{-1}$, а для модели молекул – «твердые сферы» $\lambda = (\sqrt{2}n_{av}\sigma_{sp})^{-1}$, где $c = \sqrt{2R_{gas}T_2}$, $\sigma_{sp} = const$.

Напряжение трения P_{xy} , потоки нормального импульса $|P_{yy}|$ и энергии E_1 , передаваемые нижней пластине, находятся с помощью функции распределения молекул по скоростям:

$$p_{xy} = -\int m v_x v_y f(\mathbf{V}) \Big|_{y=0} d\mathbf{V}, \quad |p_{yy}| = \int m v_y v_y f(\mathbf{V}) \Big|_{y=0} d\mathbf{V}. \quad (1.4)$$

$$E_1 = -\int v_y \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{V}) \Big|_{y=0} d\mathbf{V}, \text{ где } d\mathbf{V} = dv_x dv_y dv_z, \quad (1.5)$$

m - масса молекулы.

В дальнейшем используются безразмерные величины

$$F = \frac{|p_{xy}|}{\rho_{av} c^2}, \quad P = \frac{|p_{yy}|}{\rho_{av} c^2}, \quad Q = \frac{E_1}{\rho_{av} c^3},$$

где ρ_{av} - среднemasсовая плотность газа между пластинами: $\rho_{av} = m n_{av}$.

1.2 ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ЕГО ВЕРИФИКАЦИЯ

Для решения задачи в переходном режиме использовался метод прямого статистического моделирования [114]. В расчетах применялась процедура установления с некоторым достаточно малым шагом по времени Δt . При этом пространство между плоскостями $y=0$ и $y=L$ разбивалось на ячейки размером, меньшим длины свободного пробега молекул. Внутри ячеек плотность, скорость и температура газа считались постоянными. В ячейки помещались моделирующие течение молекулы. Эволюция системы частиц на временном интервале Δt , меньшем среднего времени между столкновениями молекул, расщеплялась на два этапа:

- 1) свободный перелет молекул за время Δt ;
- 2) столкновение молекул, принадлежащих данной ячейке – этап релаксации. Макропараметры в ячейках вычислялись путем усреднения по времени вдоль траекторий молекул соответствующих микроскопических величин [115].

Для проверки результатов, полученных в данной главе, найдем для максвелловских молекул решение уравнения Навье–Стокса с граничными условиями [38], имеющими вид скачка температур и скоростей при $y = 0$ и $y = L$. Интегрирование уравнения Навье–Стокса для плоского течения Куэтта в общем виде сводится к решению кубического уравнения, в которое входят константы, определяемые с помощью тех или иных граничных условий [116].

На рис. 1.1 распределения температур T_{gas} и скоростей u между пластинами, полученные в данной работе методом прямого статистического моделирования (ПСМ) сравниваются с результатами решения описанной выше краевой задачи для уравнения Навье–Стокса. Здесь и далее $T_{rel} = T_{gas}/T_2$, $U_{rel} = u/c$, $M = U_r/\sqrt{\kappa R_{gas} T_2}$, $T = T_1/T_2$, κ – показатель адиабаты. В расчетах учитывалось, что для максвелловских (псевдо) молекул вязкость $\mu = 2mR_{gas}T_{gas}/\sigma_0$.

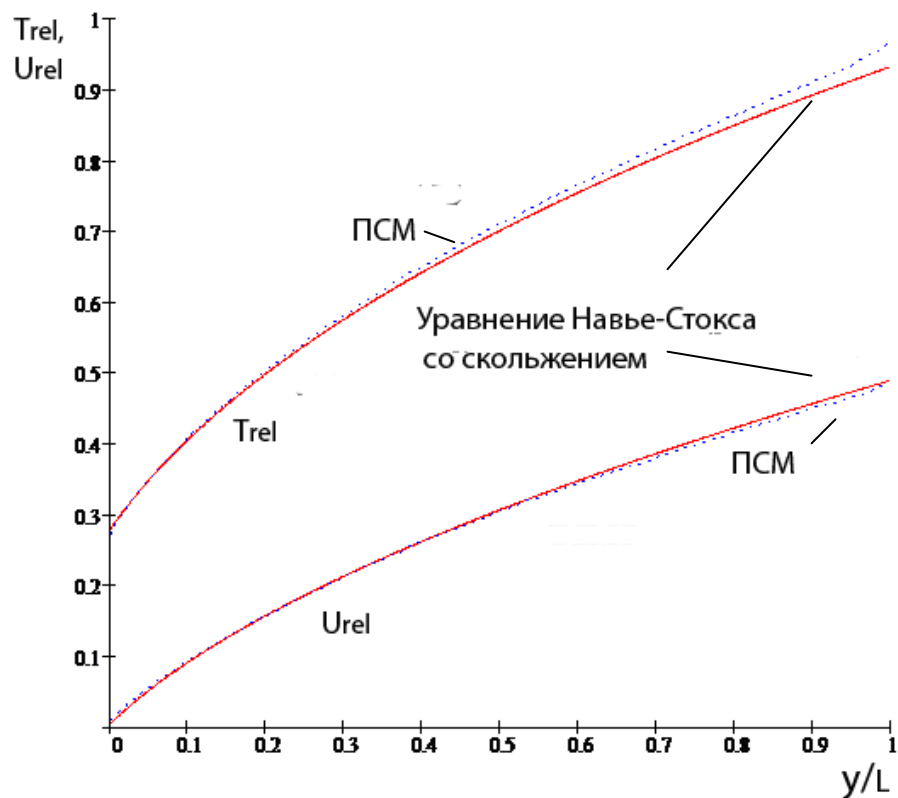


Рисунок 1.1. Распределение температуры и среднемассовой скорости между пластинами в течении Куэтта при $\text{Kn} = 0.0141$; $M=0.548$; $T=0.25$.

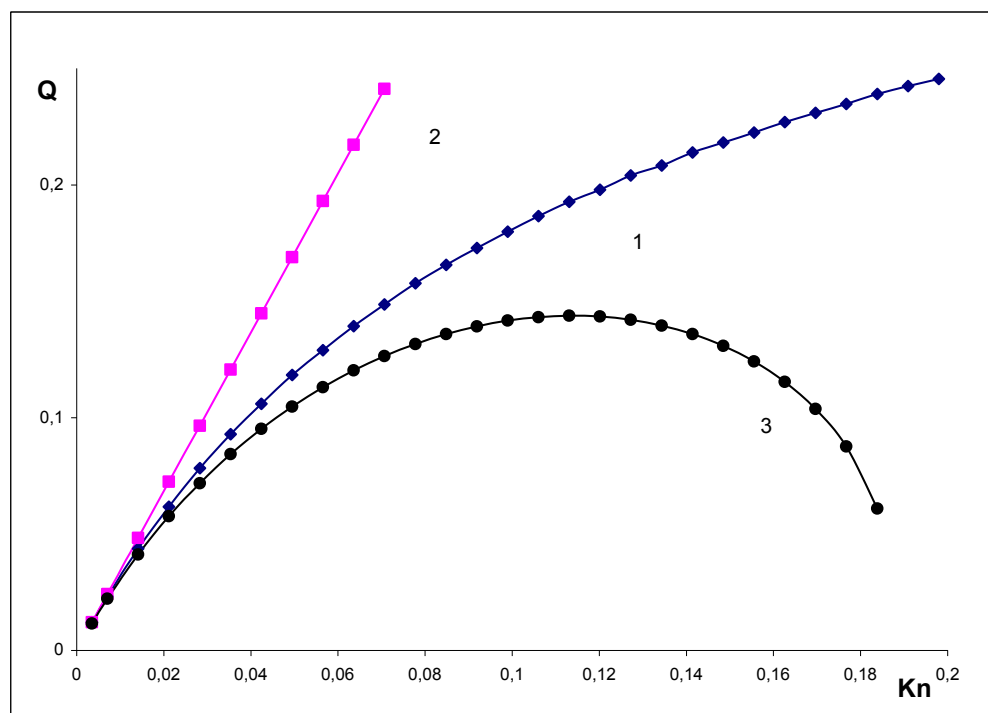


Рисунок 1.2. Сравнение расчетов потока энергии, передаваемой нижней пластине, для максвелловских молекул, полученных различными методами для $T=0.25$, $M=1$: 1– прямое статистическое моделирование; 2,3– уравнения Навье-Стокса с условиями прилипания (2) и скольжения (3)

Кроме того, был рассчитан поток энергии молекул, падающих на нижнюю пластину с условиями прилипания, а также с граничными условиями [38], имеющими вид скачка температур и скоростей при $y=0$ и $y=L$ при полной тепловой аккомодации:

$$Q = \text{Kn} T_{rel} \frac{d}{dx} \left(\frac{c_p T_{rel}}{2 \text{Pr}} + \frac{U_{rel}^2}{2} \right) \text{ при } y=0 \quad (1.6),$$

$$c_p=5/2; \text{Pr}=2/3.$$

На рис. 1.2. зависимости $Q(\text{Kn})$, полученные методом прямого статистического моделирования, сравниваются с результатами расчетов по формуле (1.6). При малых числах Кнудсена указанные решения близки.

1.3 ЭФФЕКТ МАКСИМУМА ЗАВИСИМОСТИ ПОТОКА НОРМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ОТ ЧИСЛА КНУДСЕНА

Известно, что зависимости напряжения трения [40] и потока энергии [41] от Kn немонотонны при больших числах Маха. В данной работе показано, что поток нормального импульса также немонотонен по Kn .

На рис.1.3–1.5 для максвелловских молекул приведены зависимости потока энергии, передаваемой пластине, напряжения трения на пластине и потока нормального импульса от числа Кнудсена для различных скоростей верхней пластины при $T=0.25$.

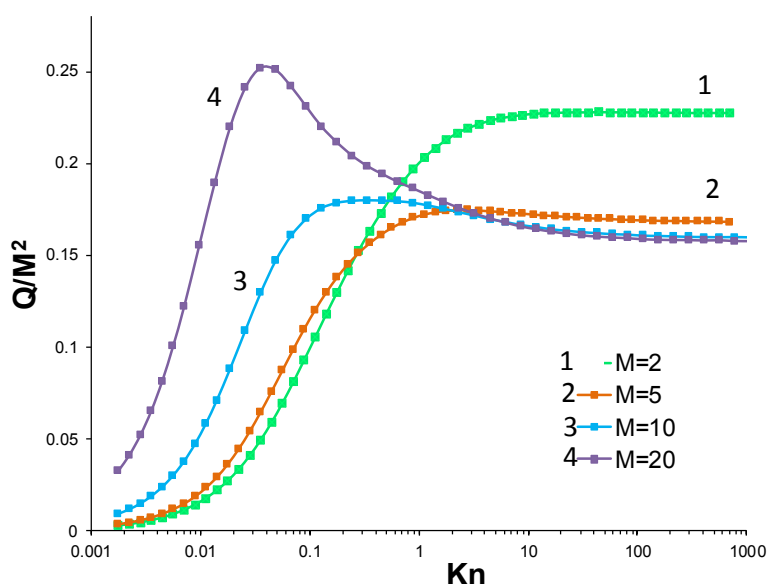


Рисунок 1.3. Зависимости потока энергии, передаваемой нижней пластине, от числа Кнудсена для псевдомаксвелловских молекул при $T=0.25$.

Как видно из рис. 1.4–1.5 при больших числах Маха все три зависимости имеют локальные максимумы, однако при $M=2$ это не так. При увеличении Kn зависимости потока энергии и напряжения трения в этом случае монотонно возрастают, в то время как зависимость потока нормального импульса от Kn по-прежнему имеет максимум.

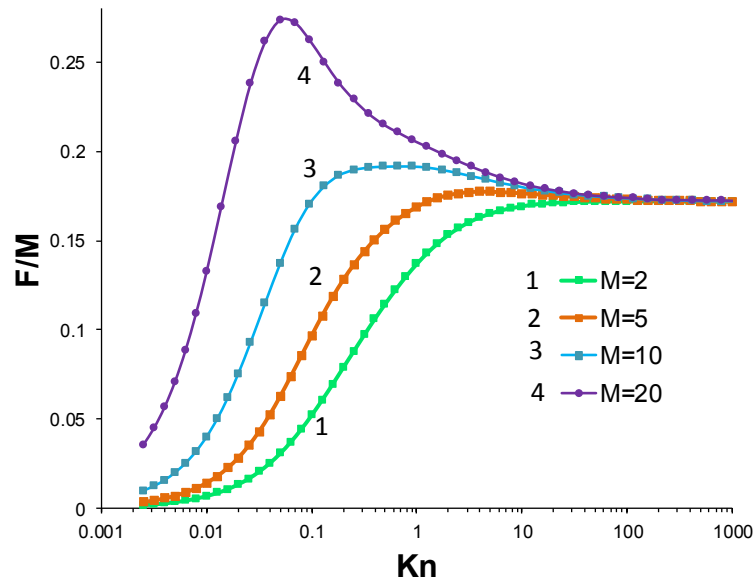


Рисунок 1.4. Зависимости напряжения трения от числа Кнудсена для максвелловских молекул при $T=0.25$ и различных числах Маха.

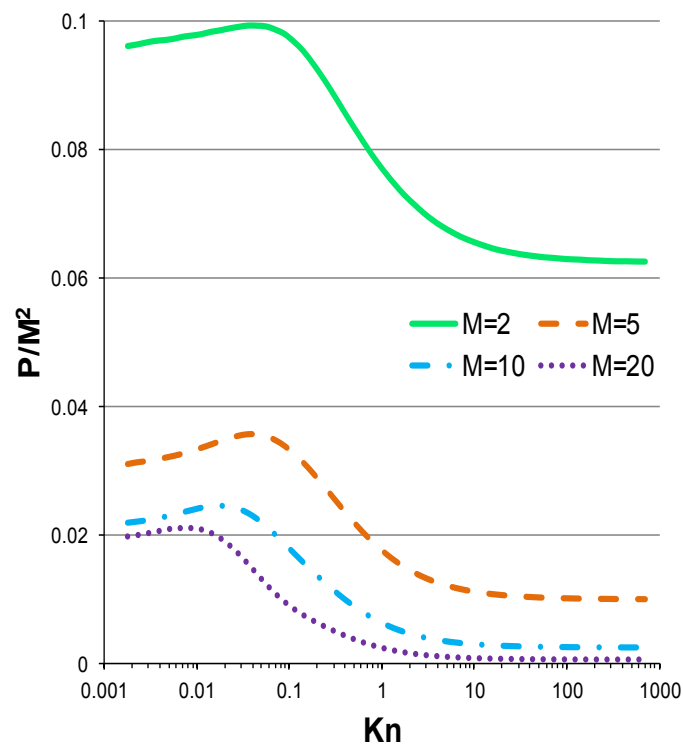


Рисунок 1.5. Зависимости потока нормального импульса от числа Кнудсена для максвелловских молекул при $T=0.25$ и различных числах Маха.

Такое поведение $P(Kn)$ имеет следующее объяснение. При $Kn \ll 1$ увеличение числа Кнудсена, как известно, приводит к усилению

превращения кинетической энергии потока в энергию хаотического движения молекул и увеличению температуры и давления газа. При $Kn \gg 1$ уменьшение числа Кнудсена приводит к дальнейшему повороту совокупности падающих молекул в сторону пластины и, как следствие, увеличению потока нормального импульса. Таким образом, при промежуточном значении Kn достигается максимум потока нормального импульса. Отметим, что этот результат [95] был подтвержден И. Н. Лариной и В.А. Рыковым, в [117] путем решения краевой задачи для модельного уравнения.

1.4 ЭФФЕКТ МАКСИМУМА ПОТОКА ЭНЕРГИИ ОТДАВАЕМОЙ ПЛАСТИНОЙ

Известно [41], что в переходном режиме течения Куэтта при больших числах Маха поток энергии, *передаваемой* пластине, достигает максимума при некотором числе Кнудсена. В данной работе обнаружено, что зависимость потока энергии, передаваемой «горячей» пластине (т. е. пластине с большей температурой), от числа Кнудсена имеет минимум (см. рис. 1.6). Это означает, что зависимость потока энергии, *отдаваемой* «горячей» пластиной, от числа Кнудсена также имеет максимум.

Этот эффект объясняется следующим образом. Уменьшение Kn от свободномолекулярного режима приводит к тому, что совокупность падающих на нижнюю платину молекул вследствие столкновений с отраженными молекулами кроме того, что дополнительно поворачивается еще и тормозится. Как следует из расчетов, уменьшение числа Кнудсена, начиная со свободномолекулярных значений и до $Kn \approx 0.5$, приводит к уменьшению средней энергии падающих молекул $\varepsilon_{av}(Kn)$ (нормированной на mc^2) и, благодаря повороту, увеличению их потока $N(Kn)$ (нормированного на $n_{av}c$). Это в свою очередь приводит к уменьшению потока энергии, передаваемой нижней пластине $Q = [\varepsilon_{av}(Kn) - e_w]N(Kn)$ (сопровождающемуся ростом его абсолютной величины при $Q < 0$). При этом газ постепенно термализуется. При $Kn \ll 1$ термализация становится доминирующей и приводит к росту средней энергии падающих молекул $\varepsilon_{av}(Kn)$ и уменьшению модуля потока энергии $|Q| = |[\varepsilon_{av}(Kn) - e_w]N(Kn)|$, но к увеличению самого потока энергии, передаваемой пластине $Q = [\varepsilon_{av}(Kn) - e_w]N(Kn)$, остающегося отрицательным. В результате (при $T > 1$) образуется отрицательный минимум

потока энергии, передаваемой «горячей» пластине, т.е. максимум потока энергии, отдаваемой пластиной.

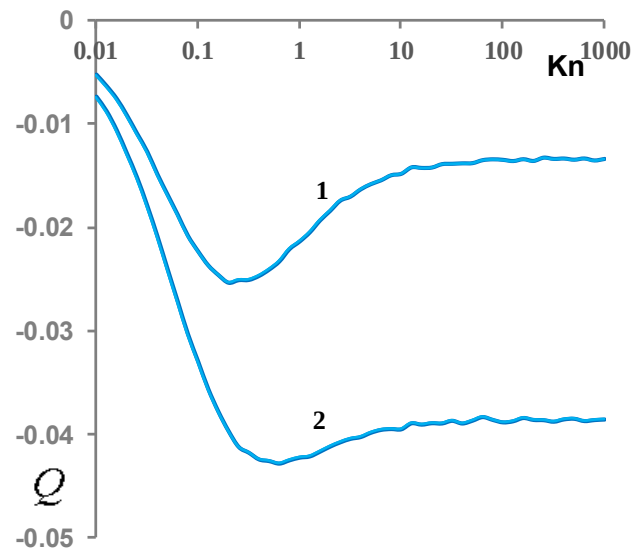


Рисунок 1.6. Зависимости потока энергии, передаваемого нижней пластине, от Kn для максвелловских молекул для $M=1$: 1,2 - $T = 1.46, 1.54$

Таким образом, существует не только максимум (по Kn) потока энергии, *передаваемого* пластине (при $M \gg 1$) [41], но и максимум (по Kn) потока энергии, *отдаваемого* пластиной ($T > 1$). Этот максимум существует и при $M \sim 1$.

1.5 ЭФФЕКТ ИЗМЕНЕНИЯ ЗНАКА ПОТОКА ЭНЕРГИИ, ПЕРЕДАВАЕМОЙ НИЖНЕЙ ПЛАСТИНЕ, ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЧИСЛА КНУДСЕНА

Если $T > 1$, то при определенных значениях $M(T)$ на этапе преобладания эффекта от торможения над эффектом от термализации средняя энергия падающих молекул становится меньше средней энергии отраженных молекул и поток энергии, передаваемой пластине, меняет знак, достигая затем, из-за начавшегося преобладания эффекта термализации, отрицательного минимума. Соответствующие зависимости представлены на рис. 1.7

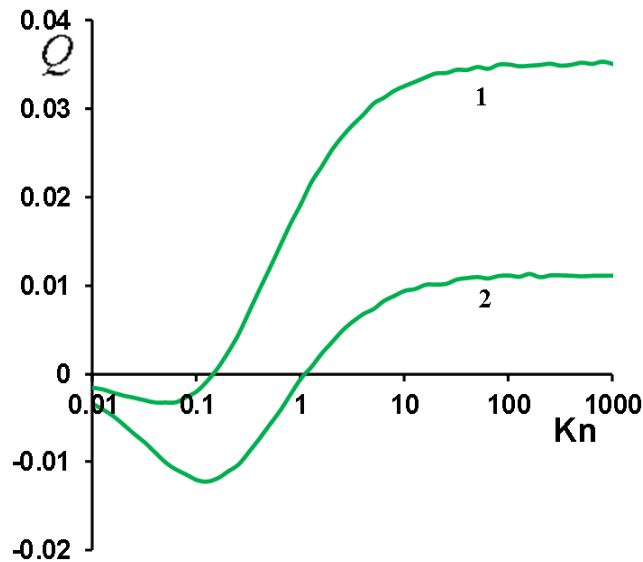


Рисунок 1.7. Зависимости потока энергии, передаваемой нижней пластине, от числа Кнудсена для псевдомаксвелловских молекул для $M=1$: 1,2 – $T=1.3, 1.38$

В навье-стоксовом пределе течения Куэтта тепловой поток при фиксированном M меняет знак при [118-120]

$$T = T_{NS}(M) = 1 + \text{Pr} \kappa M^2 / (2c_p),$$

а при фиксированном отношении температур пластин T при

$$M = M_{NS}(T) = \sqrt{2c_p(T - 1) / (\kappa \text{Pr})};$$

В свободномолекулярном пределе поток энергии меняет знак при фиксированном M при

$$T = T_{fm}(M) = 1 + \kappa M^2 / 4, \text{ причем } T_{NS} < T_{fm},$$

а при фиксированном отношении температур пластин T при

$$M = M_{fm}(T) = 2\sqrt{(T-1)/\kappa}, \text{ причем } M_{NS} > M_{fm}.$$

Следовательно, этот эффект имеет место в диапазоне отношений температур $T_{NS}(M) < T < T_{fm}(M)$ или чисел Маха $M_{fm}(T) < M < M_{NS}(T)$

При $T \leq 1$ рассматриваемый эффект не имеет места. Это связано с тем, что при $T > 1$ поток энергии, передаваемой неподвижной пластине при некотором числе Маха становится равным нулю, а при $T \leq 1$ поток энергии, передаваемой неподвижной пластине всегда больше нуля.

Таким образом, в диссертации показано, что в течении Куэтта при постоянном числе Маха изменение знака потока энергии, передаваемой пластине, может происходить не только вследствие нагрева или охлаждения пластин, но и за счет изменения степени разреженности газа. Это кардинально отличает течение Куэтта от задачи теплопроводности между двумя пластинами.

На рис. 1.8 рассматриваемый эффект изменения направления потока энергии между пластинами в результате увеличения числа Кнудсена сравнивается с эффектом изменения направления течения газа при термоэффузии.

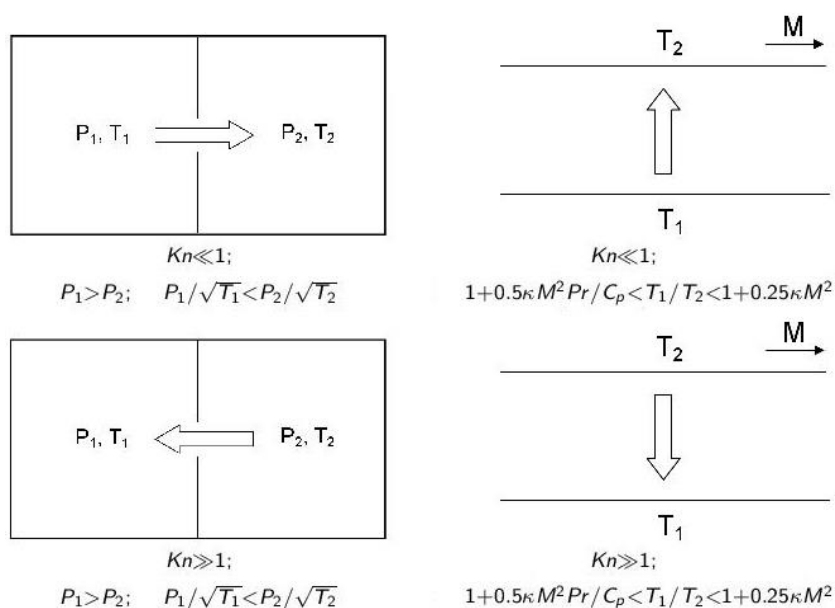


Рисунок 1.8. Смена направления потоков: вещества – в задаче о термоэффузии и энергии – в задаче Куэтта.

В навье-стоксовом пределе

$$Q < 0 \text{ при } M < M_{NS}; \quad Q > 0 \text{ при } M > M_{NS}; \quad .$$

С другой стороны, в свободномолекулярном пределе

$$Q < 0 \text{ при } M < M_{frm}; \quad Q > 0 \text{ при } M > M_{frm}$$

Значение $M_{boundary}$ числа Маха, при котором поток энергии на неподвижную пластину меняет знак, зависит от числа Кнудсена и отношения температур пластин и находится в диапазоне $M_{frm} < M_{boundary} < M_{NS}$. Таким образом, плоскость (M, T) делится на три части. В двух из них знак потока энергии постоянен, а в третьей зависит от числа Кн. Эти области показаны на рис. 1.9а.

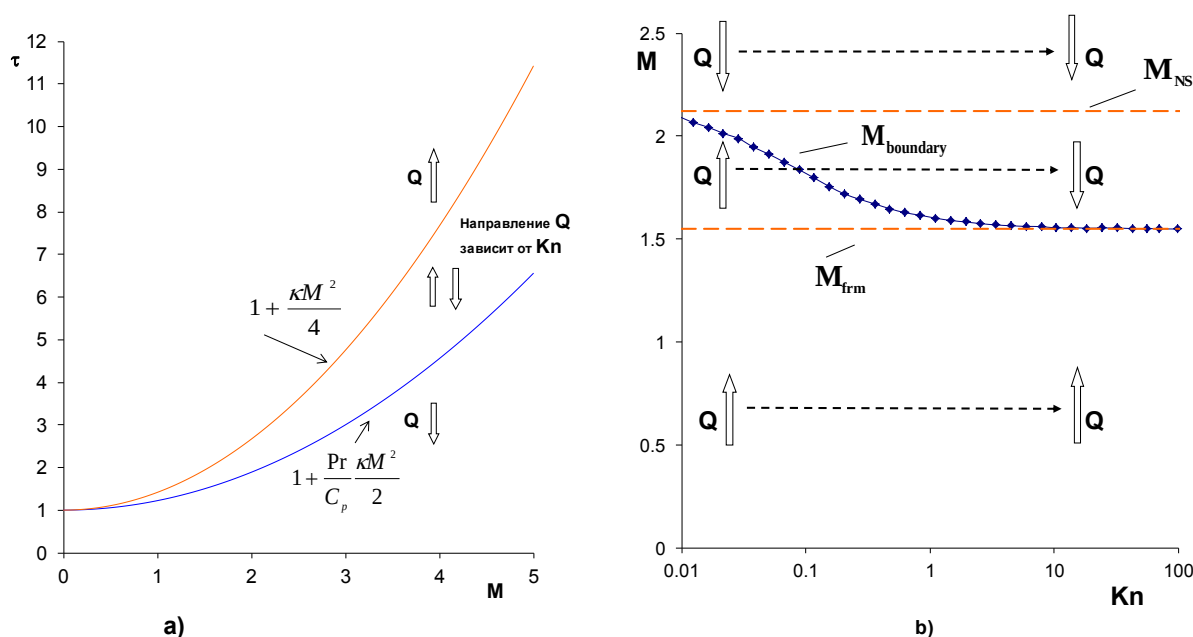


Рисунок 1.9. Области с различными направлениями потока энергии:
а) (M, T) плоскость; б) (Kn, M) плоскость при $T=2$.

Кривая $M_{boundary}(Kn)$, разделяющая области знакопостоянства потоков энергии на неподвижную пластину при $T=2$ приведена на рис. 1.9б. Как видно из графика при $M_{frm} < M_{boundary} < M_{NS}$ увеличение числа Кнудсена может приводить к изменению знака потока энергии, передаваемой неподвижной пластине.

Рассмотрим, как меняется характер зависимости $Q(Kn)$ с увеличением числа Маха при $T > 1$. На рис.1.10. представлены зависимости $Q(Kn)$ и $F(Kn)$ при $T=2$ и различных значениях M . Как видно из графиков при небольших числах Маха $Q(Kn)$ монотонно возрастает с уменьшением Kn . Это

объясняется тем, что в этом случае эффект термализации преобладает над эффектами торможения и частичного разворота потока при всех значениях Kn . Однако, начиная с некоторого значения M , из-за описанного выше преобладания эффекта торможения зависимость $Q(Kn)$ становится немонотонной и у $Q(Kn)$ возникает отрицательный минимум. При $M > M_{frm}$ свободномолекулярное значение потока энергии становится положительным и при $M_{frm} < M < M_{NS}$ изменение числа Кнудсена приводит к тому, что поток энергии, передаваемой пластине, меняет знак.

При $M > M_{NS}$ зависимость $Q(Kn)$ вначале вновь становится монотонной, а затем, когда M достигает значений много больших единицы у этой зависимости возникает максимум. В то же время зависимость $F(Kn)$ становится немонотонной лишь при $M \gg 1$.

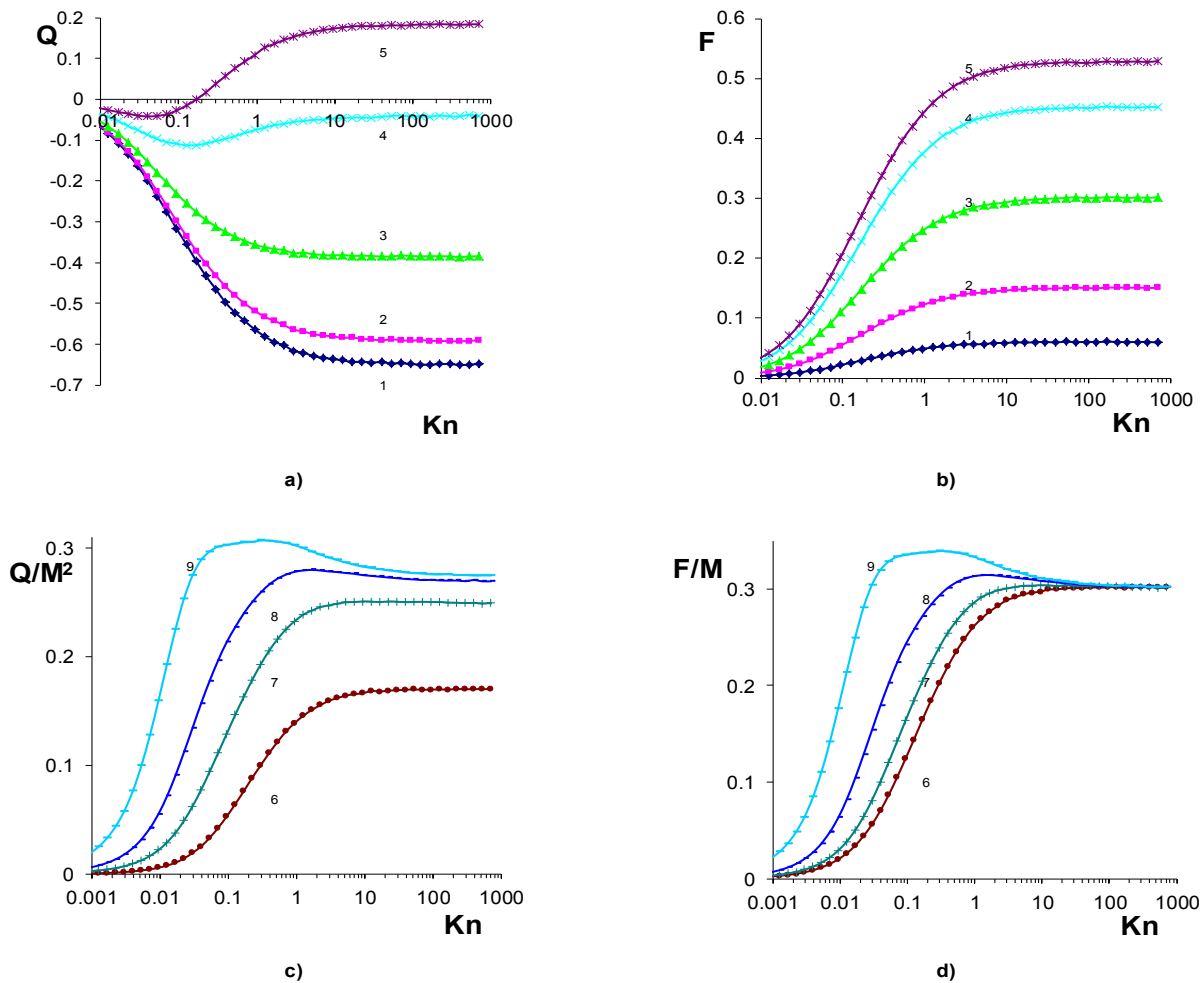


Рисунок 1.10. Зависимости потока энергии, передаваемой неподвижной пластине (а, с) и напряжения трения (b, d) от числа Кнудсена. $T=2$; 1- 9: $M=0,2; 0,5; 1; 1,5; 1,75; 2,5; 5; 10; 20$;

Итак, в первой главе диссертации показано, что течение Куэтта разреженного газа обладает следующими свойствами:

1. Зависимость потока нормального импульса от числа Кнудсена имеет максимум.
2. Зависимость потока энергии, *отдаваемой* пластиной, от числа Кнудсена при определенных параметрах течения имеет максимум.
3. В определенном интервале значений отношений температур пластин, зависящем от числа Маха, поток энергии, передаваемый пластине, при изменении числа Кнудсена меняет знак.

Эти эффекты являются следствием процесса поворота, торможения и термализации совокупности падающих молекул. Однако поворот, торможение и термализация падающих молекул при изменении характерного числа Кнудсена происходят и в других течениях разреженного газа. *Поэтому следует ожидать появления эффектов, свойственных течению Куэтта во многих других течениях разреженного газа как стационарных, так и нестационарных при соответствующих значениях параметров, например, в течении Рэлея и при обтекании пластины под нулевым углом атаки.*

ГЛАВА II. ЗАДАЧА РЭЛЕЯ ДЛЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача Рэлея о течении, возникающем в полупространстве после внезапного начала движения бесконечной пластины, является одной из классических задач гидродинамики. В случае вязкой несжимаемой жидкости ее решение сводится к решению одного из основных уравнений математической физики: уравнения теплопроводности [121,122]. Задача Рэлея для сжимаемой жидкости исследовалась в [123-125] на основе уравнений Навье-Стокса. Однако уравнения Навье-Стокса непригодны для описания движения газа сразу после начала движения пластины в течение периода времени порядка среднего времени между столкновениями пары молекул. В этом случае необходимо решать уравнение Больцмана. В такой постановке задача Рэлея рассматривалась в [45-52]. Однако целью этих работ была, прежде всего, демонстрация методов решения уравнения Больцмана, а не всестороннее исследование задачи Рэлея. Задача Рэлея стала играть роль тестовой задачи, на которой апробировались различные методы решения уравнения Больцмана. В результате такого подхода задача Рэлея на временах сравнимых со средним временем столкновения между молекулами оказалась недостаточно исследованной.

Задача Рэлея не единственная классическая задача, использовавшаяся для тестирования различных методов решения уравнения Больцмана. К числу таких задач относится также задача Куэтта. Однако задача Куэтта все же иногда привлекала к себе внимание и в качестве удобного инструмента для исследования кинетических эффектов переходного режима [40-42], возникающих при изменении числа Кнудсена. Следует отметить, что, хотя задача Рэлея и задача Куэтта для разреженного газа начали исследоваться практически одновременно [45,53], автору данной диссертации неизвестны публикации, посвященные эффектам переходного режима в задаче Рэлея. Обнаружению и исследованию таких эффектов посвящена данная глава.

В ней изучается, как меняются со временем поток энергии, передаваемой пластине, напряжение трения и поток нормального импульса. В отличие от задачи Куэтта, задача Рэлея является нестационарной. Причем при увеличении времени, прошедшего с начала движения, возникающее течение из свободномолекулярного через переходный режим трансформируется в навье-стоксовое. Таким образом, в задаче Рэлея для демонстрации различных режимов течения нет необходимости менять параметры задачи: кинетические эффекты в задаче Рэлея проявляются по мере увеличения времени, прошедшего от начала движения пластины.

Рассмотрим полубесконечное пространство $y > 0$, заполненное покоящимся газом с плотностью ρ_∞ и температурой T_∞ . Пусть диффузно отражающая плоскость $y=0$ в момент времени $\bar{t} = 0$ приобретает температуру T_s и начинает двигаться в своей плоскости со скоростью U_s , направленной вдоль оси x . Оси x и y образуют декартову систему координат, связанную с движущейся пластиной.

Для исследования возникающего в задаче Рэлея нестационарного течения необходимо решить уравнение Больцмана для функции распределения молекул.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{t}} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = J(f, f) \quad (2.1)$$

с начальными условиями

$$f = n_\infty (2\pi R_{gas} T_\infty)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(v_x + U_s)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_\infty} \right], \quad y > 0, \quad \bar{t} = 0 \quad (2.2)$$

и граничными условиями

$$f = n_r (2\pi R T_s)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_s} \right], \quad v_y > 0, \quad y = 0 \quad (2.3)$$

$$f \rightarrow n_{\infty} (2\pi R T_{\infty})^{-3/2} \exp \left[-\frac{(v_x + U_s)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2 R_{gas} T_{\infty}} \right] \quad . \quad (2.4)$$

$y \rightarrow \infty$

Предполагается, что отражение молекул от пластины происходит диффузно с температурой поверхности T_s .

Здесь $J(f, f)$ – интеграл столкновений молекул [38]; v_x, v_y, v_z – декартовы компоненты скорости молекул, n_{∞} – числовая плотность невозмущенного газа: $n_{\infty} = \rho_{\infty} / m$, где m – масса молекулы. Параметр функции распределения отраженных молекул n_r находится из условия баланса падающих и отраженных молекул.

Решение задачи нахождения потоков импульса и энергии, передаваемых пластине, зависит от безразмерных переменных $T_w = T_s / T_{\infty}$; $U_w = U_s / c_{\infty}$; $t = \bar{\tau} \cdot c_{\infty} / \lambda_{\infty}$, где $c_{\infty} = \sqrt{2 R_{gas} T_{\infty}}$, R_{gas} – газовая постоянная, λ_{∞} – длина свободного пробега молекул в невозмущенном газе.

Для модели молекул «твердые сферы», используемой в данной работе, $\lambda_{\infty} = (\sqrt{2} \sigma_T n_{\infty})^{-1}$, где σ_T – сечение столкновения молекул. Безразмерное время играет роль обратного числа Кнудсена. Первоначально, при $t \ll 1$ течение Рэлея близко к свободномолекулярному. С увеличением t оно становится переходным, а затем при $t \gg 1$ навье-стоксовым.

Задача Рэлея (2.1-2.4) решена в [71] методом прямого статистического моделирования. При этом целью [71] была демонстрация эффективности метода и сравнение результатов с [49]. Основное внимание в [71] было уделено распределению макроскопических величин: плотности, скорости, температуры.

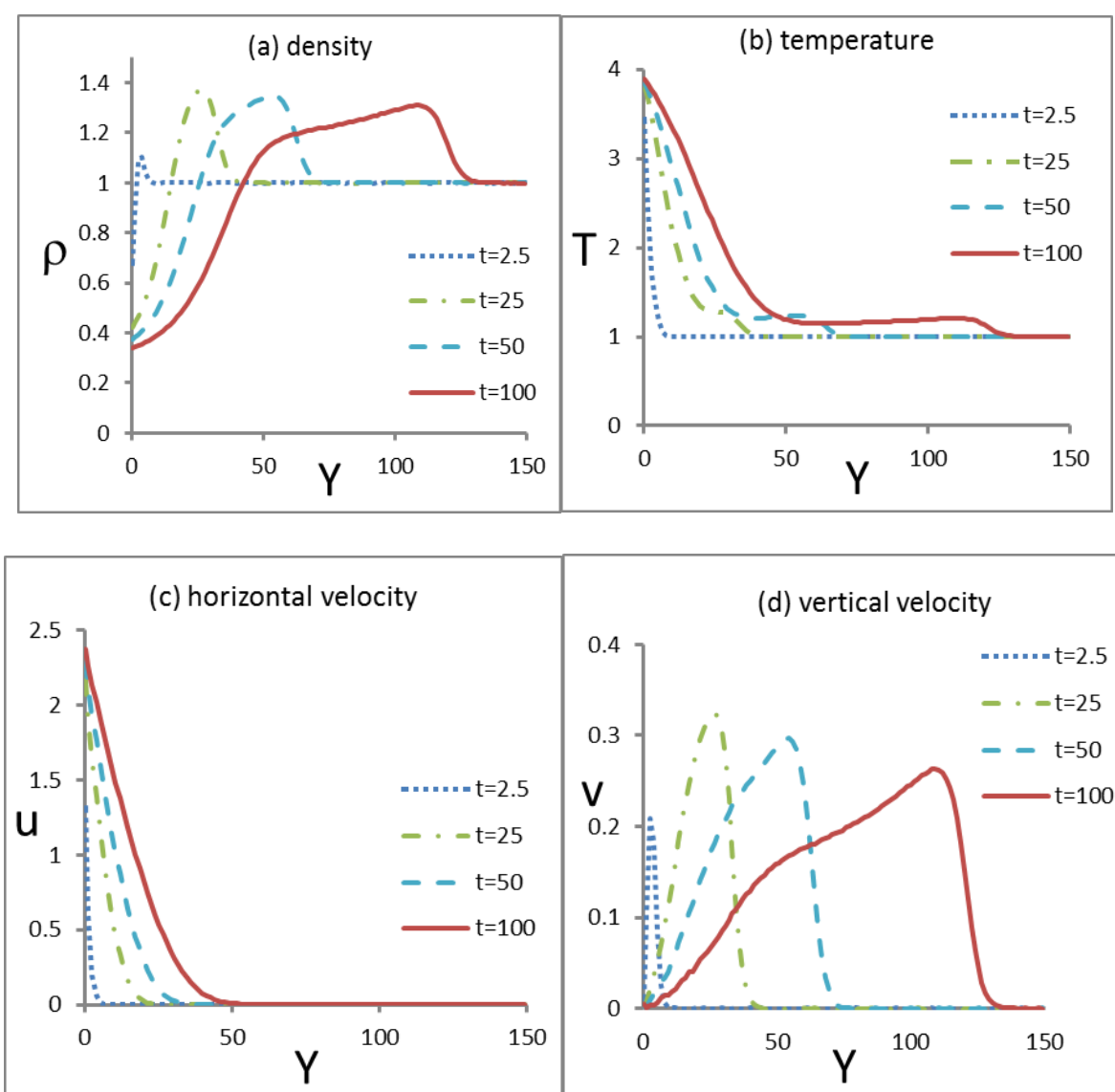


Рисунок 2.1. Распределение плотности (а), температуры (б), горизонтальной (с) и вертикальной (д) составляющих скорости газа при $T_w = 4, U_w = 2.6$.

На рис. 2.1 для $T_w = 4; U_w = 2.6$ приведены распределения по оси y плотности и температуры, а также горизонтальной и вертикальной составляющих скорости газа в системе координат, связанной с невозмущенным газом. Для получения этих и последующих результатов использовалась программа расчета задачи Рэлея методом прямого статистического моделирования из монографии [71]. Кривые на рис. 2.1 аналогичны, приведенным в [71] для $T_w = 1.6; U_w = 2$. Как видно из графиков в течении возникает область с $u=0$, перед которой бежит ударная волна.

Целью данной работы является исследование изменения со временем потока нормального импульса, передаваемого пластине P_{yy} , напряжения трения на пластине P_{xy} и потока энергии E_y , передаваемой пластине, и при различных температурах и скоростях пластины.

$$p_{yy} = -\int m v_y v_y f(\mathbf{V})|_{y=0} d\mathbf{V}, \quad p_{xy} = -\int m v_x v_y f(\mathbf{V})|_{y=0} d\mathbf{V},$$

$$E_y = -\int v_y \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{V})|_{y=0} d\mathbf{V}, \text{ где } d\mathbf{V} = dv_x dv_y dv_z.$$

2.2 МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для решения задачи пространство над плоскостью $y = 0$ разбивалось на ячейки размером Δy . В различных вариантах размер ячейки менялся от приблизительно $\lambda_\infty / (3U_w)$, ($U_w > 1$) до приблизительно $\lambda_\infty / 3$. Внутри ячеек параметры потока считались постоянными. В начальный момент времени ячейки помещались моделирующие течение молекулы, распределенные по скоростям согласно (2.2). Число молекул в ячейке обычно равнялось 200. Эволюция системы частиц на временном интервале $\Delta \bar{\tau}$, расщеплялась на два этапа:

1) Свободный перелет молекул за время $\Delta \bar{\tau}$; если молекулы достигают пластины, то их скорости меняются в соответствии с (2.3). Внешняя граница моделируется диффузным отражением на достаточно большом расстоянии от пластины.

2) Моделирование столкновений молекул, принадлежащих данной ячейке. Число столкновений молекул в ячейке за время $\Delta \bar{\tau}$ должно быть равно соответствующему числу столкновений в газе. На данном этапе, мы используем алгоритм, предложенный G.A. Bird (подробное описание можно найти в [71]). Величина $\Delta \bar{\tau}$ изменялась в различных вариантах от примерно $\lambda_\infty / (3c_\infty U_w)$, ($U_w > 1$) до примерно $\lambda_\infty / (3c_\infty)$.

Макропараметры газа в ячейках вычислялись по известным скоростям молекул. Импульс и энергия, передаваемые пластине за время $\Delta \bar{\tau}$, вычислялись с помощью известных значений скоростей падающих и отраженных молекул.

Статистическая неопределенность полученных результатов уменьшалась путем многократных повторений эволюции рассматриваемой динамической системы. Число повторений обычно составляло примерно 10000. Точность результатов определялась величиной статистических флуктуаций и, как правило, не превышала 1-2%.

2.3 ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Для проверки правильности результатов расчетов задачи Рэлея, полученных в данной работе методом прямого статистического моделирования, сравним распределения температуры, плотности и компонентов скоростей газа, с соответствующими решениями краевой задачи для уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения на пластине [66] в различные моменты времени.

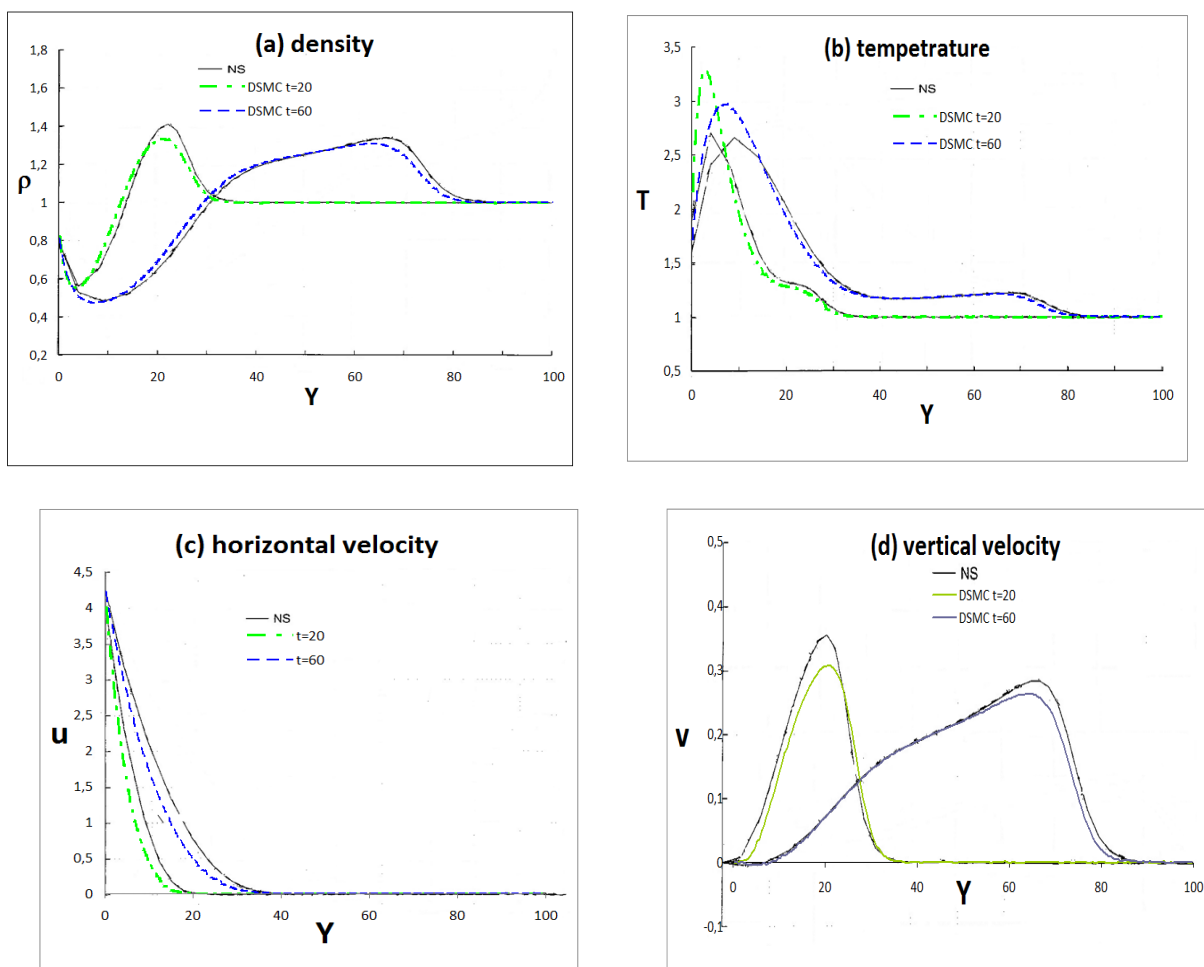


Рисунок 2.2. Сравнение распределений плотности (а), температуры (б), горизонтальной (с) и вертикальной (д) составляющих скорости газа, полученных методом DSMC с решением краевой задачи для уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения [66] при $T_w = 1, U_w = 4.564$.

На рис. 2.2 приведены распределения по оси y плотности ρ и температуры T , нормированных на ρ_∞ и T_∞ , а также показаны

горизонтальная u и вертикальная v составляющие массовой скорости, нормированной на c_∞ , в системе координат, связанной с невозмущенным газом. Расстояние от пластины нормировано на λ_∞ . Как видно из графиков и при $t = 20$ и при $t = 60$ результаты, полученные различными методами в основном достаточно близки.

Как и следовало ожидать некоторое отличие имеет место для температуры непосредственно вблизи пластины на расстоянии до $10\lambda_\infty$, причем при $t = 20$ большее, чем при $t = 60$. По-видимому, это связано с тем, что текущее число Кнудсена равное $1/t$ в первом случае еще достаточно велико $1/t = 0.05$.

2.4 ЭФФЕКТ МАКСИМУМА ЗАВИСИМОСТИ ПОТОКА НОРМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ОТ ВРЕМЕНИ

Обозначим $p_x(t)$ и $p_y(t)$ абсолютные величины средних значений горизонтальной и вертикальной компонент импульса молекул перед ударом о пластину в системе координат, связанной с пластиной, нормированные на mc_∞ .

$$p_x = \frac{\left| \int_{v_y < 0} v_x f|_{y=0} d\mathbf{V} \right|}{c_\infty \int_{v_y < 0} f|_{y=0} d\mathbf{V}}, \quad p_y = \frac{\left| \int_{v_y < 0} v_y f|_{y=0} d\mathbf{V} \right|}{c_\infty \int_{v_y < 0} f|_{y=0} d\mathbf{V}}.$$

Обозначим $N(t)$ абсолютную величину нормированного на $n_\infty c_\infty$ потока молекул на пластину в системе координат, связанной с пластиной:

$$N = \frac{\left| \int_{v_y < 0} v_y f|_{y=0} d\mathbf{V} \right|}{n_\infty c_\infty}.$$

Обозначим $P_{xy}(t)$ и $P_{yy}(t)$ абсолютные величины потока нормального импульса, передаваемого пластине и напряжения трения, нормированные на свои свободномолекулярные значения:

$$P_{xy}(t) = \frac{2\sqrt{\pi}|p_{xy}|}{\rho_\infty c_\infty^2}, \quad P_{yy}(t) = \frac{4|p_{yy}|}{\rho_\infty c_\infty^2(1 + \sqrt{T_w})}.$$

При $t \ll 1$ течение Рэлея является свободномолекулярным. Используя значения соответствующих свободномолекулярных величин нетрудно получить что

$$p_x(0) = U_w, \quad p_y(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad N(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

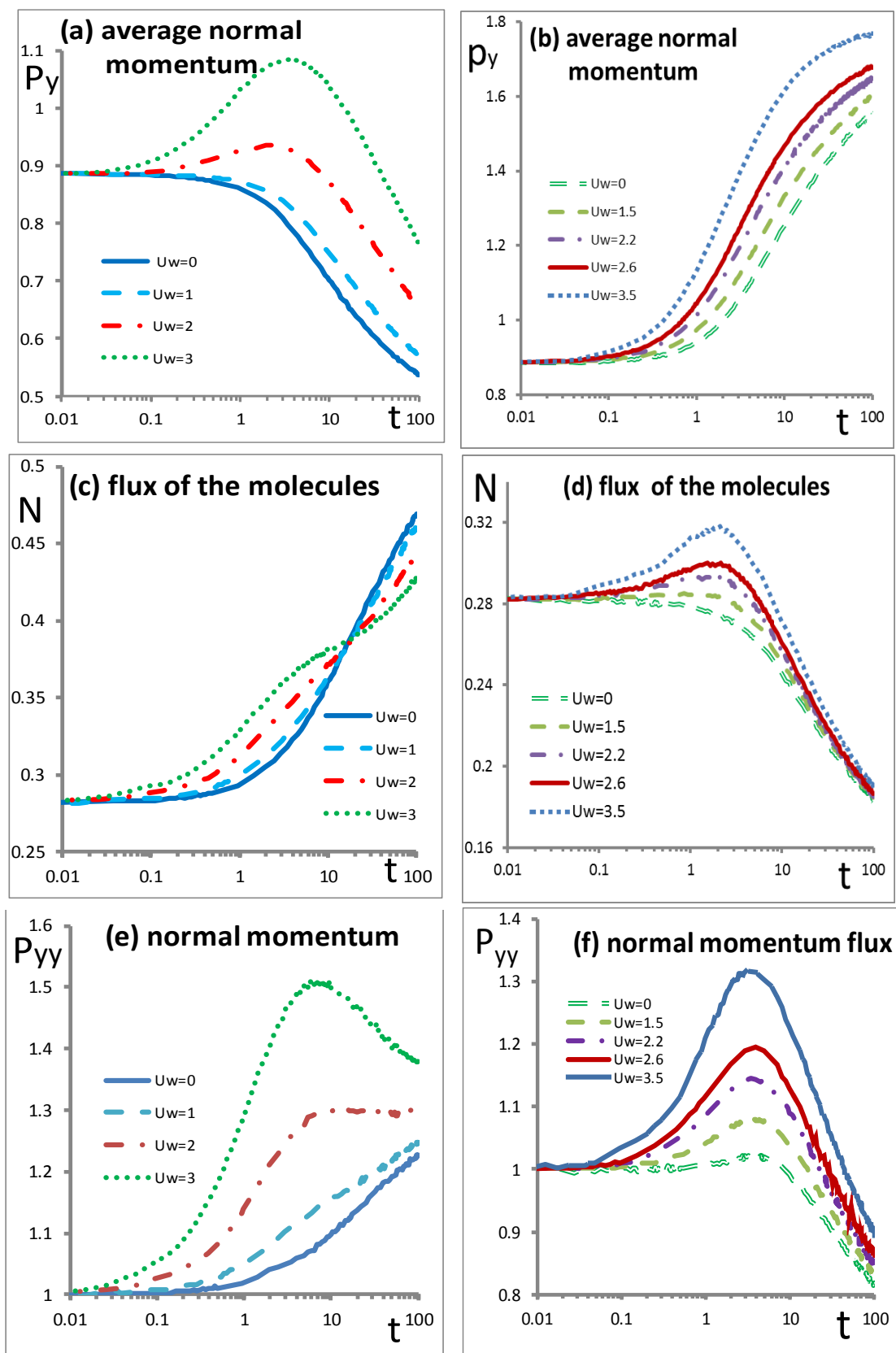


Рисунок 2.3. (a,b) абсолютное значение среднего нормального импульса падающей молекулы $p_x(t)$; (c,d) поток падающих на пластину молекул; (e,f) абсолютная величина нормального импульса, передаваемого пластине; $T_w = 0.25$ (a,c,e) и $T_w = 4$ (b,d,f), $y = 0$.

Зависимости $p_y(t)$ и $N(t)$ $p_x(t)$ приведены на рис. 2.3 при $T_w = 0.25$ и $T_w = 4$. Как видно из рис. 2.3а, если пластина холодная ($T_w = 0.25$) и скорость потока недостаточно велика ($U_w = 0; 1$), то изначально доминирует термализация и абсолютная величина среднего нормального импульса падающих молекул $p_y(t)$ монотонно убывает. Однако уже при $U_w = 2$ процесс дополнительного поворота падающих молекул при $t \ll 1$ доминирует над термализацией и $p_y(t)$ начинает расти. Затем, начиная с $t \approx 3$ доминирует термализация, и $p_y(t)$ из-за охлаждения газа убывает после достижения максимума. С увеличением U_w максимум $p_y(t)$ становится все более выраженным (см. рис. 2.3а). При этом, как видно из рис. 2.3с, несмотря на уменьшение нормальных составляющих скоростей падающих молекул, их поток $N(t)$ из-за увеличения плотности газа при охлаждении монотонно возрастает во всех четырех случаях. Поскольку $P_{yy}(t)$ пропорционален $[p_y(t) + \sqrt{\pi T_w} / 2] N(t)$ этот рост оказывается достаточным для первоначального увеличения потока нормального импульса $P_{yy}(t)$ даже при $U_w = 0$, несмотря на уменьшение $p_y(t)$ (см. рис. 2.3а,е). При $U_w = 0$ и $U_w = 1$ зависимость $P_{yy}(t)$ монотонно возрастает, однако при $U_w = 2$ и $U_w = 3$ из-за значительного возрастания $p_y(t)$ при $t \ll 1$ потоки нормального импульса $P_{yy}(t)$, достигнув своих максимальных значений, начинают монотонно убывать, стремясь к навье-стоксовому пределу.

Если пластина горячая ($T_w = 4$), то в отличие от случая холодной пластины, и первоначальный поворот потока падающих молекул и термализация приводят к росту $p_y(t)$ при $t \ll 1$ даже если $U_w = 0$. Если скорость потока не слишком велика, как на рис. 2.3б, то это возрастание и в дальнейшем остается монотонным. В отличие от случая холодной пластины,

поток молекул $N(t)$ из-за уменьшения плотности вследствие расширения газа либо образует очень слабый максимум или даже монотонно убывает при небольших скоростях ($U_w = 0; 1.5$), либо убывает после образования заметного максимума, вызванного значительным первоначальным дополнительным разворотом падающих молекул вследствие столкновения с отраженными при $U_w = 2.2; 2.6; 3.5$ (см. рис. 2.3d). Одновременный рост $p_y(t)$ и $N(t)$ приводит первоначально возрастанию абсолютной величины потока нормального импульса, передаваемого пластине $P_{yy}(t)$, до значений, превышающих навье-стоксовый предел, к которому он затем после достижения максимума стремится (см. рис. 2.3f). Отметим, что даже при небольших скоростях первоначального роста $p_y(t)$ он оказывается достаточным для образования максимума $P_{yy}(t)$.

Таким образом, и в случае холодной и в случае горячей пластины при соответствующих значениях скоростей газа и температур пластины имеет место максимум по времени потока нормального импульса, передаваемого пластине. И в том, и в другом случае этот эффект объясняется первоначальным разворотом потока падающих молекул при столкновении с отраженными и последующей термализацией.

2.5 ЭФФЕКТ МАКСИМУМА ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕНИЯ ТРЕНИЯ НА ПЛАСТИНЕ ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ $M \gg 1$.

На рис. 2.4 приведены зависимости от времени среднего горизонтального импульса падающих молекул $p_x(t)$ и напряжения трения на пластине $P_{xy}(t)$ для различных значений $U_w \leq 3.5$ при $T_w = 0.25$ и $T_w = 4$. Напряжение трения нормировано на свое свободномолекулярное значение.

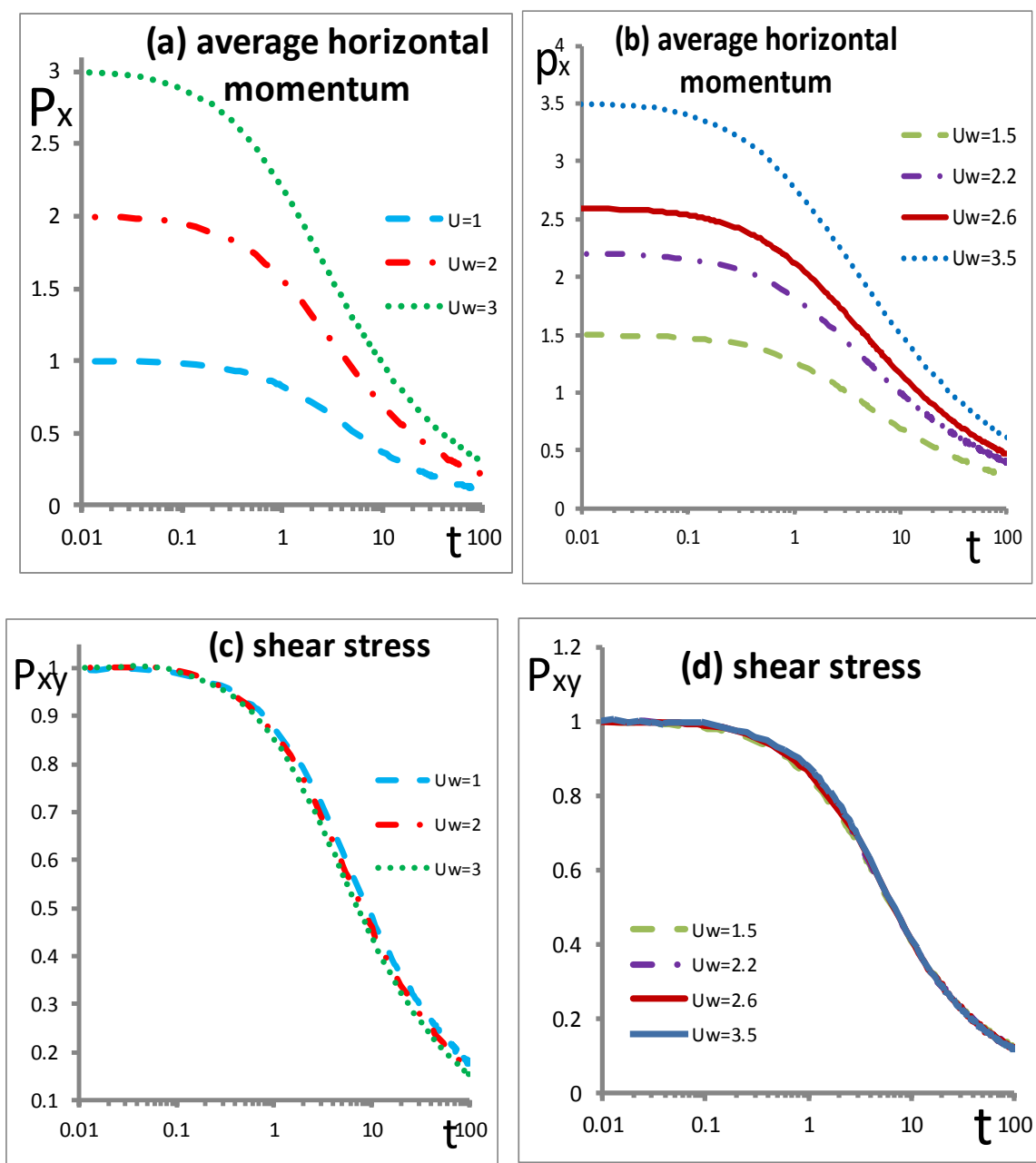


Рисунок 2.4. (a,b) абсолютное значение среднего горизонтального импульса $p_x(t)$; (c,d) абсолютная величина напряжения трения; $T_w = 0.25$ (a,c,) и $T_w = 4$ (b,d), $y = 0$.

Абсолютная величина напряжения трения $P_{xy}(t)$ пропорциональна $p_x(t)N(t)$. В результате торможения совокупности падающих молекул, как видно из рис. 2.4a и рис. 2.4b, $p_x(t)$ уменьшается. С другой стороны, хотя $N(t)$ при этом может и возрастать (см. рис. 2.4c и рис. 2.4d), этого возрастания во всех случаях, рассмотренных на рис. 2.3 и рис. 2.4, оказывается недостаточно для роста $P_{xy}(t)$ и абсолютная величина напряжения трения монотонно убывает. Отметим, что, как видно из рис. 2.4c и рис. 2.4d, зависимости напряжения трения от времени, нормированные на свои свободномолекулярные значения, для скоростей, принадлежащих диапазону $1 \leq U_w \leq 3.5$, совпадают почти с графической точностью. Расчеты показывают, что это утверждение справедливо и при меньших значениях U_w . Ситуация аналогична той, что имеет место для зависимости нормированного напряжения трения от числа Кнудсена в задаче Куэтта при изменении числа Маха пластины, как параметра [62].

Увеличение $N(t)$ возможно при возникновении мощного потока молекул в сторону пластины. Сильный поток молекул в сторону стенки возникает при $M \gg 1$ ($U_w \gg 1$) в результате дополнительного поворота падающих молекул в сторону стенки после столкновений с отраженными молекулами. Зависимости $N(t)$, $P_{yy}(t)$ и $P_{xy}(t)$ для $T_w = 0.25$ при различных U_w приведены на рис. 2.5. Как видно из графиков при $U_w = 25$ зависимость $P_{xy}(t)$ имеет максимум. Первоначальный рост $N(t)$ оказывается в этом случае достаточно сильным не только для возрастания $P_{yy}(t)$, но и для роста $P_{xy}(t)$. Увеличение $N(t)$ возможно и при $c_w \gg c_\infty$, т.е. при $\sqrt{T_w} \gg 1$ (и любых значениях U_w) в результате столкновений падающих молекул с быстрыми отраженными молекулами.

На рис. 2.6 приведены зависимости $p_x(t)$, $N(t)$ и $P_{xy}(t)$ при $T_w = 30$ и различных значениях U_w . Сравнение с рис. 2.5 показывает, что увеличение T_w приводит к тому, что максимум зависимости $P_{xy}(t)$ возникает при меньших значениях U_w

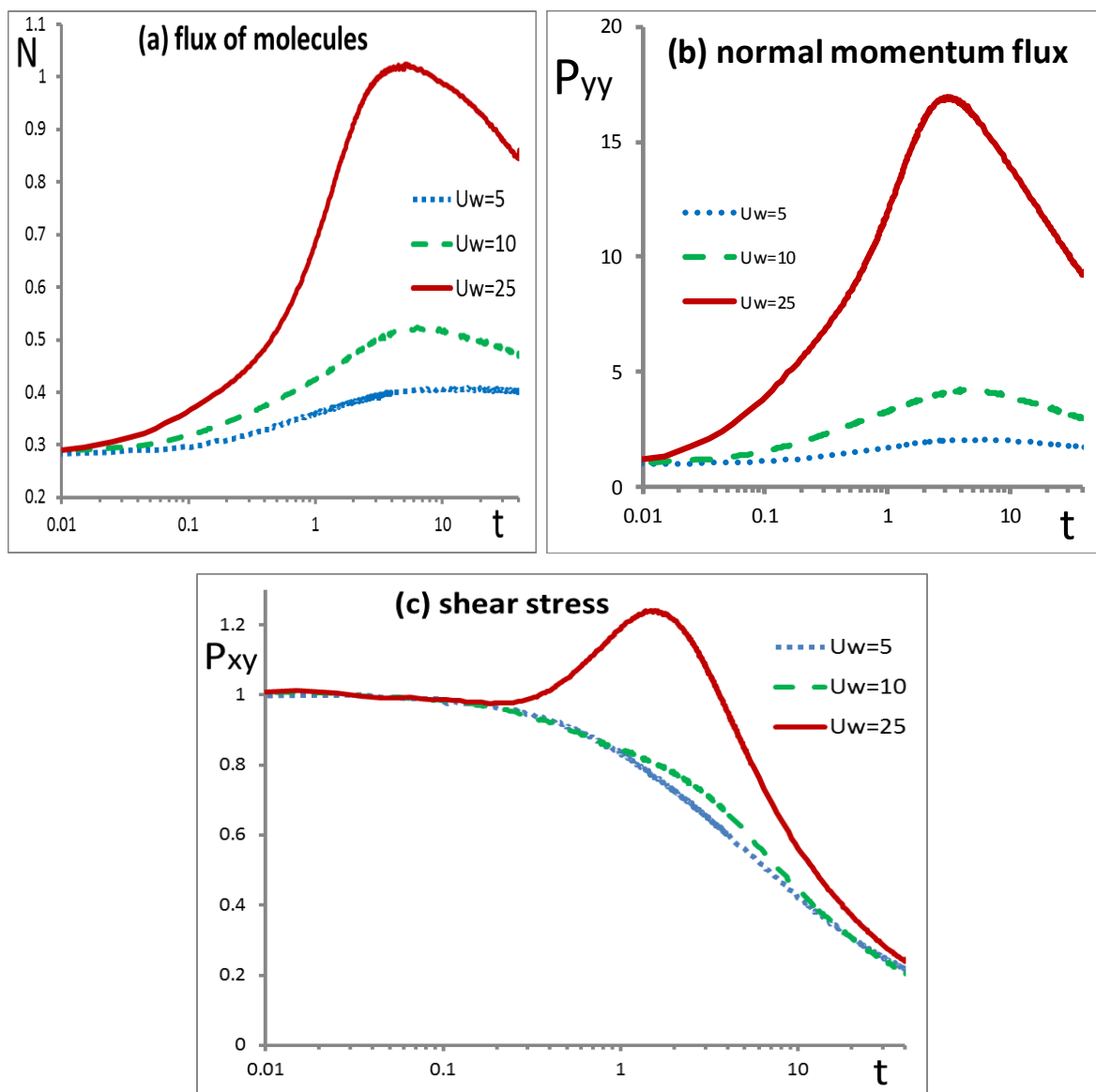


Рисунок 2.5. (а) абсолютное значение потока падающих молекул; (б) абсолютное значение потока нормального импульса, передаваемого пластине; (с) абсолютное значение напряжения трения; $T_w = 0.25$, $y = 0$.

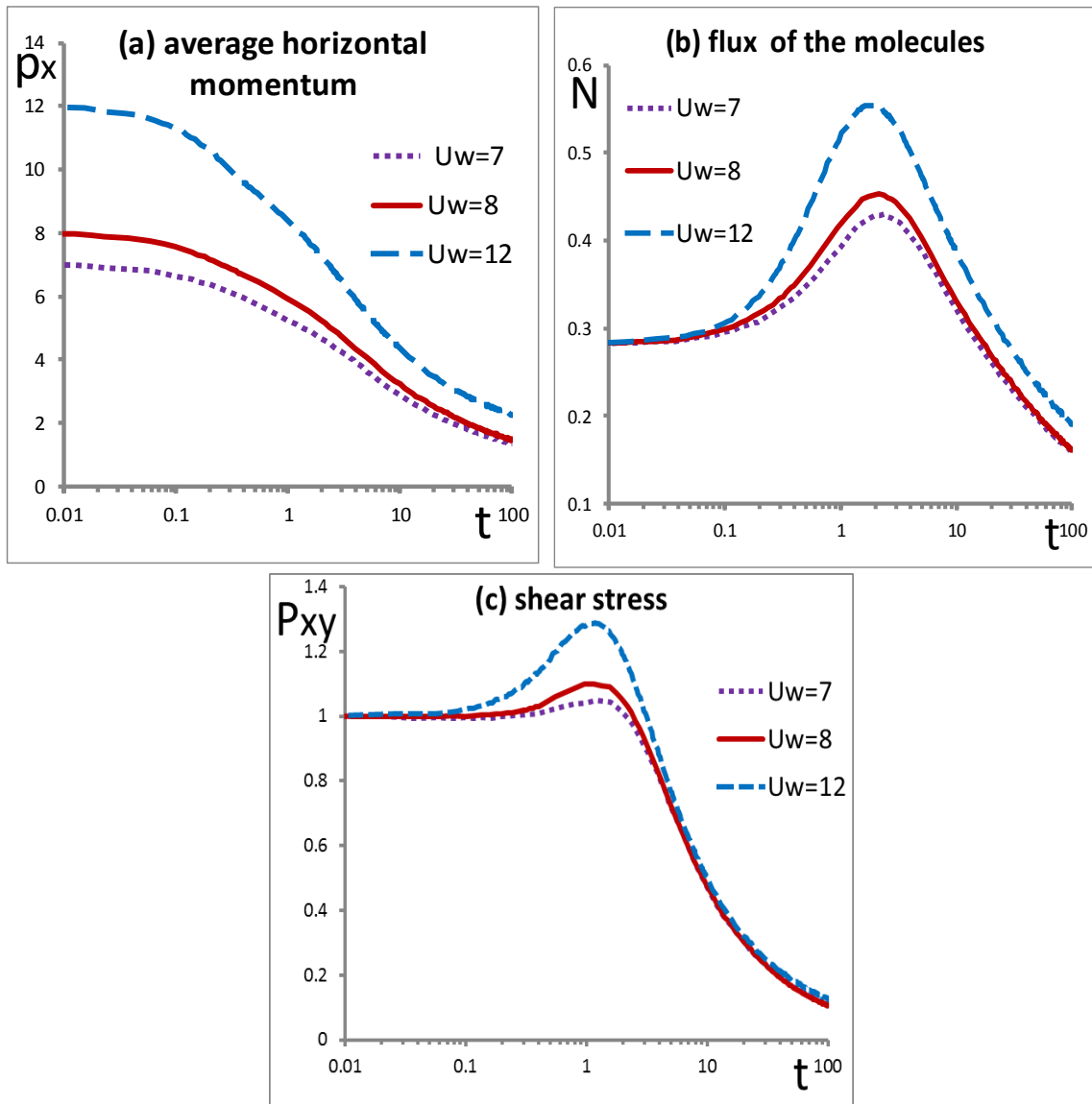


Рисунок 2.6. (a) абсолютное значение среднего горизонтального импульса падающих молекул (b) абсолютное значение потока падающих молекул; (c) абсолютное значение напряжения трения; $T_w = 30$, $y = 0$.

Таким образом, как и в течении Куэтта [40], в течении Релея при $M \gg 1$ при изменении степени разреженности газа имеет место максимум напряжения трения на пластине.

2.6 ЭФФЕКТ МАКСИМУМА ЗАВИСИМОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ, ПЕРЕДАВАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ, ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ $M \gg 1$.

Пусть ε - нормированная на mc_∞^2 средняя энергия молекул, падающих на пластину, в системе координат, связанной с пластиной.

$$\varepsilon = \frac{\int_{v_y < 0} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) f(\mathbf{V})|_{y=0} d\mathbf{V}}{2c_\infty^2 \int_{v_y < 0} f(\mathbf{V})|_{y=0} d\mathbf{V}}, \quad \varepsilon(0) = 1 + \frac{U_w^2}{2}.$$

Зависимости $\varepsilon(t)$ приведены на рис. 2.7 для различных значений $U_w \leq 3$ при $T_w = 0.25$. Там же приведены зависимости потока энергии, передаваемой пластине $E(t)$, обезразмеренного на свое свободномолекулярное значение $E = 4\sqrt{\pi}E_y|\rho_\infty c_\infty^3(U_w^2 + 2(1 - T_w))|^{-1}$, $E(0) = 1$ при $U_w^2 > 2(T_w - 1)$, $E(0) = -1$, при $U_w^2 < 2(T_w - 1)$.

Как видно из графиков средняя энергия падающих молекул монотонно убывает. Это вызвано разворотом падающих молекул при столкновении с отраженными и процессом термализации. И хотя, как видно из рис. 2.3с, поток падающих молекул при этом возрастает, этот рост оказывается недостаточным для увеличения потока энергии, передаваемой пластине (см. рис. 2.7b). Ситуация меняется при $U_w = 25$ (т.е. при $M \gg 1$), см. рис. 2.7с. В этом случае первоначальный разворот падающих молекул в результате столкновений с отраженными приводит к такому большому увеличению потока падающих молекул $N(t)$ (см. рис. 2.5a), что его оказывается достаточно для компенсации уменьшения $\varepsilon(t)$ и поток энергии, передаваемой пластине $E(t)$, сначала возрастает, а затем вследствие термализации убывает, образуя максимум.

Таким образом, в течении Релея при $M \gg 1$, также как и в течении Куэтта [42] при изменении степени разреженности газа имеет место максимум потока энергии, передаваемого пластине.

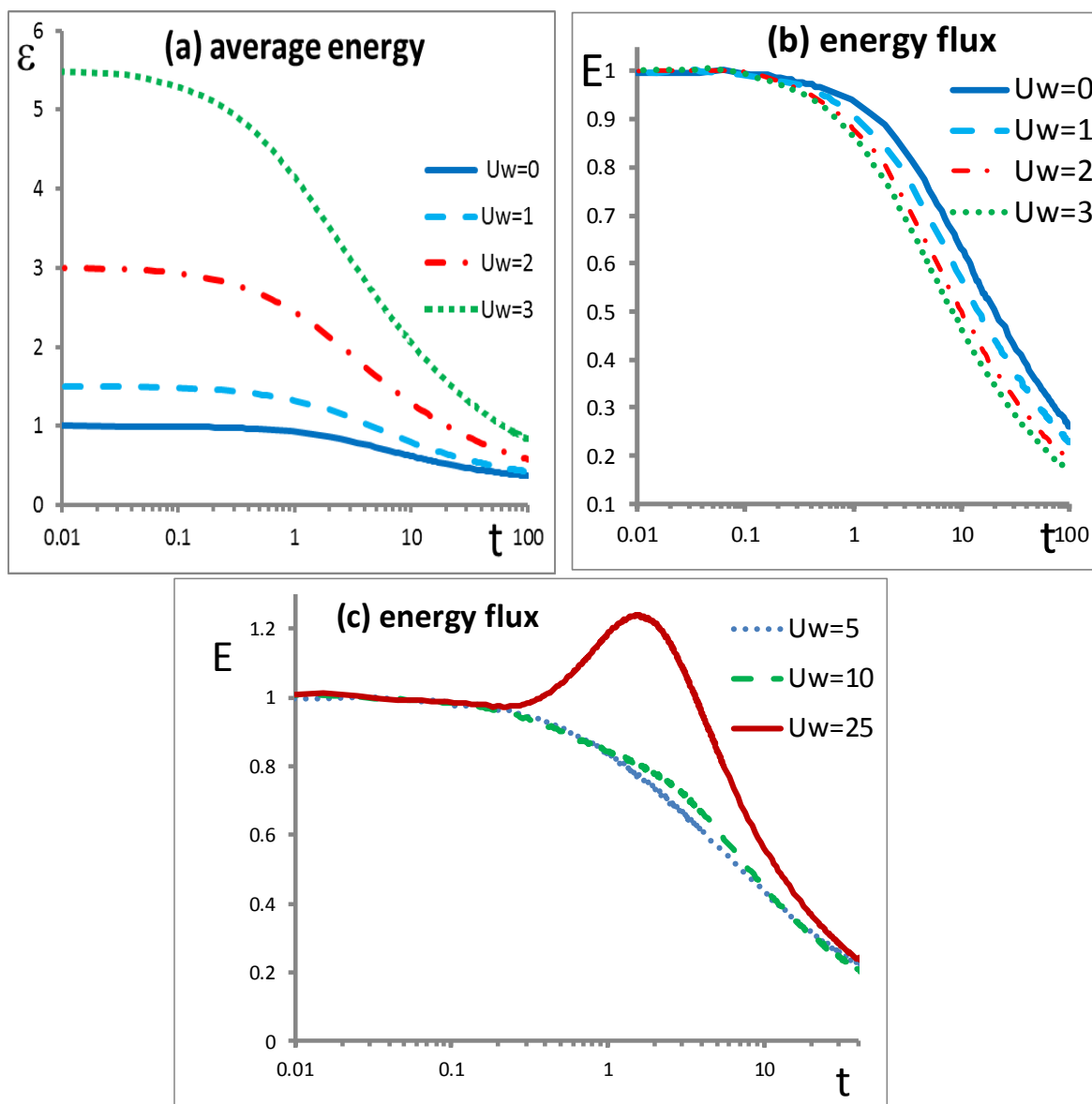


Рисунок 2.7. (a) средняя энергия падающих молекул $\varepsilon(t)$; (b,c) поток энергии, передаваемый пластине; $T_w = 0.25$, $y = 0$.

2.7 ЭФФЕКТ МАКСИМУМА ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ, ОТДАВАЕМОЙ ПЛАСТИНОЙ

Характер зависимостей от времени потоков импульса ($P_{xy}(t), P_{yy}(t)$) и энергии $E(t)$, передаваемых пластине зависит от результатов трех процессов, происходящих в движущемся газе, а именно: 1) процесса поворота совокупности падающих молекул вследствие столкновений с отраженными в сильно разреженном газе; 2) процесса торможения совокупности падающих молекул и 3) процесса термализации падающих молекул. Имеет ли место тот или иной эффект определяется тем какой из процессов является доминирующим в те или иные моменты времени. А это зависит от обезразмеренных значений скорости U_w и температуры пластины.

Рассмотрим случай «горячей пластины» ($T_w > 1$) и не слишком больших значений скоростей: таких, что $E(t) < 0$, хотя бы на заключительном этапе доминирования процесса торможения падающих молекул, над процессом термализации. Значения U_w должны быть также не слишком малы, чтобы обеспечить доминирование торможения над термализацией при $t \ll 1$.

На рис. 2.8 приведены результаты расчетов изменения во времени средней энергии падающих молекул $\varepsilon(t)$, абсолютной величины их потока $N(t)$ и потока энергии, передаваемой пластине $E(t)$ при $T_w = 4$ и различных значениях скорости пластины.

Как видно из рис. 2.8а при $U_w = 0$ (неподвижная пластина) и при $U_w = 1.5$ средняя энергия падающих молекул $\varepsilon(t)$ возрастает. Это является следствием доминирования процесса термализации совокупности падающих молекул. При этом абсолютная величина потока $N(t)$ из-за уменьшения плотности газа падает, см. рис. 2.8б. В результате, как видно из рис. 2.8с,

поток энергии, передаваемой пластине $E(t) < 0$, монотонно возрастает, уменьшаясь по модулю.

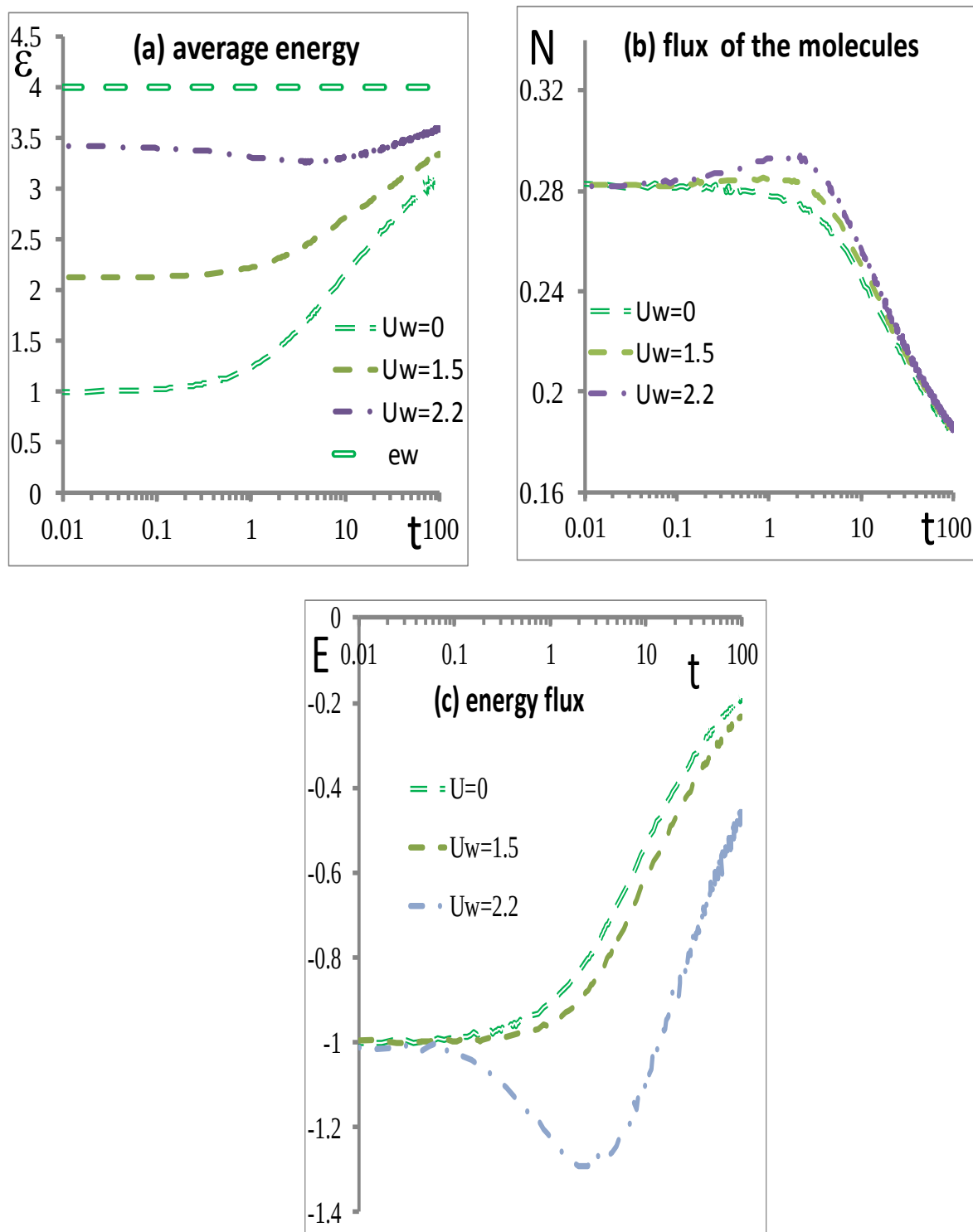


Рисунок 2.8. (а) средняя энергия падающих молекул $\mathcal{E}(t)$, e_w – средняя энергия отраженных молекул; (б) абсолютное значение потока падающих молекул $N(t)$; (с) поток энергии, передаваемый пластине $E(t)$; $T_w = 4$, $y = 0$.

Ситуация меняется при $U_w = 2.2$. Как видно из рис. 2.8 у зависимостей $\varepsilon(t)$ и $E(t)$ возникает минимум, а у зависимости $N(t)$ – максимум. Такое поведение средней энергии падающих молекул, их потока и потока энергии, передаваемой пластине имеет следующее объяснение. Первоначально падающие на платину молекулы, сталкиваясь с отраженными молекулами дополнительно разворачиваются, приобретая дополнительный нормальный импульс в сторону пластины. Если U_w заметно превышает $\sqrt{T_w - 1}$ (например, при $U_w = 2.2$), то на первом этапе происходит также торможение совокупности падающих молекул, доминирующее над их термализацией ($\varepsilon(t)$ уменьшается), см. рис. 2.8а. Кроме того, благодаря развороту вследствие столкновений с отражёнными молекулами, поток молекул, падающих на пластину $N(t)$ возрастает, см. рис. 2.8b. В результате поток энергии, передаваемой нижней пластине $E(t) = [\varepsilon(t) - e_w]N(t)$ убывает, возрастая по абсолютной величине, поскольку $E < 0$, см. рис. 2.8с. При этом газ постепенно термализуется и когда термализация становится доминирующей $\varepsilon(t)$ начинает возрастать, что приводит к уменьшению $|E(t)|$. Однако сам поток энергии, передаваемой пластине, оставаясь отрицательным, возрастает, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$, см. рис. 2.8с.

В итоге образуется отрицательный минимум потока энергии, передаваемой «горячей» пластине, т.е. максимум потока энергии, отдаваемой пластиной.

2.8 ЭФФЕКТ ИЗМЕНЕНИЯ СО ВРЕМЕНЕМ ЗНАКА ПОТОКА ЭНЕРГИИ, ПЕРЕДАВАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ

Если $\varepsilon(0) = 1 + \frac{U_w^2}{2} < T_w$, то $E(t) < 0$ при любых t . Однако, если $\varepsilon(0) > T_w$, то $E(0) > 0$. В дальнейшем при $t > 0$ происходит поворот и торможение потока падающих молекул и $E(t)$ вместе с $\varepsilon(t)$ убывают, см. рис. 2.9. Если U_w не слишком велика, то торможение совокупности падающих молекул, (преобладающее над их термализацией) приводит к тому, что средняя энергия падающих молекул $\varepsilon(t)$ становится меньше средней энергии отраженных молекул T_w . При этом поток энергии, передаваемой пластине $E(t)$ меняет знак, достигая затем из-за начавшегося преобладания эффекта термализации, отрицательного минимума. Соответствующие зависимости представлены на рис. 2.9 для $U_w = 2.6$. Там же пунктиром обозначена средняя энергия отраженной молекулы $e_w = T_w$.

Если U_w достаточно велика так, что $\varepsilon(t)$ все еще больше T_w , когда термализация уже стала доминирующим процессом, то в дальнейшем $\varepsilon(t)$ монотонно убывает, оставаясь больше T_w при $t \rightarrow \infty$. При этом $E(t)$ остается положительной, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$. Соответствующие кривые приведены на рис. 2.9 для $U_w = 3.5$.

Таким образом, существует определенный диапазон температур и скоростей пластины, при которых пластина сначала нагревается, а затем охлаждается.

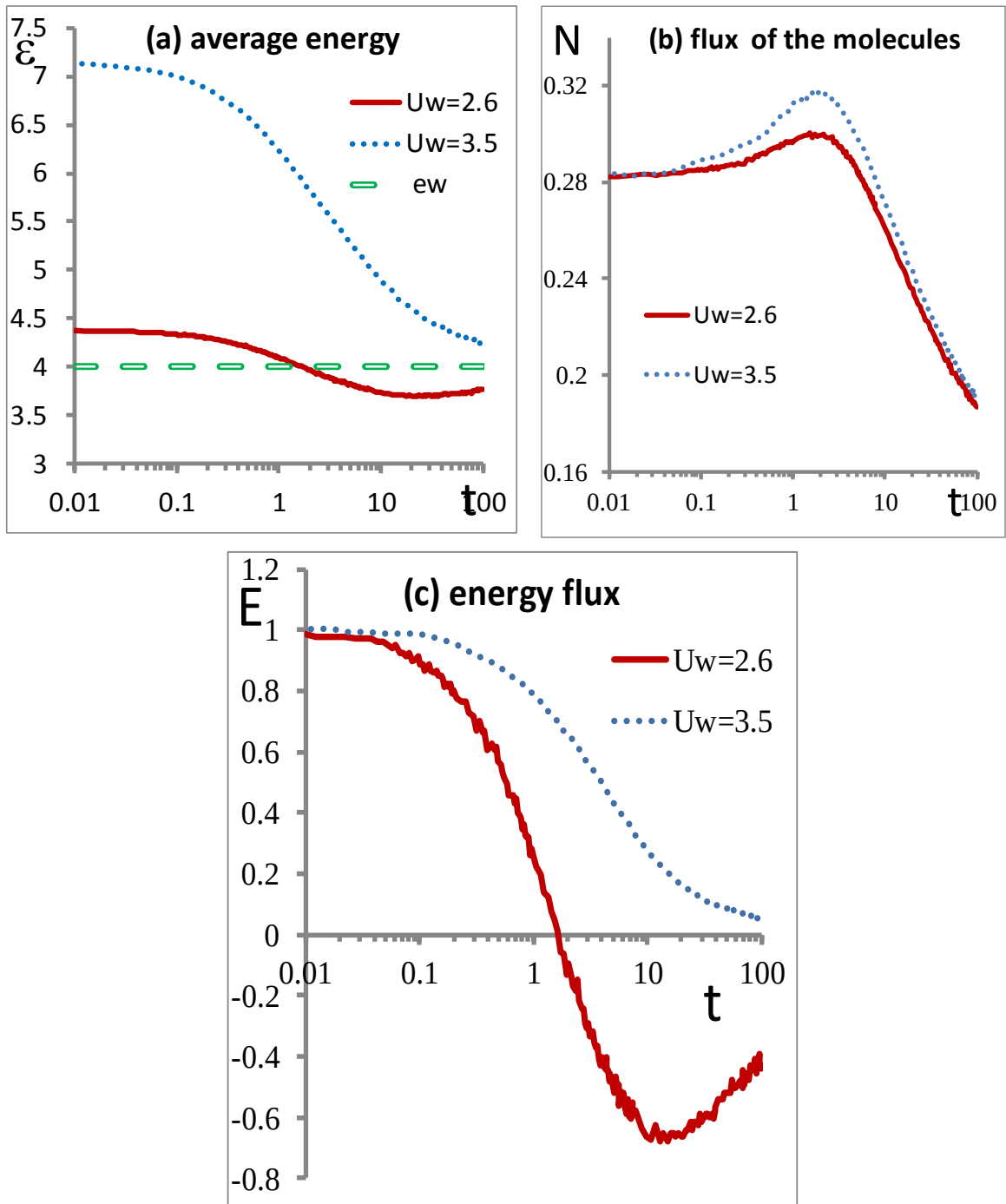


Рисунок 2.9. (a) средняя энергия падающих молекул $\mathcal{E}(t)$, e_w – средняя энергия отраженных молекул; (b) абсолютное значение потока падающих молекул $N(t)$; (c) поток энергии, передаваемый пластине $E(t)$; $T_w = 4$, $y = 0$.

Таким образом, во второй главе диссертации исследованы различные режимы задачи Рэлея для разреженного газа и обнаружены следующие эффекты:

1. Эффекты максимума по времени потоков энергии и нормального импульса, *передаваемых* пластине, а также напряжения трения на пластине.
2. Эффект максимума по времени потока энергии, *отдаваемой* пластиной.
3. Эффект перемены знака потока энергии, передаваемого пластине, через некоторое время после начала движения пластины.

Все эти эффекты имеют стационарные аналоги в задаче Куэтта. Механизм их возникновения при изменении времени, прошедшего с начала движения пластины, тот же, что и механизм эффектов, возникающих в течении Куэтта при изменении числа Кнудсена, рассмотренный в первой главе. Однако, в отличие от плоского течения Куэтта для демонстрации кинетических эффектов в течении Рэлея нет необходимости менять параметры задачи. Эффекты проявляются сами по мере увеличения времени, прошедшего от начала движения.

ГЛАВА III. ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ ПОД НУЛЕВЫМ УГЛОМ АТАКИ

3.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для того, чтобы найти решение стационарной задачи об обтекании пластины потоком разреженного газа под нулевым углом атаки будем искать предел решения соответствующей нестационарной задачи.

Рассмотрим полупространство $y > 0$, заполненное невозмущенным газом с плотностью ρ_∞ и температурой T_∞ . Пусть в момент времени $\tau = 0$ газ начинает двигаться справа налево со скоростью U_∞ , а пластина, расположенная на отрезке $0 < x < L, y = 0$ приобретает температуру T_s . Скорость U_∞ направлена вдоль оси x . Оси x и y образуют декартову систему координат.

Для исследования возникающего нестационарного течения разреженного газа необходимо решить уравнение Больцмана для функции распределения молекул по скоростям f

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = J(f, f) \quad (3.1)$$

С начальным условием

$$f = n_\infty (2\pi R_{gas} T_\infty)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(U_\infty - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_\infty} \right], \quad y > 0, \quad \tau = 0 \quad (3.2)$$

и граничными условиями

$$f = n_r (2\pi R_{gas} T_s)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_s} \right], \quad v_y > 0, \quad 0 < x < L, \quad y = 0, \quad (3.3)$$

$$f(\tau, x, y, v_x, v_y, v_z) = f(\tau, x, y, v_x, -v_y, v_z) \text{ at } x < 0, y = 0; \text{ and at } x > L, y = 0, \quad (3.4)$$

$$f = n_{\infty} (2\pi R_{gas} T_{\infty})^{-3/2} \exp \left[-\frac{(U_{\infty} - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2R_{gas} T_{\infty}} \right] \quad (3.5)$$

$$x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

Отражение молекул от пластины предполагается диффузным с температурой равной температуре поверхности T_s .

Здесь $J(f, f)$ – интеграл столкновений молекул [38]; v_x, v_y, v_z – декартовы компоненты скорости молекул, n_{∞} – числовая плотность невозмущенного газа: $n_{\infty} = \rho_{\infty} / m$, где m – масса молекулы. Параметр функции распределения отраженных молекул n_r находится из условия баланса падающих и отраженных молекул.

Решение задачи нахождения потоков импульса и энергии, передаваемых пластине, зависит от безразмерных переменных $X = x/L; Y = y/L; T_w = T_s/T_{\infty}; t = \tau \cdot c_{\infty}/L; M = U_{\infty}/\sqrt{\kappa R_{gas} T_{\infty}}; Kn = \lambda_{\infty}/L$, где $c_{\infty} = \sqrt{2R_{gas} T_{\infty}}$, R_{gas} – газовая постоянная, λ_{∞} – средняя длина свободного пробега молекул в невозмущенном газе. Для модели молекул «твердые сферы», используемой в данной главе, $\lambda_{\infty} = (\sqrt{2}\sigma_T n_{\infty})^{-1}$, где σ_T – сечение столкновения молекул. Безразмерное время t играет роль обратного числа Кнудсена.

3.2 МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Прямоугольная расчетная область ABCDEF приведена на рис.3.1; Отрезок BC соответствует пластине; $AB=CD$. Длины отрезков AB и AF сильно зависят от числа Маха и определяются временем необходимым для установления уже почти стационарного, но еще нечувствительного к размерам расчетной области течения вблизи пластины. Таким образом, размер расчетной области максимален при малых дозвуковых числах Маха. Мы рассматриваем установление стационарного течения газа только вблизи пластины. Это позволяет значительно уменьшить размер расчетной области и, следовательно, необходимый объем памяти, и время расчета.

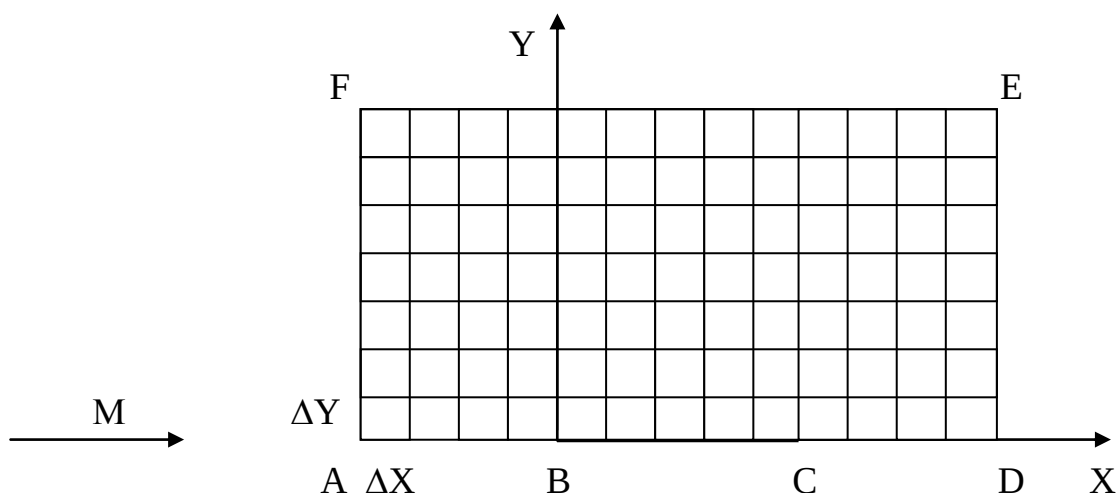


Рисунок 3.1. Схема расчетной области:
 $AB = CD = S(t_m)$; $AF = DE = H(t_m)$; $BC = 1$; $\Delta X = \Delta Y$.

Размеры расчетной области выбираются таким образом, чтобы возмущения от ее границ не доходили до пластины к моменту времени $t = t_m$, когда параметры потока вблизи пластины становятся почти постоянными и расчеты завершаются. В наших расчетах значение t_m обычно составляет от 7 до 50.

Для дозвуковых и трансзвуковых течений первое приближение для расстояния от верхней границы $H = \max(t_m T_w^{1/2}/2, t_m/2)$. Для сверхзвуковых течений устанавливаем $H < \max(t_m T_w^{1/2}/2, t_m/2)$. Для дозвукового режима первое приближение для расстояния от боковой границы $S = (1 - M^2)H$. Это значение получается путем оценки времени, необходимого чтобы слабое возмущение от боковой границы вычислительной области достигло пластины. Затем мы увеличиваем размер расчетной области и проверяем, влияет ли увеличение на импульс и потоки энергии, передаваемые на пластину. Если эти потоки остаются прежними, то больше не увеличиваем размер расчетной области; в противном случае снова увеличиваем размер домена и повторяем эту процедуру. При этом значение S изменяется в расчетах от 1.5 для $Kn=0.05$ и $T_w = 0.25$ до 50 для $Kn=10$ и $T_w = 4$.

Расчетная область делится на квадратные ячейки. Размер $\Delta X = \Delta Y$ выбран достаточно маленьким, чтобы гарантировать, что отношение длины свободного пробега молекул к размеру ячейки составляет около 3 или более во всем потоке. Мы проверяем, что дальнейшее уменьшение размера ячейки не влияет на значения импульсов и потоков энергии, передаваемых на пластину. Размер ячейки обычно варьируется в диапазоне от приблизительно $Kn T_w / (3M)$ при $M > 1, T_w < 1$ до приблизительно $Kn/3$ при $M \leq 1, T_w > 1$.

Как видно из приведенного выше, размеры расчетной области существенно зависят от параметров потока. Например, при $Kn=0.1, M=0.5, T_w=4$ размеры области равны 630×330 , а при $Kn=5, M=1, T_w=0.25$ ее размеры равны 42×20 .

Параметры потока в ячейке предполагаются постоянными. В начальный момент времени в ячейки помещены моделирующие течение молекулы, распределенные по расчетной области равномерно, а по скоростям согласно (3.2). Число молекул в ячейке обычно равнялось 100.

Процесс моделирования системы сталкивающихся молекул на временном интервале Δt , состоит из двух этапов:

- 1) Перемещение молекул в пространстве с заданными скоростями в течение временного интервала Δt и взаимодействие с границами, если оно имеет место. Скорости молекул, достигающих границ области, меняются в соответствии с (3.3-3.5).
- 2) Моделирование столкновений молекул в ячейке. На данном этапе используется алгоритм, предложенный G.A. Bird (подробное описание можно найти в [71]). Величина Δt изменялась в различных вариантах от примерно $KnT_w/(3M)$ (в случае $M > 1, T_w < 1$) до примерно $Kn/3$ (в случае $M \leq 1, T_w \geq 1$).

Макропараметры газа в ячейках вычисляются по значениям скоростей молекул. Импульс и энергия, передаваемые пластине за время Δt , также вычисляются с помощью известных значений скоростей падающих и отраженных молекул. Увеличивая время, мы моделируем эволюцию нашей динамической системы. Количество временных шагов при разных Kn, M, T_w , как правило, находится в диапазоне от 100 до 4000.

Повторяя эту процедуру, удастся уменьшить статистическую неопределенность полученных результатов. Число повторений обычно составляло от 500 до 16000. Точность результатов определялась величиной статистических флуктуаций и обычно составляла от 0.5% до 2%. Эволюция рассматриваемой динамической системы прослеживалась до момента выхода макровеличин на значения близкие к стационарным. Расчеты проводились на персональном компьютере Intel Core i7, 3.5 GHz. Характерное время счета одного варианта зависело от числа Кнудсена и варьировалось от 1 часа до 2 недель.

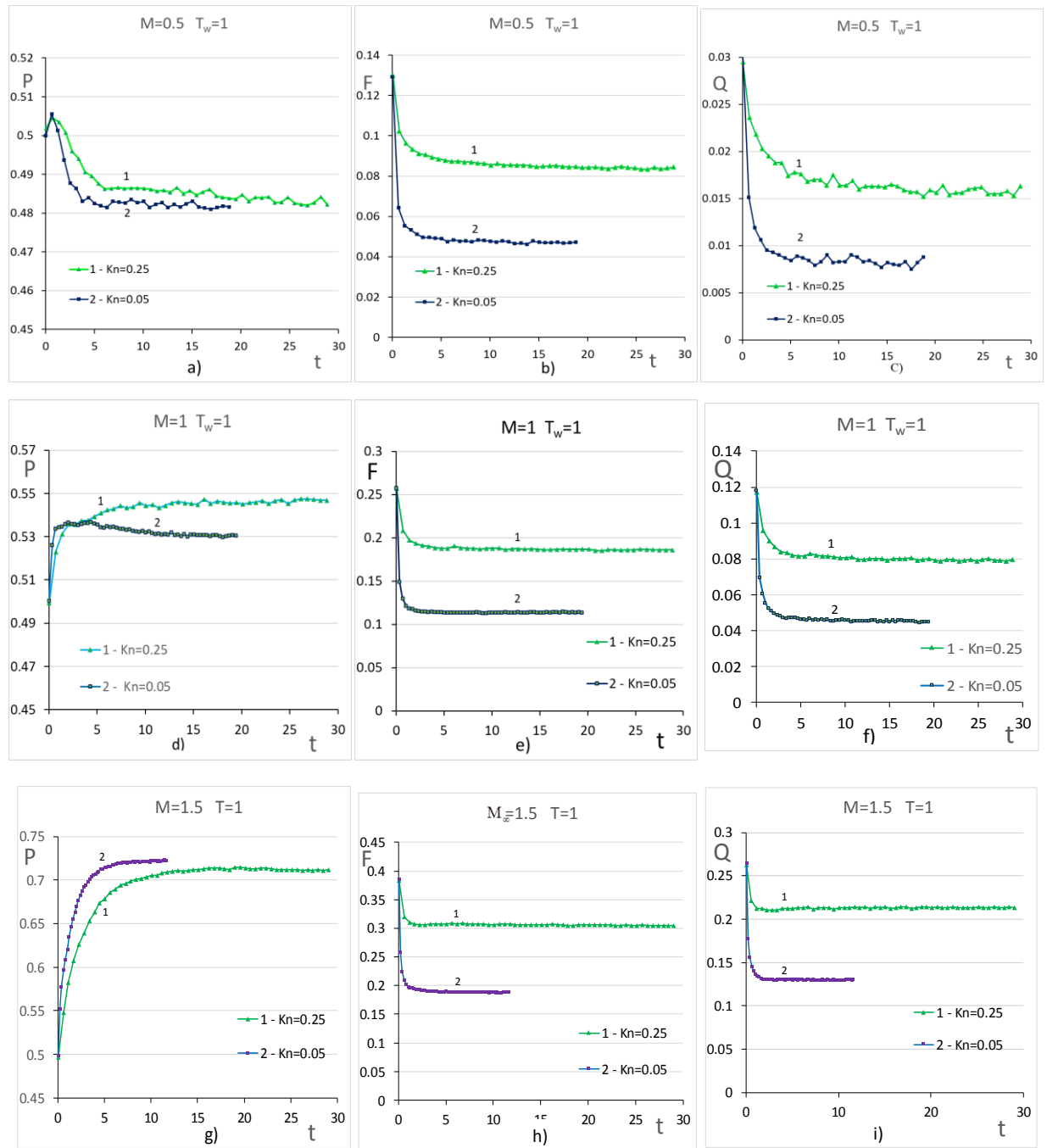


Рисунок 3.2. Временные зависимости интегральных потоков нормального и горизонтального импульсов, а также энергии, передаваемых пластине, при различных числах Маха и Кнудсена.

На рис. 3.2 приведены зависимости от времени средних по длине пластины передаваемых ей потоков нормального P , горизонтального F импульсов и энергии Q при $T_w=1$ и различных M и Kn . Используются следующие обозначения

$$P_{yy} = -\frac{P_{yy}}{\rho_{\infty} c_{\infty}^2}, P_{xy} = \frac{P_{xy}}{\rho_{\infty} c_{\infty}^2}, E = \frac{E_y}{\rho_{\infty} c_{\infty}^3},$$

$$P = \int_0^L P_{yy} dx / L, \quad F = \int_0^L P_{xy} dx / L, \quad Q = \int_0^L E dx / L.$$

Кривые на рис. 3.2 иллюстрируют установление стационарного обтекания пластины. Чтобы оценить правильность выбора t , при котором нестационарное течение можно считать достаточно близким к стационарному, мы сравнили потоки импульса и энергии, полученные при решении нестационарных и стационарных задач об обтекании пластины сверхзвуковым потоком. Как видно из таблицы 3.1 отличие соответствующих значений не превышает 3%.

Kn	Unsteady-state flow				Steady flow			Unsteady/Steady		
	t	P	F	Q	P	F	Q	P	F	Q
0.05	7.62	0.895	0.194	-0.398	0.900	0.188	-0.393	0.994	1.032	1.013
0.1	14.6	0.949	0.240	-0.499	0.944	0.233	-0.492	1.005	1.030	1.014
0.25	19.5	0.982	0.303	-0.615	0.985	0.297	-0.615	0.997	1.020	1.00
1	39.4	0.887	0.365	-0.648	0.896	0.364	-0.653	0.996	1.001	0.998
5	48.4	0.782	0.383	-0.600	0.790	0.383	-0.606	0.990	1.000	0.990

Таблица 3.1. Сравнение потоков импульсов и энергии, передаваемых пластине, полученных при решении нестационарных и стационарных задач при $M=1.5$, $T_w=4$ и различных Kn.

3.3 ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Для проверки правильности расчетов задачи обтекания пластины потоком разреженного газа сравним полученные результаты: а) с результатами работы [79], в которой на основе модельного уравнения исследовалось сверхзвуковое обтекание пластины; б) с решениями задачи обтекания для уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения на пластине [38] при малых числах Кнудсена; с) с расчетами обтекания пластины, также выполненными DSMC методом, но другими авторами [87]; d) с экспериментальными данными о дозвуковом обтекании пластины [126].

а) В таблице 3.2 силы трения, действующие на пластину, и потоки энергии, передаваемые пластине, найденные в настоящей работе методом DSMC, сравниваются с результатами соответствующих расчетов, проведенных на основе модельного уравнения [79]. Результаты, полученные путем решения модельного уравнения и прямого статистического моделирования при $M = 1,5$, как видно из таблицы 3.2, близки. Разница в F составляет от 1% при $Kn = 3.94$ до 2,4% при $Kn = 0.0394$. Разница в Q меняется от 3,1% при $Kn = 2.6$ до 19,8% при $Kn = 0.026$.

Kn	F		Kn	Q	
	DSMC	Model eq. [79]		DSMC	Model eq. [79]
0.0394	0.169	0.173	0.0260	0.0977	0.117
0.0787	0.219	0.224	0.0520	0.131	0.156
0.157	0.273	0.277	0.104	0.169	0.195
0.394	0.333	0.335	0.260	0.213	0.236
0.787	0.361	0.363	0.520	0.238	0.253
3.94	0.382	0.386	2.60	0.257	0.265

Таблица 3.2. Сравнение результатов расчетов напряжения трения F и потока энергии Q , передаваемой пластине, полученных методом DSMC и путем решения модельного уравнения при $M=1.5$, $T_w = 1$

б) На рис. 3.3 приведены распределения $P_{yy}(X)$, $P_{xy}(X)$ и $E(X)$ при $T_w = 1$ и различных числах Маха и Кнудсена. Там же при $Kn = 0.05$ показаны зависимости этих величин, полученные путем решения краевой задачи для уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения [38]

$$u(x, y) = 1.012 \frac{\mu(x, y)}{\rho(x, y)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \sqrt{\frac{2}{RT_s}} \quad \text{при } y = 0 \quad (3.6)$$

$$T(x, y) = T_s(x) + \frac{1.173\sqrt{\pi}}{2R\rho(x, y) \cdot \sqrt{2RT_s}} k(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \quad \text{при } y = 0, \quad (3.7)$$

где $u(x, y)$, $\rho(x, y)$, $T(x, y)$ - скорость, плотность, температура газа; $\mu(x, y)$ и $k(x, y)$ - коэффициенты вязкости и теплопроводности газа.. Динамическая вязкость и теплопроводность зависят от температуры газа. В случае молекул – «твердых сфер» [127]

$$\mu = 1.016 \frac{5\sqrt{\pi}}{16} \frac{m}{\sigma_T} \sqrt{RT}, \quad k = \frac{5}{2} \frac{R\mu}{Pr}.$$

Число Прандтля $Pr = 0.661$.

Как видно из графиков при малых числах Кнудсена решения, полученные методом прямого статистического моделирования и путем решения уравнений Навье-Стокса близки друг к другу за исключением областей вблизи передней и задней кромок. Различия решений в этих областях объясняется тем, что уравнения Навье - Стокса несправедливы на расстояниях меньших нескольких длин свободного пробега от передней и задней границ пластины [38]. Свободномолекулярные значения на рис. 3.3 и ниже на рис. 3.5 и рис. 3.6 получены с помощью [71]. Уравнения Навье - Стокса решаются численно с использованием одной и той же неоднородной нерегулярной сетки для всех представленных случаев. Размер прямоугольной сетки составляет 50 ячеек вдоль пластины и 25 ячеек перпендикулярно к ней. Почти квадратные контрольные объемы имеют размеры, варьирующиеся от $5 \cdot 10^{-6}$ на передней и задней кромках до 0,25 вблизи внешних границ. Число

узлов сетки у стены равно 2290, общее количество узлов составляет примерно 400 000. Граничные условия скольжения моделируются с использованием граничных потоков импульса и энтальпии, которые, зависят от скорости и температуры газа. Согласованность граничных значений и их нормальных производных достигается итеративно.

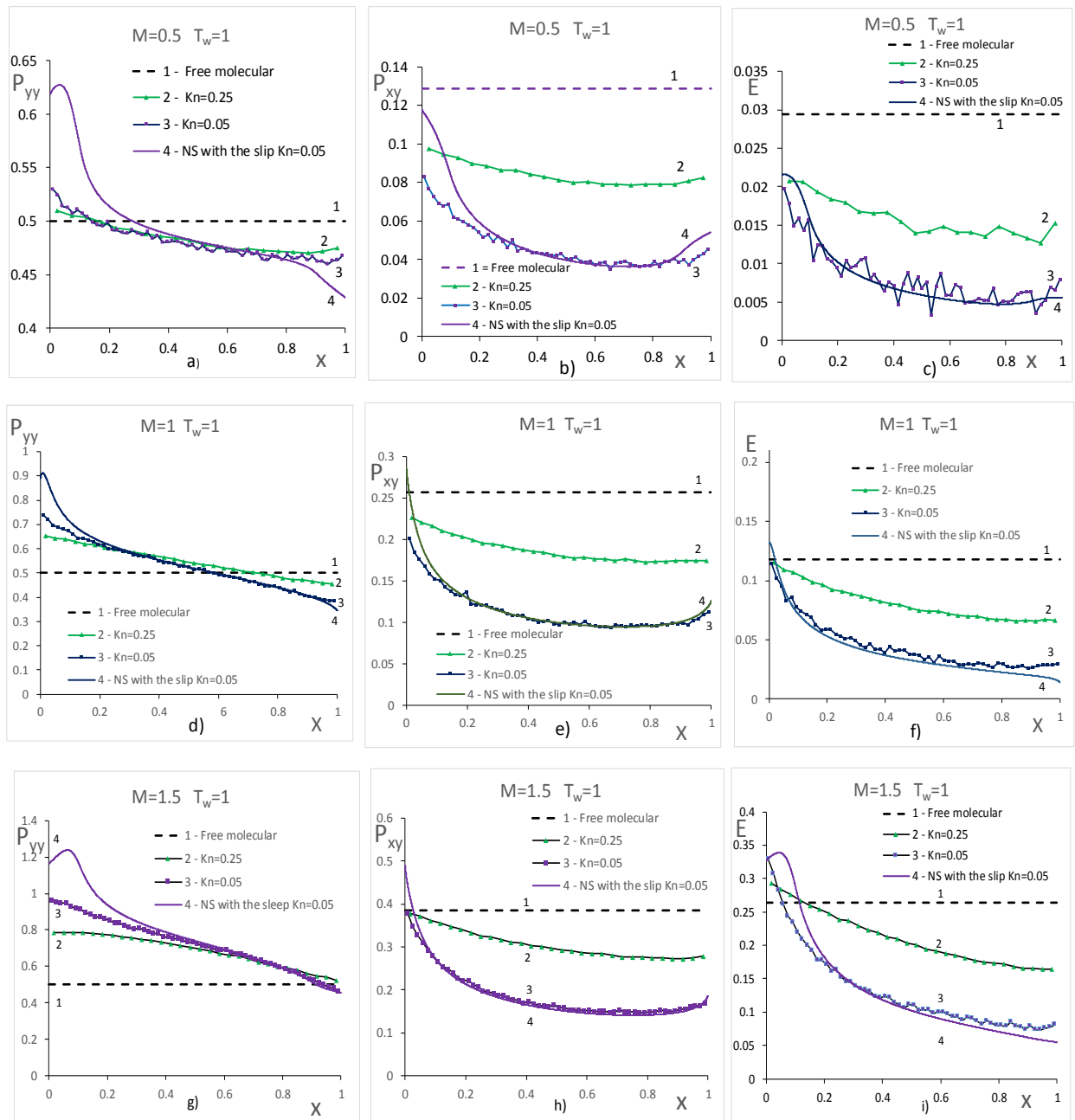


Рисунок 3.3. Распределения вдоль пластины потоков импульса и энергии, передаваемых пластине, полученные прямым статистическим моделированием и путем решения уравнений Навье-Стокса.

с) На рис 3.4 приведено сравнение результатов расчетов коэффициентов давления (нормального импульса) и коэффициентов поверхностного трения,

полученных методом DSMC в данной работе с результатами аналогичных расчетов [87]. Как видно из рис. 3.4 соответствующие кривые очень близки.

Здесь

$$C_p = \frac{2p_{yy}}{\rho_\infty U_\infty^2}, \quad C_f = \frac{2p_{xy}}{\rho_\infty U_\infty^2}$$

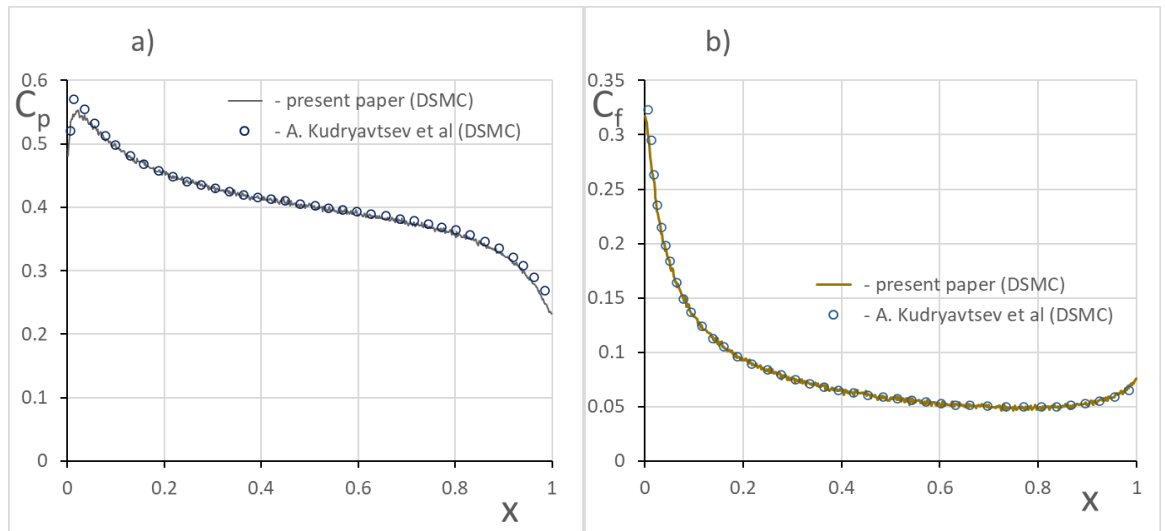


Рисунок 3.4. Сравнение результатов методом DSMC с расчетами тем же методом, проведенными в [87]: (а) коэффициент давления и (б) коэффициент поверхностного трения в зависимости от расстояния от передней кромки при $Kn=0.01$, $T_w=1$ и $M=2$.

д) Результаты экспериментальных исследований силы, действующей на пластину, расположенную под нулевым углом атаки в дозвуковом потоке разреженного газа, приведены в [126]. Эксперименты проводились в широком диапазоне чисел Маха и Кнудсена набегающего потока. В Таблице 3.3 сравниваются значения напряжения трения, полученные методом DSMC, с результатами экспериментальных исследований [126] для пластины с удлинением $AR = 5$. Авторы [126] не приводят значений соотношений температуры газа и пластины. Однако, как будет показано ниже, при дозвуковых и умеренных сверхзвуковых числах Маха сила трения слабо зависит от T_w . В Таблице 3.3 также приведены значения отношения напряжения трения, полученные методом DSMC, к экспериментальным

значениям F_{rel} , а также соответствующие средние значения $\bar{F}_{rel}$ и стандартное отклонение σ .

M	Kn	F				F_{rel}	$\bar{F}_{rel}$	σ
		Exp. [126] $\kappa=7/5$	DSMC hard sph.	NS $\kappa=5/3$	NS $\kappa=7/5$			
0.71	0.0409	0.0656	0.0675	0.0751	0.0671	1.03	1.01	0.079
0.188	0.0412	0.0109	0.0126	0.0127	0.0113	1.14		
0.167	0.0788	0.0158	0.0157	0.0151	0.0135	0.991		
0.622	0.139	0.0936	0.0916			0.978		
0.521	0.244	0.0978	0.0881			0.900		

Таблица 3.3. Сравнение результатов расчетов напряжения трения, полученных методом прямого статистического моделирования с экспериментальными данными [126].

Отметим, что в [126] эксперименты проводились для воздуха с показателем адиабаты $\kappa=1.4$, а не с $\kappa=5/3$, как в газе из твердых сфер. Чтобы убедиться, что разница в показателях адиабаты при $M<1$ существенно не влияет на среднее напряжение трения, мы дополнительно рассчитали поток двухатомного газа через пластину, используя уравнения Навье - Стокса с $Pr = 0.71$ и соответствующими условиями скольжения на пластине [128].

Различия в значениях F для двухатомного и одноатомного газа составляют 11%. Таким образом, как видно из Таблицы 3.3, предложенный выше метод расчета дозвукового обтекания разреженного газа вокруг пластины позволяет получить хорошее согласие между расчетными и экспериментальными данными в переходном режиме.

Отметим, что вскоре после публикации данных результатов [104] этот же подход к расчету дозвуковых течений разреженного газа независимо от [104] был предложен и использован при расчетах обтекания пластины в [129]/

3.4 ЭКСТРЕМУМЫ ЗАВИСИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОТОКА НОРМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ОТ ЧИСЛА КНУДСЕНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛАХ МАХА

В [38] было показано, что при гиперзвуковых скоростях интегральная зависимость потока нормального импульса, передаваемого пластине, P от числа Кнудсена имеет максимум. Покажем, что при любых числах Маха эта зависимость имеет, по крайней мере, один экстремум при условии, что $T_w = 1$.

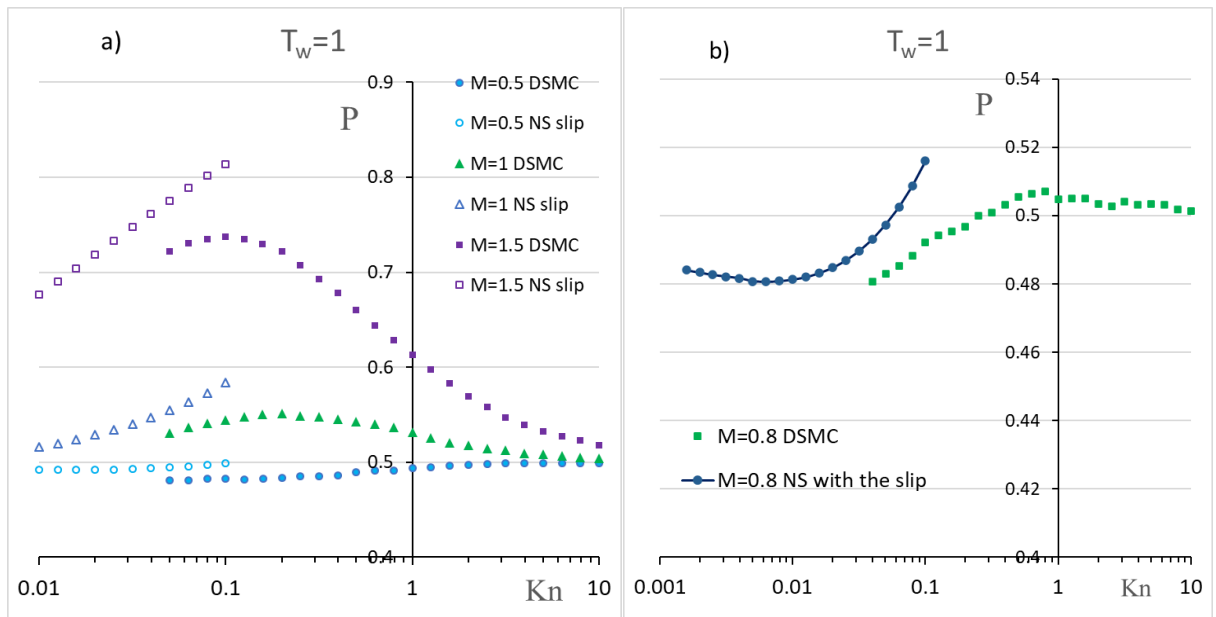


Рисунок 3.5. Зависимости среднего потока нормального импульса, передаваемого пластине от числа Кнудсена при различных числах Маха: а) $P(Kn)$ имеет один экстремум ($M=0.5, 1, 1.5$); б) $P(Kn)$ имеет два экстремума ($M=0.8$).

Действительно, при любом числе Маха и достаточно малых числах Кнудсена течение близко к навье-стоксовому с числом Рейнольдса

$$Re = 1.257 \frac{M\sqrt{\kappa}}{Kn} \quad (3.7)$$

много больше единицы и значит описывается теорией пограничного слоя [130]. Следовательно,

$$P(Kn, M, T_w) \rightarrow P_{NS} = 0.5 \text{ при } Kn \rightarrow 0.$$

С другой стороны, [71]

$$P(Kn, M, T_w) \rightarrow P_{FM} = 0.25(1 + \sqrt{T_w}) \text{ при } Kn \rightarrow \infty.$$

При $T_w = 1$ оба предела совпадают. Следовательно, зависимость $P(Kn)$ в этом случае имеет, по крайней мере, один экстремум при любом числе Маха.

Зависимости $P(Kn)$, полученные методом прямого статистического моделирования при $T_w = 1$ и $0.05 \leq Kn \leq 10$, а также путем решения краевой задачи для уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения (3.5), (3.6) при $0.0016 \leq Kn \leq 0.1$ приведены на рис. 3.5 для различных чисел Маха. Отметим, что, сравнивая DSM-расчеты с результатами решения уравнений Навье-Стокса при одном и том же числе Кнудсена, следует иметь в виду, что Kn характеризует степень разреженности газа вблизи пластины, если значение Kn больше или порядка единицы. Если $Kn \ll 1$, $M > Kn$, то степень разреженности газа лучше характеризует Kn_δ , вычисленный с использованием толщины пограничного слоя вблизи задней кромки в качестве характерной длины.

$$Kn_\delta = \sqrt{Kn M}, \quad M > Kn.$$

Таким образом, с уменьшением числа Маха при фиксированном Kn , значение Kn_δ и вместе с ним степень разреженности уменьшаются. Этот вывод подтверждается результатами, представленными на рис. 3.5а. Как видно из графиков и как показывают расчеты, чем меньше число Маха, тем ближе прямое статистическое моделирование к результатам, полученным с помощью уравнений Навье-Стокса.

Например,

$$\left(\frac{P(Kn = 0.1, M = 1.5, T_w = 1)}{P_{NS}(0.1, 1.5, 1)} \right) \left(\frac{P(0.1, 0.5, 1)}{P_{NS}(0.1, 0.5, 1)} \right)^{-1} = 0.937.$$

При $M = 1.5$, как видно из рис. 3.5а, зависимость $P(Kn)$ имеет максимум. Существование максимума этой зависимости для сверхзвукового

обтекания пластины имеет следующее физическое объяснение. При $Kn \ll 1$ течение газа можно рассматривать как сплошное. В этом случае в результате взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком перед пластиной возникает ударная волна. По мере увеличения разрежения (числа Кнудсена) число Рейнольдса уменьшается, а толщина пограничного слоя увеличивается. Увеличение толщины вытеснения пограничного слоя приводит, в свою очередь, к увеличению давления за ударной волной. С другой стороны, при $Kn \gg 1$, когда набегающий поток близок к свободномолекулярному, поток нормального импульса, передаваемый пластине, увеличивается с уменьшением разрежения (числа Кнудсена). Это обусловлено увеличением числа столкновений набегающего сверхзвукового потока с молекулами газа, отраженными от поверхности, аналогично тому, что происходит в задачах Куэтта и Рэлея (Гл. I, Раздел 1.3 и Гл. II, Раздел 2.4). В результате полный нормальный поток импульса достигает максимума в переходной области.

С уменьшением числа Маха величина максимума $P(Kn)$ уменьшается. Однако зависимость сохраняет максимум и при $M=1$, см. рис. 3.5a. При дальнейшем уменьшении числа Маха максимум продолжает уменьшаться, и в дополнение к этому у зависимости появляется слабый минимум, см. рис. 3.5b. Дальнейшее уменьшение числа Маха до 0,5 приводит к тому, что в рассматриваемой области значений числа Кнудсена эта зависимость имеет лишь слабый (около 4%) минимум, см. рис. 3.5a. Существование минимума $P(Kn)$ при дозвуковых числах Маха имеет следующее физическое объяснение.

При $M=0.5$ изменение плотности потока газа мало, и при $Re \gg 1$ (то есть согласно (3.7) при $Kn \ll 1$) течение может быть приближенно описано теорией пограничного слоя для несжимаемой жидкости вокруг пластины [130]. В этом случае давление газа в области внешнего потока и в пограничном слое несколько меньше, чем p_∞ [131]. Уменьшение Kn

приводит к увеличению Re и, следовательно, к уменьшению толщины вытеснения пограничного слоя и, следовательно, к увеличению $P(Kn)$. Кроме того, по мере увеличения Re влияние кромок на течение газа уменьшается, и $P(Kn)$ увеличивается, приближаясь к 0.5.

С другой стороны, при увеличении Kn до значений порядка 1 поток перестает описываться теорией пограничного слоя, и при $Kn \gg 1$ становится близким к свободномолекулярному вдоль всей пластины. В этом случае $P(Kn)$ возрастает и приближается к свободномолекулярному значению $P_{FM} = 0.5$. При этом у зависимости $P(Kn)$ возникает минимум. Вернемся к зависимости $P(Kn)$ при $M=0.8$. В этом случае можно выделить интересную черту течения. С одной стороны, обтекание пластины при $Kn \ll 1$ сохраняет существенные свойства обтекания вязкой несжимаемой жидкостью, следствием которых является существование минимума у $P(Kn)$. С другой стороны при $Kn \gg 1$ усиление разворота совокупности молекул, падающих на пластину, из-за столкновений с отраженными при уменьшении Kn при $M=0.8$ еще заметно и приводит к образованию у $P(Kn)$ также и максимума.

3.5 РЕЗКОЕ УМЕНЬШЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЛАСТИНЫ НА НАПРЯЖЕНИЕ ТРЕНИЯ НА ПЛАСТИНЕ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ И УМЕРЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЧИСЛАХ МАХА.

Вязкость газа сильно зависит от его температуры и от закона взаимодействия молекул при соударениях [38]. В сплошносредном режиме температура газа вблизи пластины очень близка к температуре пластины. Следовательно, в этом режиме сила трения, действующая на пластину, существенно зависит от температуры пластины. С увеличением числа Кнудсена температурный скачок вблизи пластины возрастает и при $Kn_\delta \cong 1$ он становится сравним с температурой пластины. Это должно привести к значительному уменьшению влияния температуры пластины на силу трения в переходном режиме независимо от модели взаимодействия молекул.

Зависимости $F(Kn)$, полученные при различных числах Маха и различных значениях отношения температуры пластины к температуре потока, приведены на рис. 3.6.

Эти зависимости, как и зависимости $Q(Kn)$ имеют предельные значения. Действительно, согласно кинетической теории [38], $F(Kn)$ и $Q(Kn)$ пропорциональны Kn_δ при $Kn_\delta \ll 1$. Следовательно,

$$F(Kn, M, T_w) \rightarrow 0 \text{ при } Kn \rightarrow 0; \quad Q(Kn, M, T_w) \rightarrow 0 \text{ при } Kn \rightarrow 0$$

С другой стороны, согласно [71]

$$F(Kn, M, T_w) \rightarrow F_{FM} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} M \text{ при } Kn \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

$$Q(Kn, M, T_w) \rightarrow Q_{FM} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{\kappa M^2}{2} + 2(1 - T_w) \right) \text{ при } Kn \rightarrow \infty$$

Как видно из рис. 3.6a,b,c при дозвуковых, трансзвуковых и умеренных сверхзвуковых числах Маха в широком диапазоне T_w ($0.25 < T_w < 4$) температура пластины слабо влияет на силу трения, действующую на

пластину, (при неизменных P_∞ и M) не только при $Kn \gg 1$, как следует из (3.8), но и во всей переходной области.

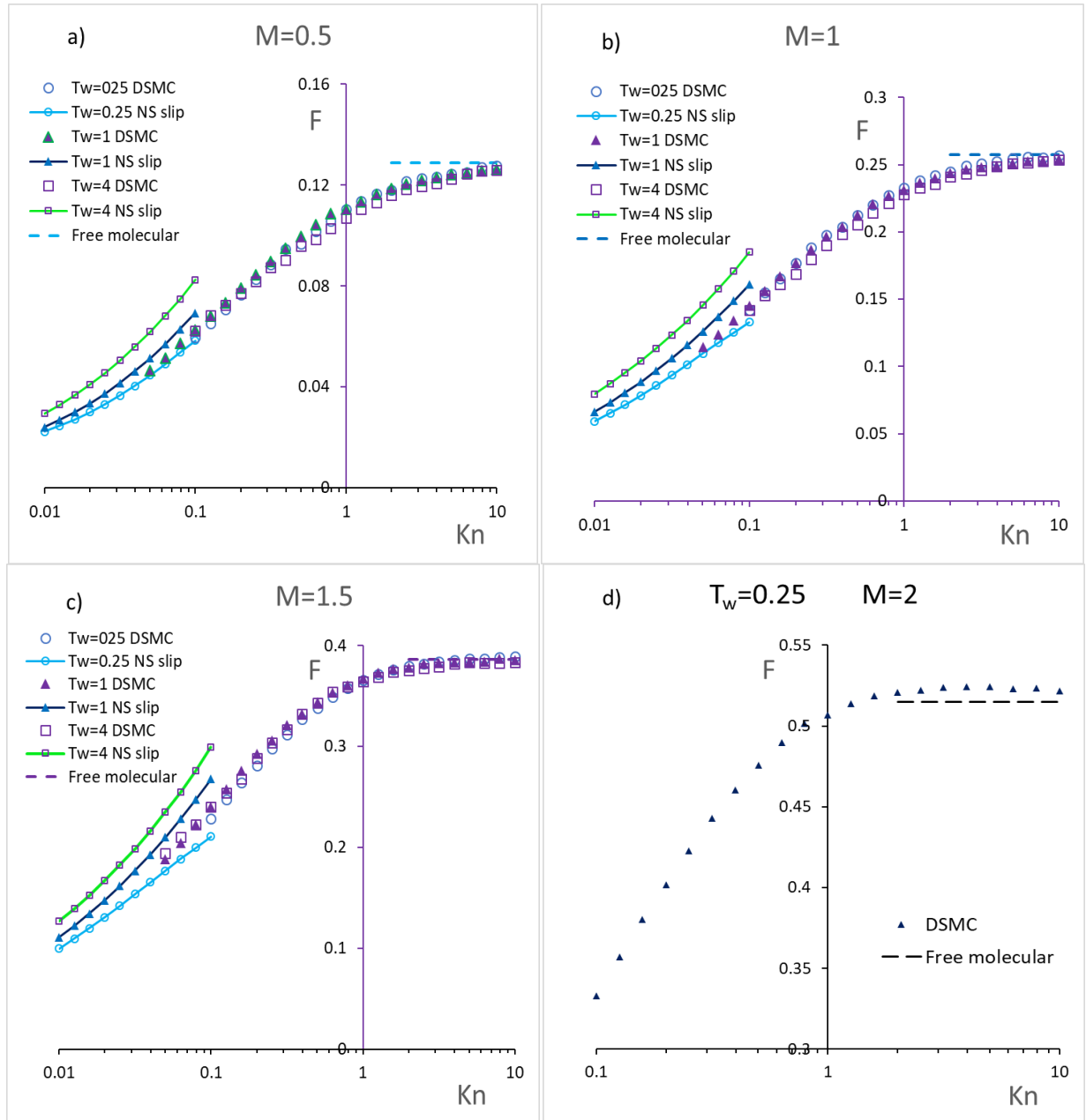


Рисунок 3.6. Зависимость среднего напряжения трения F от числа Кнудсена при различных значениях температурного отношения T_w . а) - с) Отношение температур слабо влияет на среднее напряжение трения при дозвуковых (а), транзвуковых (b) и умеренных сверхзвуковых (с) потоках. d) Гиперзвуковой эффект немонотонности при умеренном сверхзвуковом числе Маха $M = 2$ и $T_w = 0.25$.

С дальнейшим ростом числа Маха ситуация меняется. При гиперзвуковых числах Маха $F(Kn)$ немонотонна в области $Kn \gg 1$, а

значение и положение максимума зависят от T_w [38, 82]. Кроме того, в [38] показано, что гиперзвуковые эффекты также могут возникать при умеренных сверхзвуковых числах Маха, если $T_w \ll 1$. Этот вывод для умеренных сверхзвуковых чисел Маха подтверждается результатами, представленными на рис. 3.6d при $T_w = 0.25$. Зависимость $F(Kn)$ имеет слабый максимум при $M = 2$.

3.6 МАКСИМУМ СРЕДНЕГО ПОТОКА ЭНЕРГИИ, ОТДАВАЕМОЙ ПЛАСТИНОЙ

Характер зависимостей среднего потока энергии, передаваемого пластине от числа Кнудсена также, как и в задачах Куэтта и Рэлея определяется следующими процессами, протекающими при изменении числа Кнудсена: 1) поворотом совокупности падающих молекул из-за столкновении с отраженными, 2) ее торможением, 3) ее термализацией. В зависимости от того какой из этих процессов при изменении числа Кнудсена является доминирующим кривые $Q(Kn)$ имеют совершенно различный вид.

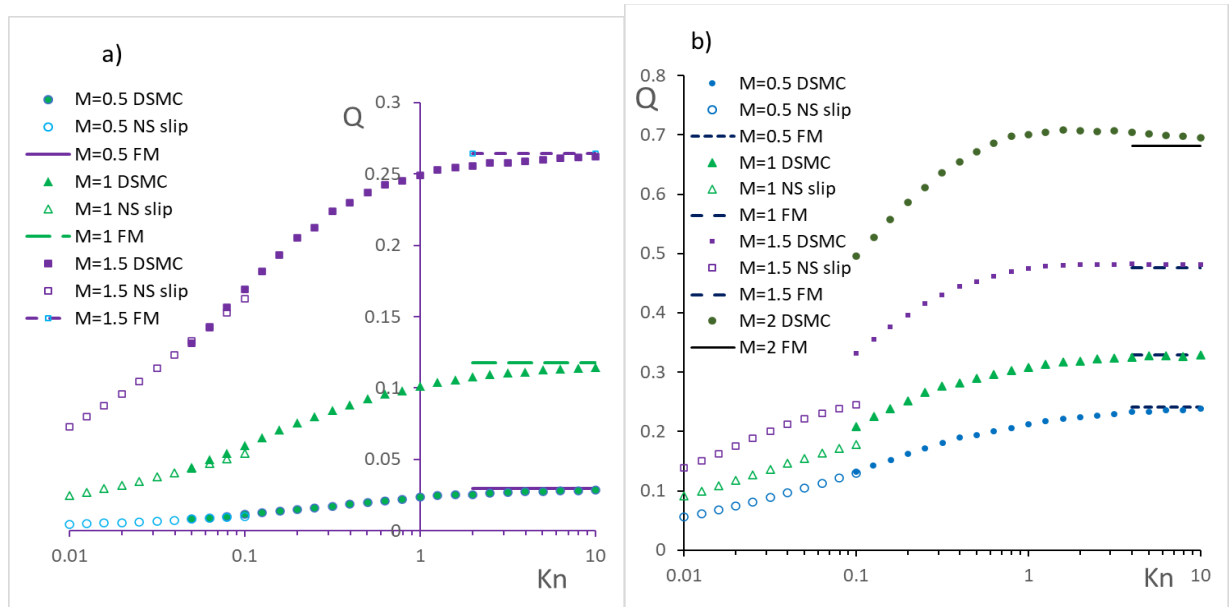


Рисунок 3.7. Зависимости потоков энергии, передаваемой пластине от числа Кнудсена: а) $T_w = 1$, б) $T_w = 0.25$; FM– свободномолекулярные значения.

На рис. 3.7. представлены зависимости $Q(Kn)$, полученные при температурном отношении $T_w \leq 1$ и различных значениях чисел Маха. При $T_w = 1$ поток энергии $Q(Kn)$ монотонно возрастает при дозвуковых и умеренных сверхзвуковых значениях M , см. рис. 3.7а. При $T_w = 1$ зависимость $Q(Kn)$ имеет максимум только при гиперзвуковых числах Маха [38]. Однако, как видно из 3.7б при $T_w = 0.25$ зависимость $Q(Kn)$, как и выше $F(Kn)$, имеет слабый максимум при $M = 2$ и даже уже при $M = 1.5$. Это

объясняется увеличением при $Kn \gg 1$ потока падающих молекул из-за увеличения плотности, вследствие охлаждения при предыдущих столкновениях с отраженными молекулами.

При $T_w > 1$ и небольших числах Маха, таких, что процесс термализации падающих молекул доминирует над процессом их торможения при любых числах Кнудсена, средняя энергия падающих молекул монотонно возрастает, как и поток энергии, передаваемой пластине (см. рис. 3.8, кривые при $M=0.5$ и $M=1$)

При $T_w > 1$ и достаточно, но не слишком больших числах Маха зависимость потока средней энергии передаваемой пластиной $Q(Kn)$ может иметь отрицательный минимум, При этом зависимость $(-Q(Kn))$ описывающая средний поток энергии, отдаваемой пластиной будет иметь максимум (см. рис. 3.8, кривая при $M=1.5$). Этот эффект, как и аналогичные эффекты в задачах Куэтта и Рэлея связаны с тем, что, первоначально процесс торможения доминирует над процессом термализации и средняя энергия падающих молекул уменьшается. Затем при $Kn \ll 1$ уже термализация доминирует над торможением и средняя энергия молекул с уменьшением Kn возрастает. В результате зависимость потока энергии от Kn образует отрицательный минимум.

Если $T_w > 1$ и число Маха так велико, что когда процесс термализации начинает доминировать над процессом торможения, средняя энергия падающих молекул оказывается больше средней энергии отраженных молекул, то при дальнейшем уменьшении Kn она монотонно уменьшается, стремясь к средней энергии отраженных молекул. Поток энергии, передаваемой пластине, при этом не образует минимума.

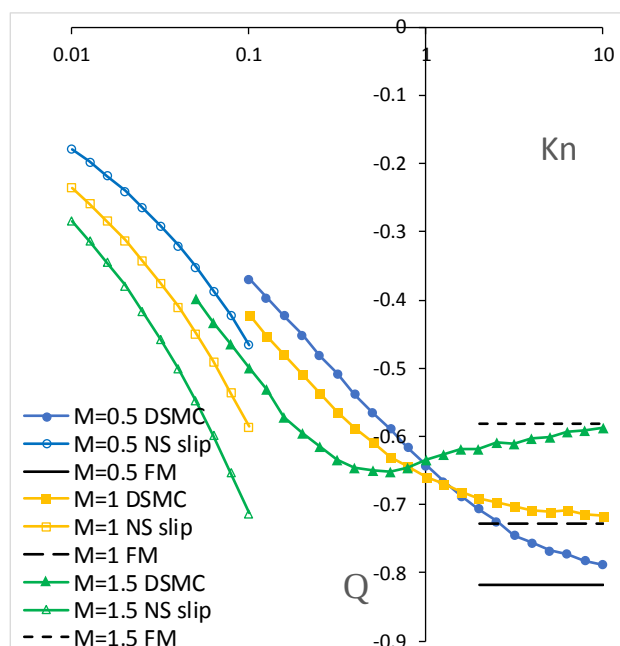


Рисунок 3.8. Зависимости потоков энергии, передаваемой пластине от числа Кнудсена, $T_w = 4$; FM– свободномолекулярные значения.

На рис. 3.6, 3.7 и 3.8 приведены для $Kn \leq 0.1$ также результаты расчетов обтекания пластины, полученные путем решения уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения (3.6) и (3.7). Как видно из графиков при $Kn=0.1$ зависимости, полученные методом DSMC, близки к навье-стоксовым при $T_w = 1$ и $M \leq 1$. Однако с увеличением T_w различия в результатах при $Kn=0.1$ возрастают, см. рис. 3.8. Это связано с тем, что газ вблизи стенки при одном и том же $Kn=0.1$ оказывается при $T_w > 1$ более неравновесным, чем при $T_w = 1$. С ростом числа Маха неравновесность также возрастает.

3.7 ИЗМЕНЕНИЕ ЗНАКА СРЕДНЕГО ПОТОКА ЭНЕРГИИ, ПЕРЕДАВАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ, ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЧИСЛА КНУДСЕНА

Если $T_w > 1$ и процесс торможения падающих молекул по мере уменьшения Kn продолжает доминировать над процессом их термализации даже когда средняя энергия падающих молекул сравнивается со средней энергией отраженных, то при дальнейшем уменьшении Kn поток энергии, передаваемой пластине, меняет знак, см. рис. 3.9. Дальнейшее уменьшение числа Кнудсена приводит к тому, что термализация становится доминирующим процессом. В результате этого средняя энергия падающих молекул достигает минимума, а затем, возрастая, стремится к средней энергии отраженных молекул при $Kn \rightarrow 0$. При этом средний поток энергии, передаваемой пластине $Q(Kn)$ достигает отрицательного минимума, а затем возрастает, стремясь к нулю при $Kn \rightarrow 0$.

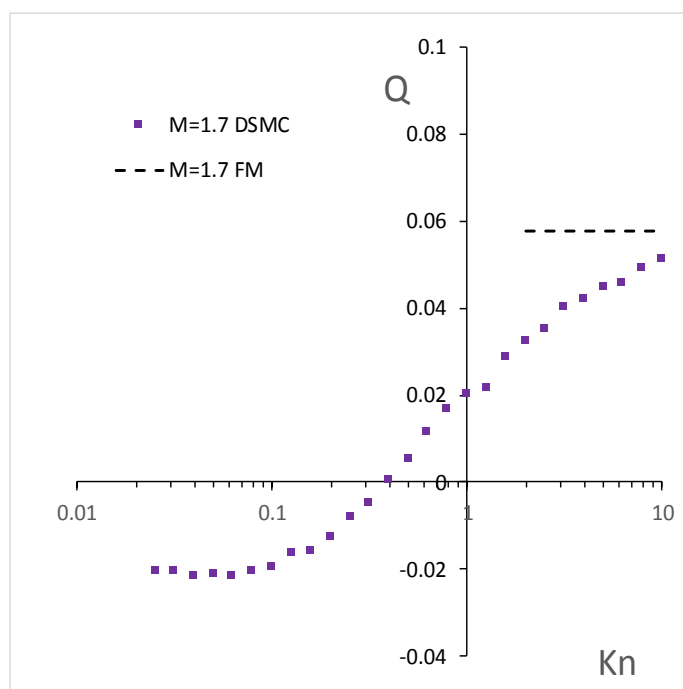


Рисунок 3.9. Средний поток энергии, передаваемой пластине, $T_w = 2$; FM– свободномолекулярное значение.

Этот эффект аналогичен эффектам изменения знака потока энергии, передаваемой пластине в задачах Куэтта и Рэлея (Гл. I, Раздел 1.5 и Гл. II, Раздел 2.8). Хотя тепловой поток к поверхности пластины и поток энергии,

передаваемой пластине, в разреженном газе не совпадают, следует отметить, что перемена знака теплового потока при изменении расстояния от передней кромки при сверхзвуковом обтекании пластины разреженным газом ранее наблюдалась в [85].

Таким образом, в третьей главе исследовано обтекание пластины конечной длины под нулевым углом атаки и обнаружено, что:

- 1) При любом числе Маха набегающего потока в случае, когда температура пластины равна температуре невозмущенного газа среднее по длине пластины значение потока нормального импульса, передаваемого пластине, имеет, как функция числа Кнудсена, один или несколько экстремумов. Причем при сверхзвуковом обтекании пластины всегда существует по крайней мере один максимум. При дозвуковом обтекании пластины такая зависимость имеет минимум, а при околосзвуковом дозвуковом может иметь и минимум, и максимум.
- 2) В широком диапазоне температур при дозвуковых и умеренных сверхзвуковых числах Маха в переходном режиме температура пластины очень слабо влияет на среднюю силу трения, действующую на пластину.
- 3) Средний поток энергии, *отдаваемой* пластиной, при определенных параметрах течения имеет максимум по числу Кнудсена.
- 4) Существуют определенные интервалы значений отношений температур пластин и чисел Маха, при которых средний поток энергии, передаваемый пластине, меняет знак при увеличении числа Кнудсена,

ГЛАВА IV. ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С НЕПОДВИЖНЫМ ВНУТРЕННИМ ЦИЛИНДРОМ

Цилиндрическое течение Куэтта разреженного газа рассматривалось во многих работах [132-155]. Течение с неподвижным внутренним цилиндром исследовалось в [138,139,143,147,148,152].

Большинство этих работ посвящено изучению профилей переменных гидродинамических величин в потоке между цилиндрами. Наиболее интересным результатом этих исследований является обнаружение инверсии скорости в разреженном цилиндрическом течении Куэтта при определенных коэффициентах аккомодации [136,137,140-142,144,155]. Напряжение трения и тепловые потоки у цилиндрических поверхностей, исследовались в [132,138,148,149,152-154]. Однако, параметрических исследований влияния температур и скоростей цилиндров на потоки энергии и импульса, передаваемые цилиндрам не проводилось. Целью данной диссертации является исследование влияния скорости вращения, отношения температур и отношения радиусов на напряжение трения и потоки энергии, передаваемые цилиндрическим поверхностям. В этой и следующей главах рассматриваются и сравниваются два течения Куэтта: 1) с вращающимся внешним цилиндром и покоящимся внутренним 2) с вращающимся внутренним и фиксированным внешним. После понимания свойств этих двух течений Куэтта становится возможным и понимание свойств течения Куэтта с двумя вращающимися цилиндрами.

Глава построена следующим образом: В Разделе 4.1 в общем виде формулируется краевая задача. В Разделе 4.2 рассмотрены соотношения, связывающие потоки тангенциального импульса и энергии, передаваемые внутреннему цилиндру с потоками тангенциального импульса и энергии, передаваемыми внешнему цилиндру. В Разделе 4.3 описывается численный метод расчета течения Куэтта в переходном режиме и проводится его верификация. В Разделе 4.4 исследуются эффекты, вызванные вращением внешнего цилиндра в свободномолекулярном и переходном режимах.

4.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное одномерное течение разреженного одноатомного газа между коаксиальными цилиндрами. Внутренний цилиндр радиуса r_1 и температуры T_1 вращается с линейной скоростью u_1 . Внешний цилиндр радиуса r_2 и температуры T_2 вращается с линейной скоростью u_2 .

Среднюю плотность газа и среднюю численную плотность обозначим ρ_{av} и n_{av} соответственно. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , где r - расстояние от оси, а φ - азимутальная координата. Ось z цилиндрической системы координат совпадает с общей осью цилиндров. Отражение молекул от поверхности происходит диффузно с температурой, равной температуре поверхности.

Для описания течения газа найдем функцию распределения молекул по скоростям f , которая удовлетворяет уравнению Больцмана

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = J(f, f') \quad (4.1)$$

с граничными условиями диффузного отражения молекул с температурой поверхности на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях:

$$f = f_1 = n_1 (2\pi R_g T_1)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + (v_\varphi - u_1)^2 + v_z^2}{2R_g T} \right], \quad v_r > 0, \quad r = r_1 \quad (4.2)$$

$$f = f_2 = n_2 (2\pi R_g T_2)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + (v_\varphi - u_2)^2 + v_z^2}{2R_g T} \right], \quad v_r < 0, \quad r = r_2. \quad (4.3)$$

Здесь и далее $J(f, f')$ - интеграл столкновений молекул [38]; v_r, v_φ и v_z составляющие $\mathbf{V}$ - скорости молекулы в цилиндрической системе координат; R_g - газовая постоянная. Параметры функции распределения n_1 и n_2 находятся из условия баланса между падающими и отраженными молекулами

4.2 СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МАКРОПАРАМЕТРАМИ.

Численная плотность $n(r)$, скорость $u(r)$, температура $T(r)$, напряжение трения $P_{r\phi}(r)$, поток нормального импульса $P_{rr}(r)$, поток энергии $E(r)$ и тепловой поток $q(r)$ находятся с помощью функции распределения молекул f

$$\begin{aligned} n(r) &= \int f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v}, \quad u(r) = \frac{1}{n(r)} \int v_\phi f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v}, \\ T(r) &= \frac{1}{n(r)} \int \frac{v_r^2 + (v_\phi - u)^2 + v_z^2}{3R} f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v}, \quad P_{r\phi} = \int m v_r v_\phi f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \\ P_{rr}(r) &= \int m v_r^2 f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad E(r) = \int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v}, \\ q(r) &= E(r) - P_{r\phi}(r)u(r), \end{aligned}$$

где $d\mathbf{v} = dv_r dv_\phi dv_z$, m - масса молекулы.

Напряжения трения $P_{n\phi 1}, P_{n\phi 2}$ у поверхностей цилиндров, потоки нормального импульса $P_{nr 1}, P_{nr 2}$, передаваемые цилиндрам и потоки энергии, передаваемые цилиндрам E_1, E_2 имеют вид

$$\begin{aligned} P_{n\phi 1}(r_1) &= - \int m v_r (v_\phi - u_1) f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = - \int m v_r v_\phi f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = -P_{r\phi}(r_1) \\ P_{n\phi 2}(r_1) &= \int m v_r (v_\phi - u_2) f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = P_{r\phi}(r_2) \\ P_{nr 1}(r_1) &= -P_{rr}(r_2), \quad P_{nr 2}(r_1) = P_{rr}(r_2) \\ E_1 &= - \int v_r \frac{m[v_r^2 + (v_\phi - u_1)^2 + v_z^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v}, \quad E_2 = E(r_2). \end{aligned}$$

Из уравнения Больцмана следует [38]:

$$\frac{d(r^2 P_{r\phi})}{dr} = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{d(rE)}{dr} = 0 \quad (4.5)$$

Из (4.4), очевидно, следует

$$P_{n\varphi 2} = -P_{n\varphi 1} / \beta^2, \quad (4.6)$$

где $\beta = r_2 / r_1$.

Используя условия непротекания на внутреннем и внешнем цилиндрах

$$\int v_r f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v} = \int v_r f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = 0,$$

находим

$$\int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v} = \int v_r \frac{m(v_r^2 + (v_\varphi - U_1)^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v} +$$

$$U_1 \int m v_r v_\varphi f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v} - \frac{m U_1^2}{2} \int v_r f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v} = -E_1 + P_{n\varphi 1} U_1,$$

$$\int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = \int v_r \frac{m(v_r^2 + (v_\varphi - U_2)^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v} +$$

$$U_2 \int m v_r v_\varphi f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} - \frac{m U_2^2}{2} \int v_r f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = E_2 + P_{n\varphi 2} U_2.$$

С помощью (4.5) легко находим, что

$$\int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v} / \beta = \int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v}.$$

И значит:

$$(-E_1 + P_{n\varphi 1} U_1) / \beta = E_2 + P_{n\varphi 2} U_2$$

Отсюда, используя (4.6) получаем

$$E_2 = -E_1 / \beta + P_{n\varphi 1} U_1 / \beta + P_{n\varphi 1} U_2 / \beta^2 \quad (4.7)$$

Ниже используются безразмерные величины

$$P_{\varphi 1} = \frac{P_{n\varphi 1}}{\rho_{av} c_2^2}, P_{\varphi 2} = \frac{P_{n\varphi 2}}{\rho_{av} c_2^2}, P_{r1} = \frac{P_{rr1}}{\rho_{av} c_2^2}, P_{r2} = \frac{P_{rr2}}{\rho_{av} c_2^2},$$

$$Q_1 = \frac{E_1}{\rho_{av} c_2^3}, Q_2 = \frac{E_2}{\rho_{av} c_2^3}, N_1 = \frac{n_1 c_1}{n_{av} c_2}, N_2 = \frac{n_2 c_2}{n_{av} c_2} /$$

Здесь и далее $U_{1,2} = u_{1,2} / c$, $c_{1,2} = \sqrt{2R_g T_{1,2}}$, $c = c_2$, $U = U_2$,

$$t = T_1 / T_2$$

4.3 МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО ВЕРИФИКАЦИЯ

Свободномолекулярный режим цилиндрического течения Куэтта будем исследовать аналитическими методами, а для решения краевой задачи (4.1) - (4.3) в переходной области воспользуемся прямым статистическим моделированием

Макропараметры потока в переходном режиме зависят от числа Кнудсена ($Kn = \lambda / L$, где $L = r_2 - r_1$) и в гораздо меньшей степени от модели взаимодействия молекул. В расчетах используется модель взаимодействия молекул «твердые сферы». Для этой модели характерная средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = (\sqrt{2} n_{av} \sigma_{sp})^{-1}$, где σ_{sp} - сечение взаимодействия молекул, $\sigma_{sp} = \text{const}$. Для ряда расчетов и для объяснения полученных результатов ниже также используются локальные числа Кнудсена: $Kn_{local} = \lambda_{local} / L_{local}$, где $\lambda_{local} = (\sqrt{2} n(r) \sigma_{sp})^{-1}$, L_{local} - длина на которой один или более макропараметров течения меняется на свою величину; $Kn_{1,2} = \lambda_{1,2} / L$, где $\lambda_{1,2} = (\sqrt{2} n(r_{1,2}) \sigma_{sp})^{-1}$. Используется схема Берда [71,72]. Пространство между цилиндрическими поверхностями разделено на ячейки. Типичный размер ячейки варьируется в диапазоне от $\lambda t / (3U_i)$ при $U_i > 1, t < 1$ до приблизительно $\lambda / 3$ при $U_i \leq 1, t \geq 1$, $i = 1, 2$. Типичное количество моделируемых молекул в ячейке варьируется в диапазоне от 100 до 1000. Шаг по времени варьируется в диапазоне от $\lambda t / (3U_i c)$ при $U_i > 1, t < 1$ до $\lambda / (3c)$ при $U_i \leq 1, t \geq 1$. Типичное количество отражений молекул от внутреннего цилиндра составляет 4 000 000. Типичная статистическая погрешность составляет менее 1,5%. Расчеты проводились на персональном компьютере Intel Core i7, 3.5 ГГц. Характерное время расчета зависит от местного числа Кнудсена на внешнем цилиндре и варьируется от минуты до нескольких дней.

Kn	$P_{r\phi}(\rho_{av}c^2)^{-1}$		Kn	$2q(\rho_{av}c^3)^{-1}$	
	DSMC	[137]		DSMC	[137]
44.31	0.04363	0.04414	29.54	0.2939	0.2938
17.72	0.04362	0.04413	11.82	0.293	0.293
8.862	0.04364	0.0441	5.908	0.2916	0.2917
4.431	0.04346	0.04403	2.954	0.2886	0.289
1.772	0.04308	0.04371	1.182	0.2804	0.2804
0.8862	0.04208	0.04329	0.5908	0.2679	0.2684
0.4431	0.04019	0.04127	0.2954	0.2424	0.2397
0.1772	0.03346	0.03375	0.1182	0.1747	0.1722
0.0886	0.0244	0.0245	0.05908	0.1132	0.1125

Таблица 4.1. Напряжение трения и радиальный поток тепла: сравнение результатов прямого статистического моделирования с решением модельного уравнения при $r_2 = 2r_1$, $U_1 = 0$, $U_2 = 1$, $T_2 = 2T_1$ и $r = (r_2 + r_1)/2$ и различных числах Кнудсена.

Одним из способов контроля за правильностью расчетов цилиндрического течения Куэтта разреженного газа является проверка соблюдения законов сохранения (4.6) и (4.7). Кроме того, для верификации результатов расчетов полученные результаты сравниваются с результатами работы [138], в которой течение Куэтта исследовалось на основе модельного уравнения, с соответствующими решениями задачи Куэтта для уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения на цилиндрических поверхностях при малых числах Кнудсена и с результатами экспериментальных исследований [133].

В таблицах 4.1 и 4.2 напряжение трения и тепловой поток, найденные в настоящей работе методом прямого статистического моделирования (DSMC), сравниваются при $r_2 = 2r_1$, $U_1 = 0$, $U_2 = 1$, $T_2 = 2T_1$ и $r = (r_2 + r_1)/2$ с результатами расчетов, проведенных в [138] на основе модельного уравнения.

Kn	$P_{r\varphi}(\rho_{av}c^2)^{-1}$		Kn	$2q(\rho_{av}c^3)^{-1}$	
	Данная работа	[138]		Данная работа	[138]
44.31	0.06779	0.06778	29.54	0.4513	0.4493
17.72	0.06776	0.06765	11.82	0.4497	0.4466
8.862	0.06758	0.06736	5.908	0.4463	0.4418
4.431	0.06725	0.06666	2.954	0.4385	0.4315
1.772	0.06570	0.06418	1.182	0.4128	0.4007
0.8862	0.06247	0.06058	0.5908	0.3703	0.3588
0.4431	0.05555	0.05314	0.2954	0.3020	0.2920
0.1772	0.03988	0.03818	0.1182	0.1912	0.1864
0.0886	0.02655	0.02560	0.05908	0.1182	0.1159

Таблица 4.2. Напряжение сдвига и радиальный тепловой поток в средней точке в зависимости от числа Кнудсена $\beta = 2$, $U_1 = 0.5$, $U_2 = 0$, $t = 2$

Как видно из таблиц 4.1. и 4.2, значения потоков импульса и тепла, полученные прямым статистическим моделированием, отличаются от соответствующих значений, найденных в [138] путем решения модельного уравнения менее, чем на 3%.

Для описания течения газа при малых числах Кнудсена будем решать краевую задачу для уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения [150]

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{u^2}{r} \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) \right] = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r k \frac{dT}{dr} \right) + r \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right)^2 = 0 \quad (4.10)$$

$$u(r_{1,2}) = u_{1,2} \pm 1.1466 Kn_{1,2} L \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right), \quad T(r_{1,2}) = T_w \pm 2.1904 Kn_{1,2} L \frac{dT}{dr}, \quad (4.11)$$

$$Kn_{1,2} \ll 1, \quad |u(r_{1,2}) - u_{1,2}| \ll c_{1,2}, \quad T(r_{1,2}) - T_{1,2} \ll T_{1,2}. \quad (4.12)$$

Напряжение трения и поток энергии, передаваемой внутреннему цилиндру, определяются по формулам $P_{r\varphi 1} = \mu(du/dr - u/r)$, $E_1 = -kdT/dr - P_{r\varphi 1}(u - u_1)$. Здесь p , ρ , T давление газа, плотность и температура; μ - динамическая вязкость, k - теплопроводность. $Kn_{1,2} = \lambda_{1,2}/L$, $\lambda_{1,2} = (\sqrt{2}n(r_{1,2})\sigma_{sp})^{-1}$. Для газа с температурой T [127]

$$\mu = 1.016 \frac{5\sqrt{\pi}}{16} \frac{m}{\sigma_T} \sqrt{RT}, \quad k = \frac{5}{2} \frac{R\mu}{Pr}.$$

Здесь число Прандтля $Pr = 0.661$

T_1/T_2	$U_2 c^{-1}$	$P_{r\varphi}(\rho_{av}c^2)^{-1}$		$E_1(\rho_{av}c^2)^{-1}$	
		DSMC	NS	DSMC	NS
1	0.5	0.0160	0.0157	0.00239	0.00212
	1	0.0313	0.0313	0.00917	0.00824
1/4	0.5	0.0120	0.0123	0.0394	0.0391
	1	0.0241	0.0250	0.0449	0.0451

Таблица 4.3. Напряжение трения на внутреннем цилиндре и поток энергии, передаваемой внутреннему цилиндру: сравнение результатов прямого статистического моделирования с решением краевой задачи для уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения при $U_1 = 0$, $Kn = 0.05$.

В таблице 4.3. сравниваются потоки импульса и энергии, передаваемые внутреннему цилиндру, полученные методом DSMC при $Kn = 0.05$ с результатами решения краевой задачи для уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения. Как видно из таблицы расчеты обоими методами приводят к близким результатам при $U \leq 1$.

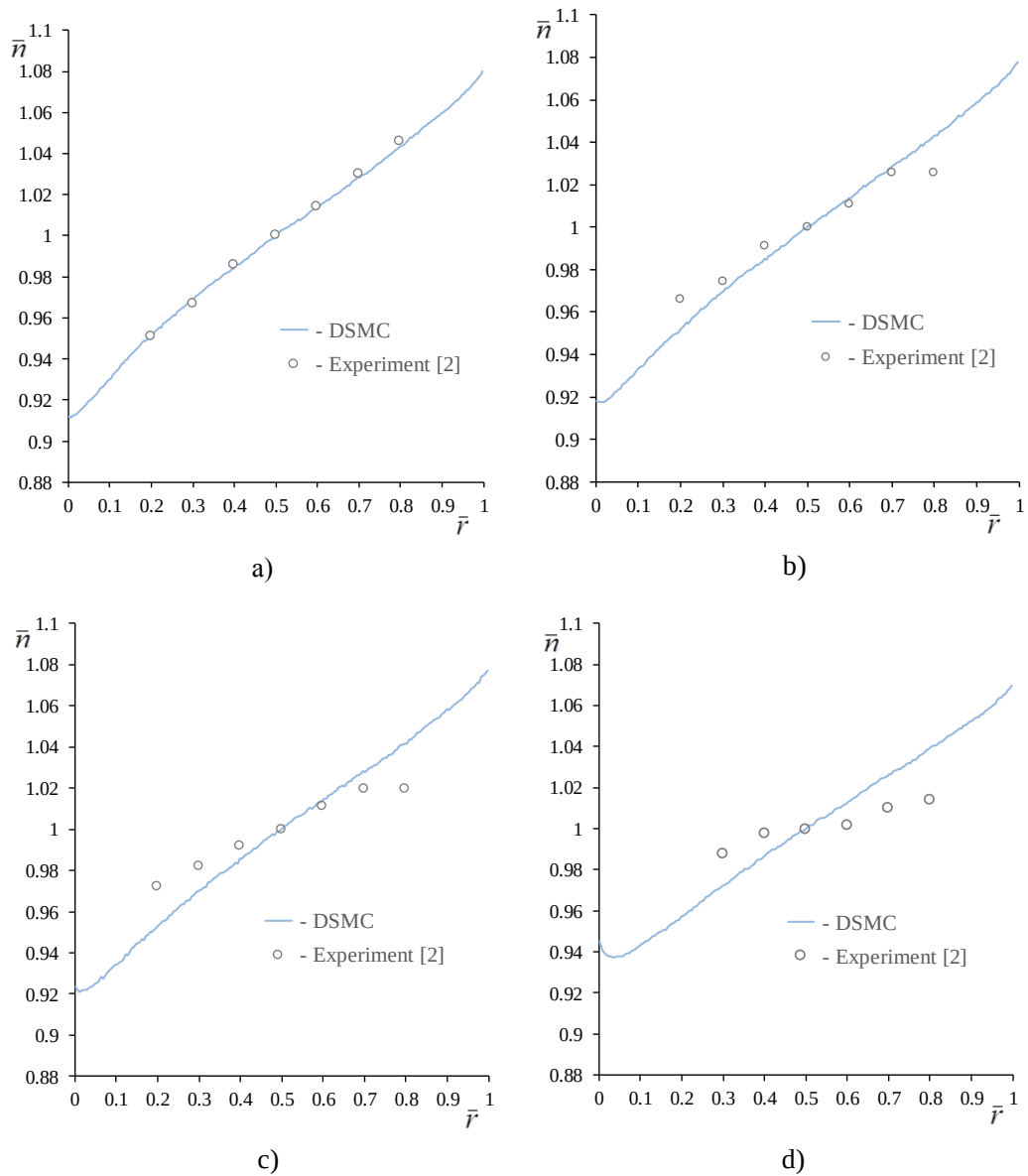


Рисунок. 4.1. Сравнение результатов DSMC с экспериментальными данными. Зависимость относительной плотности $\bar{n}$ от относительного расстояния от оси $\bar{r}$ при $\beta = 1.5$, $U_1 = 0.901$, $t = 0.974$; а) $Kn = 0.0426$, б) $Kn = 0.0819$, в) $Kn = 0.109$, г) $Kn = 0.251$.

Результаты экспериментальных исследований распределения плотности между цилиндрами в течении Куэтта разреженного газа для различных чисел Кнудсена приведены в [133]. На рис. 4.1 сравниваются результаты DSMC расчетов и экспериментальные результаты. Здесь использованы обозначения

$$\bar{n} = \frac{n}{n[r = (r_1 + r_2)/2]}, \quad \bar{r} = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}.$$

Как видно из рис. 4.1, имеет место хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных, особенно с учетом того, что экспериментальные значения плотности n получены в [133], с точностью $\pm 1\%$.

4.4 ЭФФЕКТЫ МАКСИМУМА НАПРЯЖЕНИЯ ТРЕНИЯ И МАКСИМУМА ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим случай, когда внутренний цилиндр неподвижен ($u_1 = 0$), а внешний цилиндр вращается с линейной скоростью u_2 . Пусть цилиндры имеют одинаковую температуру $T_1 = T_2$ и $c_1 = c_2 = c$. Влияние различия температур цилиндров на описываемые в этом разделе эффекты будет рассмотрено в дальнейшем.

4.4.1 Свободномолекулярный режим

В свободномолекулярном режиме безразмерный поток молекул N_i , падающих на внутреннюю ($i = 1$) и внешнюю ($i = 2$) поверхности, а также потоки касательного импульса $P_{\phi i}$ и энергии Q_i , передаваемых поверхностям были получены В.Ю. Александровым в [102]

$$N_1 = \frac{1}{\left[s_1(\beta) + s_2(\beta, U) \exp \left[\left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) U^2 \right] \right]}, N_2 = N_1 \exp \left[\left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) U^2 \right] \quad (4.13)$$

$$P_{\phi 1} = \frac{N_1 U}{2\sqrt{\pi}\beta}, P_{\phi 2} = -\frac{N_1 U}{2\sqrt{\pi}\beta^3}, Q_1 = \frac{N_1 U^2}{4\beta^2\sqrt{\pi}}, Q_2 = \frac{N_1 U}{4\beta^3\sqrt{\pi}} \quad (4.14)$$

где

$$s_1(\beta) = \frac{\beta^2 \arcsin(\frac{1}{\beta}) + \sqrt{\beta^2 - 1} - \frac{\pi}{2}}{\pi(\beta^2 - 1)}, \quad (4.15)$$

$$s_2(\beta) = -\frac{e^{-U^2} (2\beta^2 \arcsin(\frac{1}{\beta}) + 2\sqrt{\beta^2 - 1} + \pi - 2\pi\beta^2)}{2\pi(\beta^2 - 1)} + \frac{2\beta^2 e^{-U^2}}{\sqrt{\pi}(\beta^2 - 1)U^2} \left[2 \int_{U/\beta}^U \sqrt{U^2 - z^2} e^{z^2} z \operatorname{erf}(z) dz + \int_0^{U/\beta} (\sqrt{U^2 - z^2} - \sqrt{\frac{U^2}{\beta^2} - z^2}) e^{z^2} z \operatorname{erf}(z) dz \right] \quad (4.16)$$

Вывод формул (4.13) - (4.16) см. в [102].

Легко заметить, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} P_1(\beta, U) = U(2\sqrt{\pi})^{-1}; \quad \lim_{U \rightarrow \infty} P_1(\beta, U) = 0; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_1(\beta, U)\beta = U^3 \left\{ 2\sqrt{\pi} [\exp(U^2) - 1] \right\}^{-1} \quad (4.17)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} Q_1(\beta, U) = U^2(4\sqrt{\pi})^{-1}; \quad \lim_{U \rightarrow \infty} Q_1(\beta, U) = 0; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_1(\beta, U)\beta^2 = U^4 \left\{ 4\sqrt{\pi} [\exp(U^2) - 1] \right\}^{-1} \quad (4.18)$$

Зависимости потока молекул, падающих на внутренний цилиндр N_1 от U при различных β показаны на рис. 4.2. В соответствии с (4.13) $N_1 \rightarrow 0$ при $U \rightarrow \infty$.

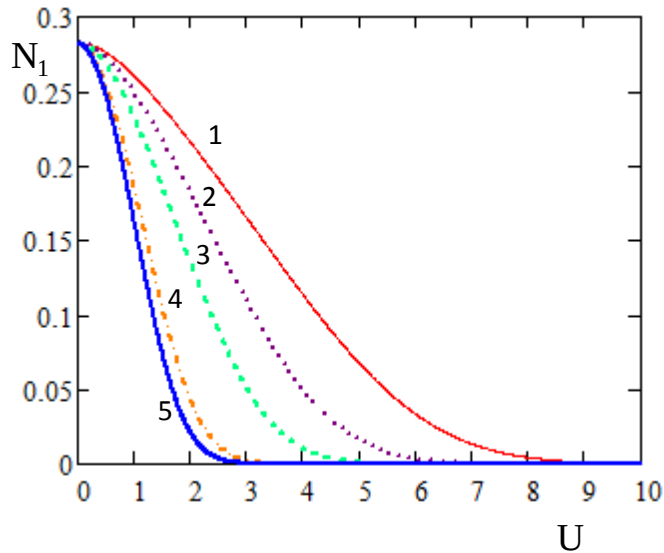


Рисунок 4.2. Зависимость потока молекул, падающих на внутреннюю цилиндрическую поверхность, от скорости вращения внешнего цилиндра U при различных значениях отношения радиусов цилиндров: 1-5 – $\beta = 1.05, 1.1, 1.2, 2, 10$.

Отметим, что напряжение трения на внешнем цилиндре (т.е. поток тангенциального импульса, передаваемого внешней цилиндрической поверхности), пропорционально напряжению трения на внутреннем цилиндре при любых числах Кнудсена, тогда как поток энергии, передаваемый внешней поверхности, пропорционален потоку энергии, передаваемому внутренней поверхности только в свободномолекулярном

течении Куэтта. Более того, в свободномолекулярном случае полные потоки энергии, передаваемые на поверхности внутреннего и внешнего цилиндров, равны между собой.

На рис. 4.3 и рис. 4.4 показаны зависимости потоков импульса и энергии, передаваемых внутренней цилиндрической поверхности при различных значениях β . Как видно из рисунков, начиная с некоторого значения $U = U_{p \max}(\beta)$, увеличение скорости внешнего цилиндра в свободномолекулярной цилиндрической задаче Куэтта приводит к уменьшению напряжения трения, а затем, начиная с $U = U_{Q \max}(\beta)$, к уменьшению потока энергии, передаваемого поверхности.

Этот эффект имеет следующее объяснение. Если $U = 0$ потоки энергии и импульса, передаваемые поверхностям, равны нулю. Увеличение скорости внешней цилиндрической поверхности приводит к увеличению средней энергии и среднего тангенциального импульса молекул, отраженных от этой поверхности. В результате потоки энергии и импульса, передаваемые внутренней цилиндрической поверхности, становятся положительными. С другой стороны, увеличение средней тангенциальной скорости молекулы, отраженной от внешнего цилиндра, приводит к уменьшению вероятности того, что молекула ударится о внутреннюю поверхность и больше не упадет на внешнюю поверхность. Это приводит к тому, что с увеличением скорости вращения внешней поверхности поток молекул, падающих на внутреннюю поверхность, уменьшается. Если скорость достаточно велика, это уменьшение происходит быстрее, чем увеличение среднего импульса падающих на внутренний цилиндр молекул и их средней энергии. В результате напряжение трения (поток тангенциального импульса, передаваемого поверхности) и поток энергии, передаваемой поверхности, достигают максимальных значений при определенных $U_{p \max}(\beta)$ и $U_{Q \max}(\beta)$ соответственно.

Из (4.17), (4.18) легко видеть, что

$$U_{p \max}(\beta) \rightarrow \infty \quad ; \quad U_{Q \max}(\beta) \rightarrow \infty \quad ; \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} U_{p \max}(\beta) = 0.935 \quad ; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} U_{Q \max}(\beta) = 1.26$$

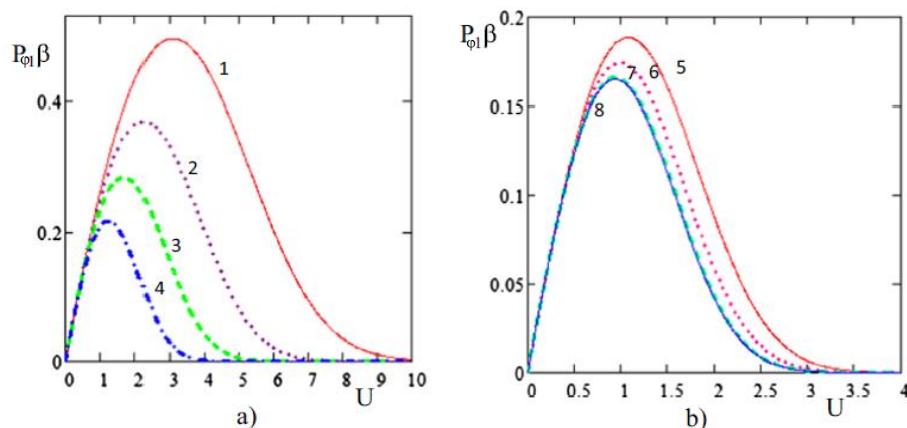


Рисунок 4.3. Напряжение трения на внутренней цилиндрической поверхности (поток импульса, передаваемого поверхности) в зависимости от скорости внешнего цилиндра: 1-7 – $\beta = 1.05, 1.1, 1.2, 1.5, 2, 3, 10$; 8 – $\beta \rightarrow \infty$.

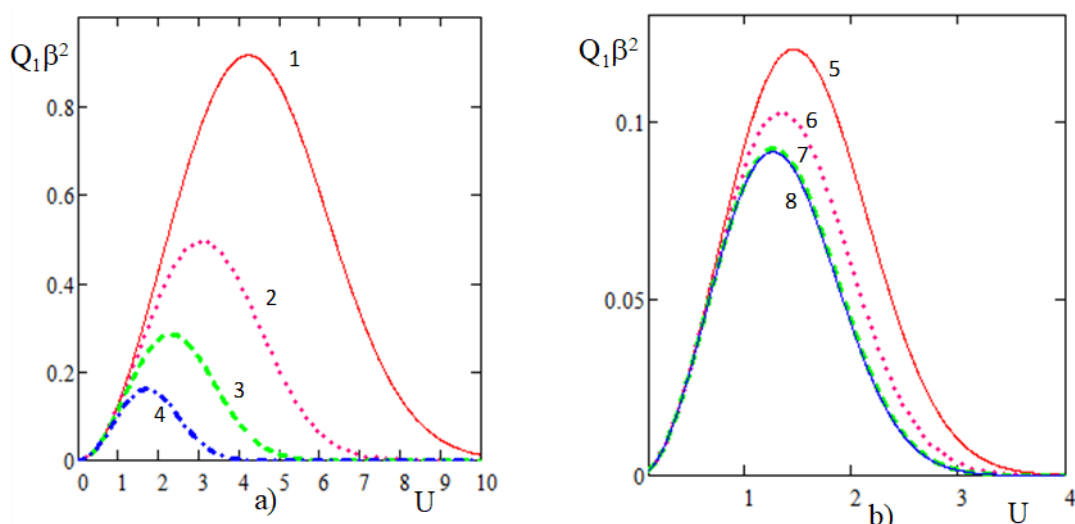


Рисунок 4.4. Поток энергии, передаваемой внутренней цилиндрической поверхности, в зависимости от скорости внешнего цилиндра: 1-7 – $\beta = 1.05, 1.1, 1.2, 1.5, 2, 3, 10$; 8 – $\beta \rightarrow \infty$.

4.4.2 Переходный режим

В переходном режиме макропараметры потока зависят от числа Кнудсена. Зависимость напряжения трения на внутреннем цилиндре от скорости внешнего цилиндра, полученная методом прямого статистического моделирования, показана на рис. 4.5 при различных числах Кнудсена для $\beta = 2$. Напряжение трения на внешнем цилиндре пропорционально напряжению трения на внутреннем цилиндре при любом числе Кнудсена, см. (4.6). Соответствующие зависимости для потоков энергии, передаваемой внутренней и внешней цилиндрическим поверхностям, представлены на рис. 4.6. Как видно из рис. 4.5 и рис. 4.6, уменьшение Kn приводит к увеличению $U_{p\max}$ и $U_{Q\max}$. Отметим, что в переходном режиме соотношение $Q_1 = \beta Q_2$ перестает выполняться. Однако, если скорость достаточно велика, так что местное число Кнудсена $Kn_1 = Kn_{local}(r_1)$ около внутреннего цилиндра больше или порядка единицы, это соотношение является правильным с точностью до нескольких процентов. Здесь $Kn_{local}(r) = \lambda_{local}(r) / L$, $\lambda_{local}(r) = (\sqrt{2}n(r)\sigma_{sp})^{-1}$. Профили численной плотности при различных числах Кнудсена показаны на рис. 4.7 для $\beta = 2$ и различных значений скорости внешнего цилиндра. Как видно из графиков, значение скорости внешнего цилиндра влияет на профиль плотности гораздо сильнее, чем значение числа Кнудсена. Как и следовало ожидать, с увеличением скорости плотность газа у внутреннего цилиндра уменьшается, а у внешнего - увеличивается. При достаточно высоких скоростях внешнего цилиндра Kn_1 становится намного больше Kn , а местное число Кнудсена вблизи внешнего цилиндра $Kn_2 = Kn_{local}(r_2)$ становится намного меньше, чем Kn . При увеличении U увеличиваются размеры той части потока, где локальное число Кнудсена $Kn_{local}(r) \gg Kn$, а ширина области, в которой $Kn_{local}(r) \ll Kn$ соответственно уменьшается. Профили скорости при $Kn = 0.05$ и различных скоростях внешнего цилиндра показаны

на рис. 4.8. Как видно из графиков, увеличение скорости внешнего цилиндра приводит к тому, что основная масса газа начинает вращаться почти как твердое тело с угловой скоростью $\omega = U_2 / r_2$.

Известно, что зависимости от числа Кнудсена напряжения трения и потока энергии, передаваемого поверхности в гиперзвуковом плоском течении Куэтта, немонотонны и имеют максимум [40,42]. Зависимости напряжения трения на внутреннем цилиндре и потока энергии, передаваемого внутреннему цилиндру, от Kn при различных значениях скорости внешнего цилиндра показаны на рис. 4.9. Как видно из графиков, эти зависимости могут быть монотонными, иметь максимум и даже, в отличие от плоского случая, иметь и максимум, и слабый минимум, см. кривую 2 на рис.4.9b. Отметим также, что в цилиндрическом течении Куэтта, в отличие от плоского течения Куэтта, немонотонность возникает даже при скоростях внешней поверхности порядка скорости звука.

На рис. 4.10 зависимости $Q_1(U)$ и $P_{\varphi 1}(U)$, полученные при $\beta = 2$ путем решения уравнений Навье-Стокса (4.8) - (4.10) с граничными условиями прилипания, сравниваются с зависимостями, полученными методом прямого статистического моделирования при $Kn = 0.05$. На рис.4.7 показаны соответствующие численные профили плотности газа при различных скоростях внешнего цилиндра. Расчеты уравнений Навье-Стокса с условиями прилипания и расчеты методом прямого статистического моделирования при $U < 1$ приводят к близким результатам. Однако при дальнейшем увеличении скорости внешнего цилиндра значения напряжения трения и потока энергии, полученные путем решения уравнений Навье-Стокса с условиями прилипания, неограниченно возрастают, в отличие от значений этих же величин, полученных прямым статистическим моделированием, которые после достижения максимумов стремятся к нулю.

Как видно из рис.4.7, увеличение скорости приводит к уменьшению плотности газа вблизи внутреннего цилиндра. Таким образом, в

приближении Навье-Стокса с граничными условиями прилипания потоки импульса и энергии растут с увеличением скорости несмотря на то, что плотность газа вблизи внутреннего цилиндра стремится к нулю. Объясняется это двумя обстоятельствами. Во-первых, вязкость и теплопроводность в этом приближении не зависят от плотности. Во-вторых, из-за граничных условий прилипания второй множитель в выражении для касательного напряжения в потоке между цилиндрами не обращается в ноль. В результате напряжение трения и тепловой поток увеличиваются с увеличением градиентов скорости и температуры. Однако, как только функция распределения скоростей вблизи внутреннего цилиндра перестает при низкой плотности быть навье-стоксовой, континуальное приближение с условиями прилипания перестает адекватно описывать течение Куэтта.

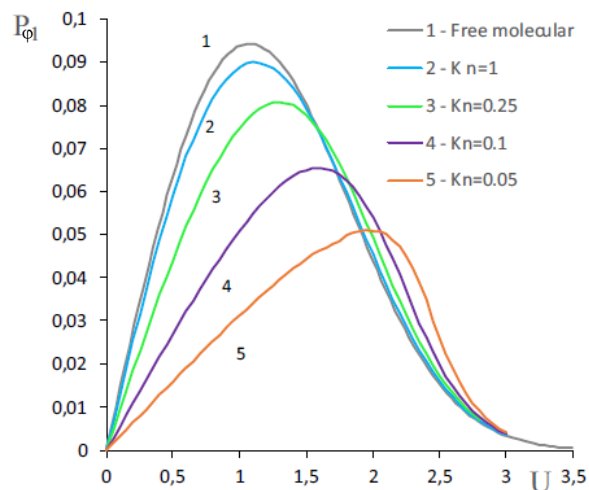


Рисунок 4.5. Напряжение трения на внутреннем цилиндре в зависимости от скорости внешнего цилиндра; $\beta = 2$.

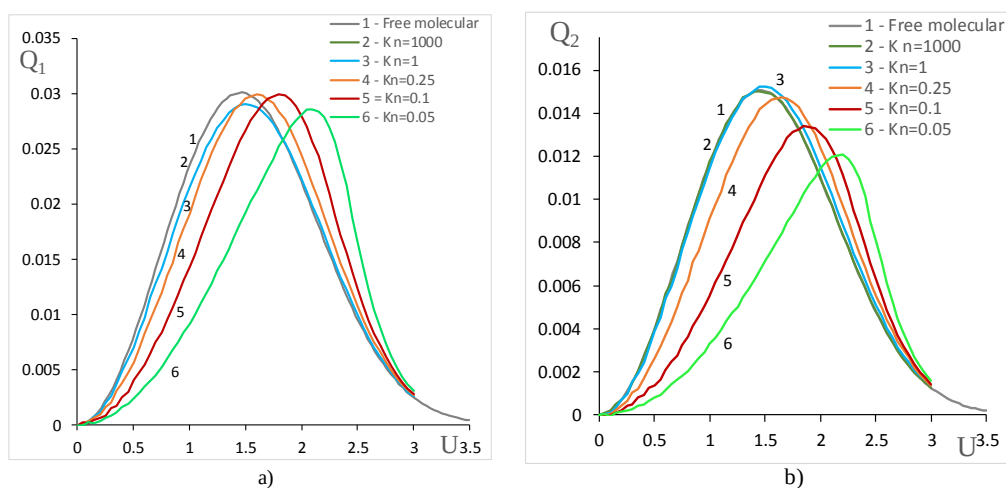


Рисунок 4.6. Поток энергии, передаваемые внутреннему (а) и внешнему (б) цилиндру, в зависимости от скорости внешнего цилиндра; $\beta = 2$.

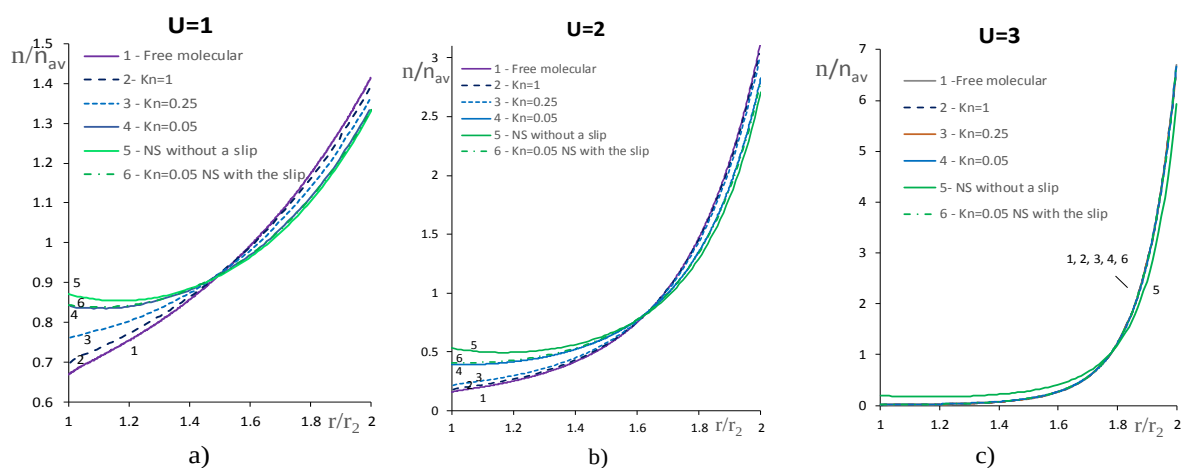


Рисунок 4.7. Профили численной плотности при $Kn=0.05, 0.25, 1$; $\beta = 2$.

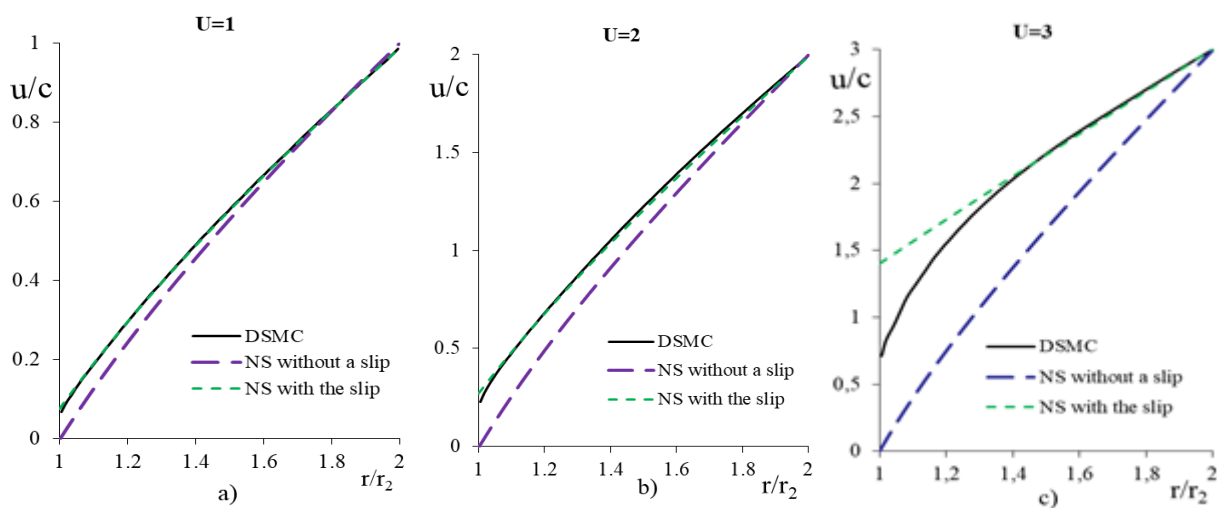


Рисунок 4.8. Профили скорости при $Kn=0.05$; $\beta = 2$.

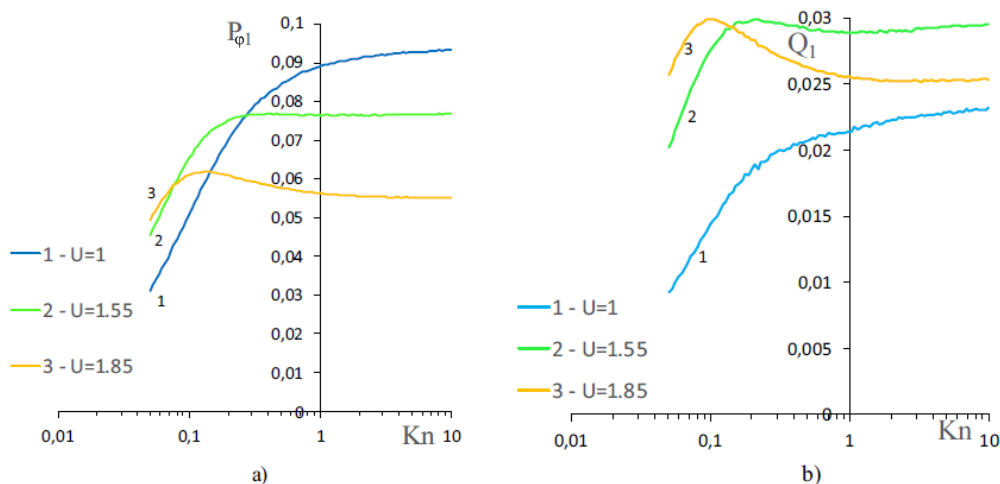


Рисунок 4.9. Напряжение трения и потоки энергии, передаваемой внутреннему цилиндру, в зависимости от числа Кнудсена; $\beta = 2$.

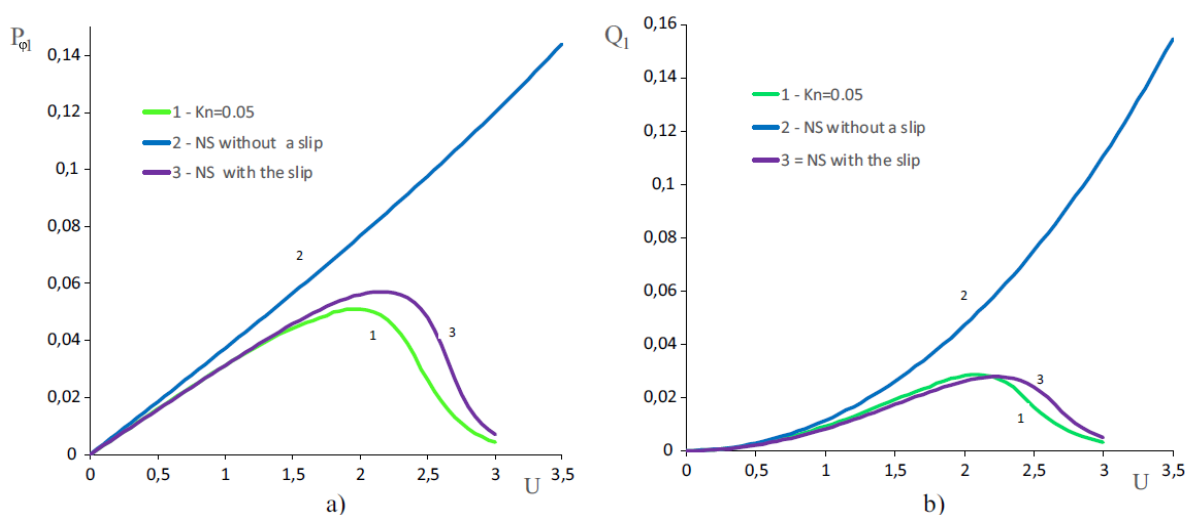


Рисунок 4.10. Напряжение трения (a) и потоки энергии, передаваемой внутреннему цилиндру (b) в зависимости от скорости внешнего цилиндра; $\beta = 2$.

Движение слабо разреженного газа можно описывать с помощью уравнений Навье-Стокса (4.8) - (4.10) с граничными условиями скольжения (4.11) [149]. Зависимости $P_{\phi 1}(U)$ и $Q_1(U)$, полученные при решении (4.8) - (4.11) сравниваются с зависимостями, полученными методом DSMC при $Kn=0.05$ на рис. 4.10. Соответствующие профили плотности и скорости для различных скоростей внешнего цилиндра показаны на рис. 4.6 и 4.8. Как видно из графиков, использование граничных условий скольжения вместо условий прилипания позволяет получить гораздо лучшее совпадение с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования.

Кроме того, кривые $P_{\varphi 1}(U)$ и $Q_1(U)$, полученные в результате решения (4.8) - (4.11), также как и результаты расчетов методом прямого статистического моделирования имеют максимумы. Распределение скоростей в течении Куэтта, полученное путем решения уравнений Навье-Стокса со скольжением при высоких скоростях, близко к распределению скоростей в твердом цилиндре, вращающемся с угловой скоростью ω . Диссипация энергии в этом случае близка к нулю, равно как и потоки тангенциального импульса и энергии, передаваемые цилиндрам. Поэтому кривые 2 и 3 (полученные с использованием условий прилипания и скольжения соответственно) на рис.8 сильно различаются. Однако из-за резкого увеличения локального числа Кнудсена вблизи внутреннего цилиндра при высоких скоростях зависимости, полученные с использованием граничных условий скольжения, справедливых при $Kn_1 \ll 1$, $Kn_2 \ll 1$, могут при $U > 2.3$ использоваться только для качественного описания картины течения.

4.5 ЭФФЕКТ ОЧЕНЬ РЕЗКОГО ПЕРЕХОДА ОТ СЛАБОРАЗРЕЖЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ВНУТРЕННЕГО ЦИЛИНДРА К СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМУ ПРИ ОЧЕНЬ МАЛЫХ СРЕДНИХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

4.5.1 Анализ результатов DSMC расчетов

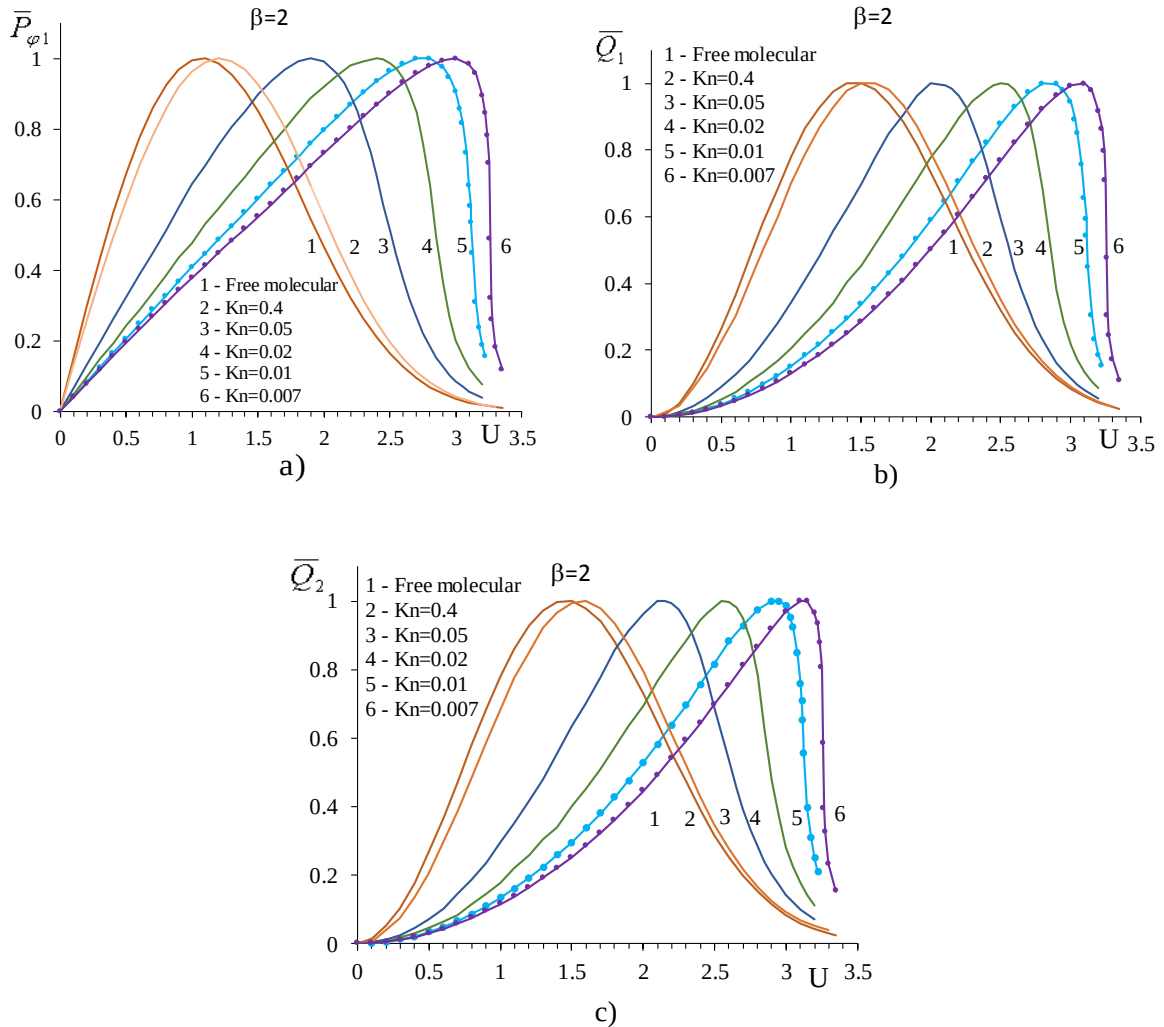


Рисунок 4.11. Нормированные на свои максимальные значения напряжение сдвига $\bar{P}_{\varphi 1}$ (a) и потоки энергии $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ (b, c), передаваемой на внутреннюю (a, b) и внешнюю (c) цилиндрические поверхности, в зависимости от скорости внешнего цилиндра U при $t = 1, \beta = 2$ и различных числах Кнудсена.

На рис. 4.11 при различных числах Кнудсена представлены зависимости от скорости цилиндра сдвиговых напряжений и потоков энергии, передаваемой цилиндрам, нормированные на их максимальные

значения. Здесь

$$\bar{P}_{\phi 1}(U) = P_{\phi 1}(U) / P_{\phi 1 \max} ; \quad \bar{Q}_1(U) = Q_1(U) / Q_{1 \max} ; \quad \bar{Q}_2(U) = Q_2(U) / Q_{1 \max}$$

При $Kn > 0.02$ зависимости $P_{\phi 1}(U)$, $Q_1(U)$ и $Q_2(U)$ принципиально не отличаются от соответствующих свободномолекулярных зависимостей. А именно, с увеличением скорости сдвиговое напряжение и потоки энергии сначала возрастают, а затем, достигнув максимума, медленно уменьшаются. Напротив, при достаточно малых числах Кнудсена ($Kn = 0.01$ и $Kn = 0.007$) функции $P_{\phi 1}(U)$, $Q_1(U)$ и $Q_2(U)$ радикально отличаются от соответствующих зависимостей в свободномолекулярном режиме. А именно, они резко уменьшаются после достижения максимума. Увеличение скорости на 5 % (от $U = 3.05$ до $U = 3.2$) приводит к уменьшению $P_{\phi 1}(U)$, $Q_1(U)$ и $Q_2(U)$, в 4.5, 4.6 и 3.7 раза соответственно. Профили гидродинамических переменных изображены на рис. 4.12 для $Kn = 0.01$ при $U = 3.05$ и $U = 3.2$.

Как и ожидалось, соответствующие профили гидродинамических переменных также сильно различаются. Например, при таком изменении U плотность газа во внутреннем цилиндре уменьшается в 8.1 раза, а скачки скорости и температуры увеличиваются в 2.2 и 1.75 раза соответственно. Локальное число Кнудсена увеличивается с $Kn_1 = 0.12$ до $Kn_1 = 1$. Таким образом, после увеличения скорости на 5% слаборазреженное течение вблизи внутреннего цилиндра превращается в близкое к свободномолекулярному. При дальнейшем увеличении скорости увеличивается размер области, занимаемой сильно разреженным газом. При достаточно большой скорости течение становится близким к свободномолекулярному везде, за исключением узкого слоя плотного газа вблизи внешнего цилиндра.

Теперь обсудим резкое уменьшение касательного напряжения и потоков энергии, передаваемых цилиндрам в случае, когда число Кнудсена достаточно мало, а скорость вращения внешнего цилиндра достаточно велика. Отметим, что значение скорости вращения, соответствующее верхней границе режима течения слаборазреженного газа вблизи

внутреннего цилиндра, U_{up} неограниченно возрастает при стремлении среднего числа Кнудсена Kn к нулю. Действительно

$$n(r_1)/n_{av} = Kn/Kn_1$$

Значение Kn_1 фиксировано. Следовательно, если Kn стремится к нулю, то $n(r_1)/n_{av}$ тоже стремится к нулю. Однако это возможно только в том случае, если U_{up} при этом стремится к бесконечности.

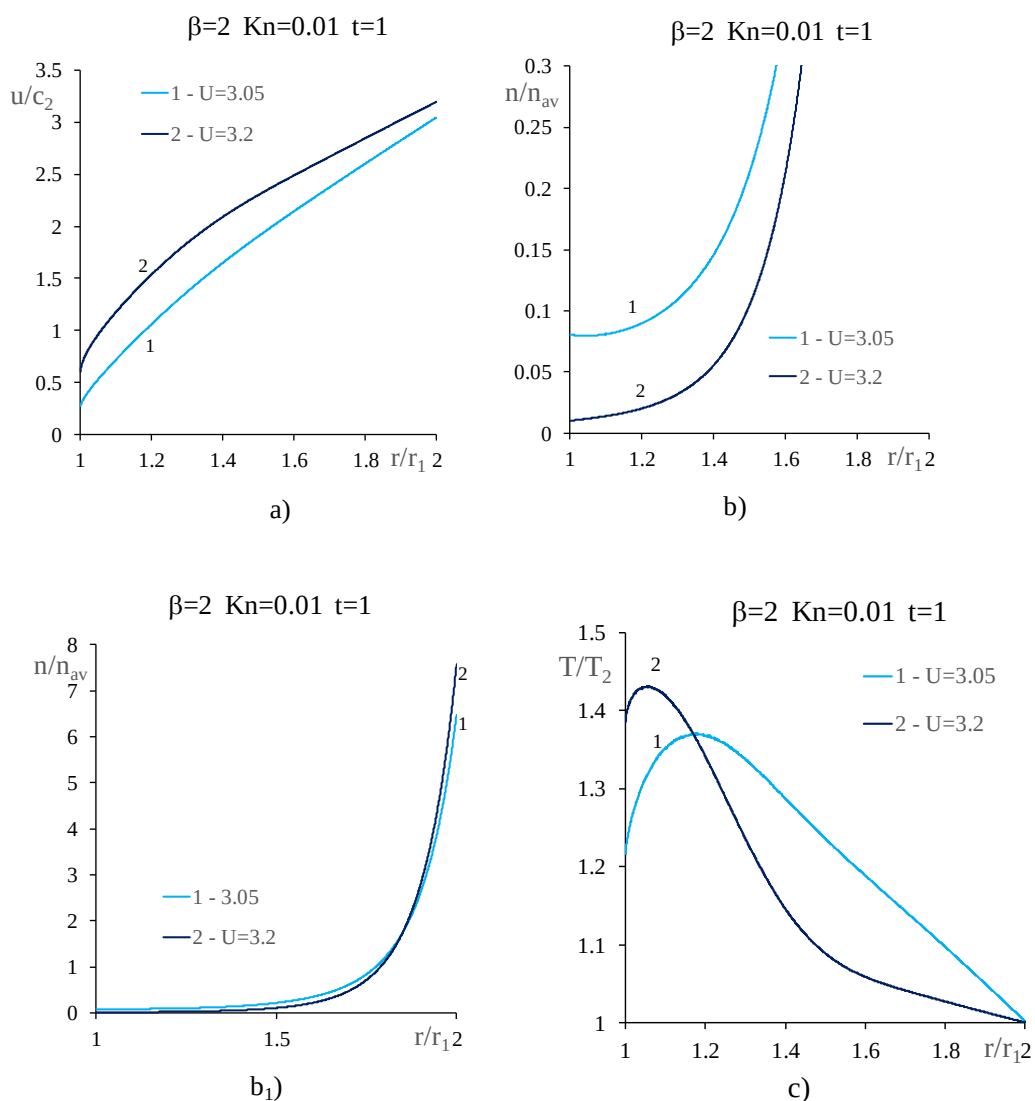


Рисунок 4.12. Профили скорости (a), плотности (b, b1) и температуры (c) при близких значениях непосредственно до и после резкого уменьшения сдвигового напряжения и потоков энергии при $Kn = 0.01$, $t = 1$, $\beta = 2$.

Весьма резкое снижение касательного напряжения и потоков энергии происходит в значительно разреженном режиме течения вблизи внутреннего цилиндра. С другой стороны, течение вблизи внешнего цилиндра близко к сплошноредному и вращается почти как твердое тело с угловой скоростью $\omega = U_2 / r_2$ и температурой, равной температуре внешнего цилиндра, см. рис. 4.12. В свободномолекулярном режиме потоки импульса и энергии пропорциональны молекулярному потоку (см. (4.14)). Таким образом, чтобы качественно понять поведение этих течений в существенно разреженном переходном режиме, достаточно изучить свободномолекулярный поток $S_1 = N_1 n_{av} c_2$ молекул, падающих на внутренний цилиндр. Отметим также, что в свободномолекулярном режиме плотность газа вблизи внутреннего цилиндра при достаточно высоких скоростях примерно пропорциональна молекулярному потоку. Для оценки величины потока молекул в существенно разреженном переходном режиме течения вблизи внутреннего цилиндра введем отношение эффективных радиусов $\beta_{ef}(U)$, эффективную среднюю плотность n_{avef} и эффективную скорость $U_{ef} = \alpha_{ef} U$.

В начале резкого снижения потока молекул, падающих на внутренний цилиндр $\beta_{ef} - 1 \ll 1$. Значение α_{ef} меньше 1, но всегда порядка 1. Нас интересует только главный экспоненциальный множитель. Таким образом, в начале резкого падения молекулярного потока имеем [102]

$$S_1(U_{up}) \sim \exp \{ -[1 - \beta_{ef}^{-2}(U_{up})] \alpha_{ef}^2(U_{up}) U_{up}^2 \} n_{avef}(U_{up})$$

При увеличении U_{up} на $\Delta U \ll 1$ получаем

$$S_1(U_{up} + \Delta U) \sim \exp \{ -[1 - \beta_{ef}^{-2}(U_{up} + \Delta U)] \alpha_{ef}^2(U_{up} + \Delta U) [U_{up}^2 + 2U_{up}\Delta U + (\Delta U)^2] \} n_{avef}(U_{up} + \Delta U)$$

Пусть ΔU удовлетворяет условию

$$\Delta U = \frac{1}{2[1 - \beta_{ef}^2(U_{up} + \Delta U)] \alpha_{ef}^2(U_{up} + \Delta U) U_{up}}$$

В этом случае

$$\Delta U \rightarrow 0, \text{ при } U_{up} \rightarrow \infty$$

и

$$S_1(U_{up} + \Delta U) \sim \frac{e^{-1} \exp \{ -[\alpha_2^2(1 - \beta_2^{-2}) - \alpha_1^2(1 - \beta_1^{-2})]U_{up}^2 \} S_1(U_{up}) n_{avef}(U_{up} + \Delta U)}{n_{avef}(U_{up})}, \quad (4.19)$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_{ef}(U_{up}), \quad \alpha_2 = \alpha_{ef}(U_{up} + \Delta U), \quad \beta_1 = \beta_{ef}(U_{up}), \quad \beta_2 = \beta_{ef}(U_{up} + \Delta U).$$

Поскольку рассматривается режим течения, при котором увеличение скорости внешнего цилиндра сопровождается увеличением степени разреженности газа вблизи внутреннего цилиндра, то

$$\alpha_1 < \alpha_2, \quad \beta_1 < \beta_2, \quad n_{avef}(U_{up} + \Delta U) < n_{avef}(U_{up})$$

При этом значение $S_1(U_{up} + \Delta U)$ согласно (4.19) более, чем в e раз превосходит $S_1(U_{up})$.

В нашем случае Kn_1 фиксировано, и, следовательно, $S_1(U_{up})$ ограничено. Таким образом, получаем

$$S_1(U_{up} + \Delta U) \rightarrow 0 \text{ при } U_{up} \rightarrow \infty,$$

Причем, как отмечалось выше $\Delta U \rightarrow 0$, при $U_{up} \rightarrow \infty$, т.е. при $Kn \rightarrow 0$.

Далее, $S_1(U_{up} + \Delta U) \sim n(U_{up} + \Delta U)c_1$ и, следовательно, $n(U_{up} + \Delta U) \rightarrow 0$, при $U_{up} \rightarrow \infty$

Это означает, что течение вблизи внутреннего цилиндра при $U = U_{up} + \Delta U$ является свободномолекулярным. Таким образом, получаем, что при достаточно малых средних числах Кнудсена переход от слаборазреженного режима цилиндрического течения Куэтта вблизи внутреннего цилиндра к свободномолекулярному происходит с ростом скорости U выше определенного значения U_{up} практически ступенчато. Таким образом, при больших U_{up} при $U = U_{up}$ происходит радикальная перестройка потока. Фактически поток резко отрывается от внутреннего цилиндра. В результате основная часть газа вращается почти как твердое тело с угловой скоростью и температурой, близкими к угловой скорости и

температуре внешнего цилиндра, см. рис. 4.12. В этом случае влияние газа на внутренний цилиндр весьма незначительно, а течение в целом близко к бездиссипативному.

Отметим также, что из результатов, представленных на рис. 4.11 следует существование при достаточно малых числах Кнудсена поверхности $F(U, t, \beta, Kn) = 0$ в пространстве (U, t, β, Kn) , при пересечении которой параметры течения изменяются почти скачком и происходит резкий переход от слаборазреженного течения вблизи внутреннего цилиндра к сильноразреженному или наоборот.

4.5.2 Сравнение с решением граничной задачи для уравнений Навье-Стокса

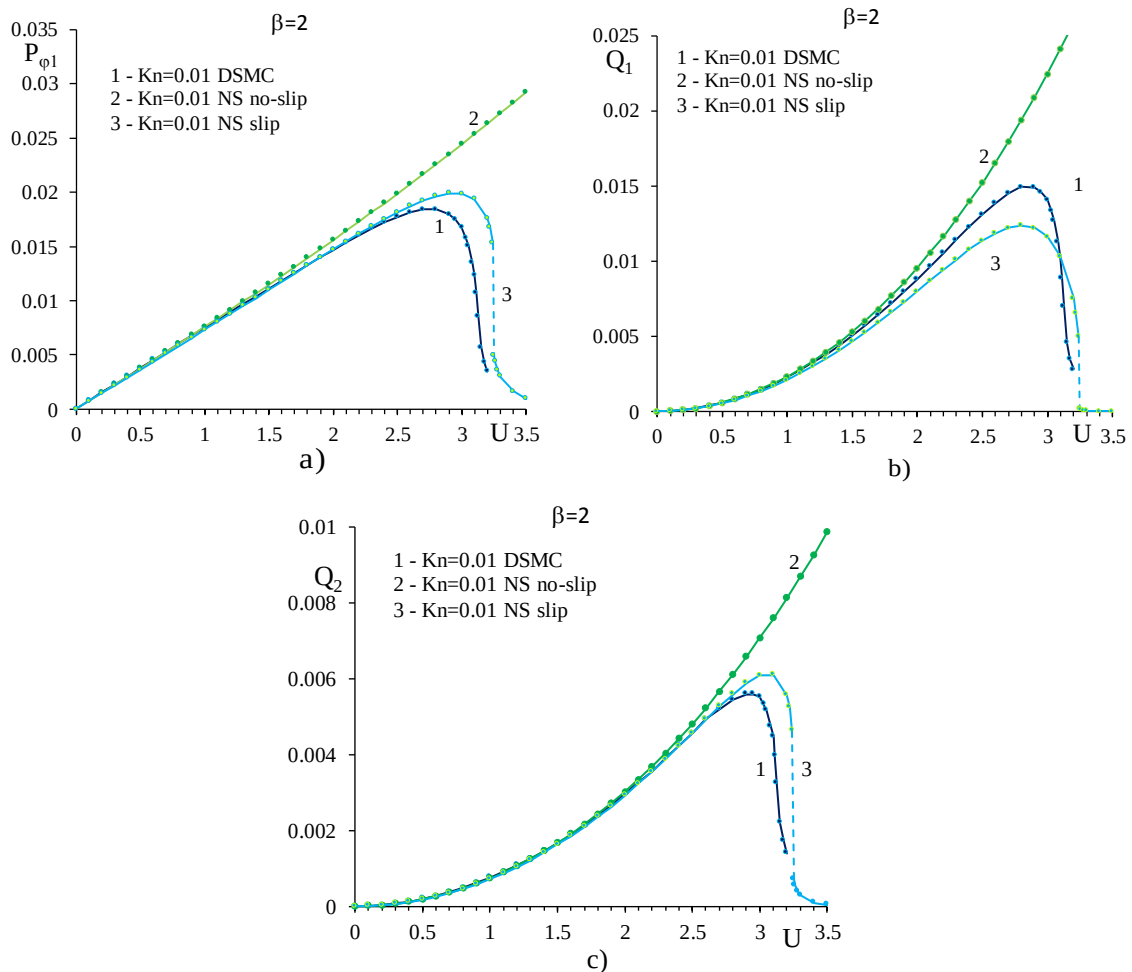


Рисунок 4.13. Зависимости напряжения трения $P_{\phi 1}$, (a) и потоков энергии Q_1, Q_2 (b, c), передаваемых внутренней, b) и внешней (c) цилиндрическим поверхностям от скорости внешнего цилиндра: сравнение навье-стоксовых и DSMC расчетов при $Kn=0.01$, $t = 1$, $\beta = 2$.

Результаты расчетов цилиндрического течения Куэтта, полученные методом DSMC, сравнивались в Разделе 4.4.1.2 с решением уравнений Навье-Стокса (4.8) – (4.10) с условиями прилипания и с условиями скольжения (4.11) – (4.12) при $Kn=0.05$ и $Kn=0.04$. При этом было показано, что решения уравнения Навье-Стокса с граничными условиями скольжения и прилипания принципиально отличаются друг от друга при больших скоростях. В режиме Навье-Стокса с граничными условиями прилипания потоки энергии и импульса монотонно возрастают с ростом скорости, в то время как в случае

граничных условий скольжения они, как и DSMC зависимости имеют максимумы. Решения уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения и прилипания при числах Кнудсена, существенно меньших, чем в Разделе 4.4.1.2, показаны на рис. 4.13. Как видно из рис.4.13, решения уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения, а также решения DSMC зависимости резко меняют свой характер при определенных значениях скорости.

Таким образом, решения уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения, как и DSMC расчеты указывают на очень резкое уменьшение напряжения трения и потоков энергии при достаточно малых числах Кнудсена и достаточно высоких скоростях. При этом значения скорости вращения внешнего цилиндра, при которых это происходит, полученные путем решения уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения (NSS), отличаются от соответствующих значений DSMC расчетов не более чем более 5%. Отметим, что резкое падение NSS зависимостей начинается при $U=3.05$ с $Kn_1 = 0.12$, т.е. в конце режима слабого разрежения, при котором условия (4.11) и (4.12) еще выполняются. После этого Kn_1 резко возрастает, достигая единицы при $U=3.2$. Это приводит к тому, что условия (4.11) и (4.12) перестают выполняться и слабо разреженное течение превращается в существенно разреженное. Однако даже в этом случае, как видно из рис.4.13, NSS в целом качественно описывает поведение потоков.

4.6 ЭФФЕКТ МАКСИМУМА ПОТОКА НОРМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА, ПЕРЕДАВАЕМОГО НЕПОДВИЖНОМУ ВНУТРЕННЕМУ ЦИЛИНДРУ

Если центробежные силы в цилиндрическом течении Куэтта достаточно велики, то, как видно из рис. 4. 14а, абсолютная величина потока нормального импульса, передаваемого внутреннему цилиндру, является монотонно убывающей функцией скорости вращения внешнего цилиндра. С другой стороны, в случае плоского течения Куэтта абсолютная величина потока нормального импульса, передаваемого пластине, в свободномолекулярном режиме не зависит от относительной скорости пластин, а в переходном и сплошносредном режимах неограниченно возрастает с ее увеличением. Это является следствием преобразования возрастающей с ростом скорости направленной кинетической энергии в тепловую энергию молекул. Следовательно, в случае, когда радиус внешнего цилиндра незначительно превышает радиус внутреннего цилиндра и цилиндрическое течение близко к плоскому, т. е. при $\beta \ll 1$, зависимость $P_{r2}(U_2)$ должна иметь максимум. Этот вывод подтверждается результатами расчетов, приведенных на рис. 4.14б.

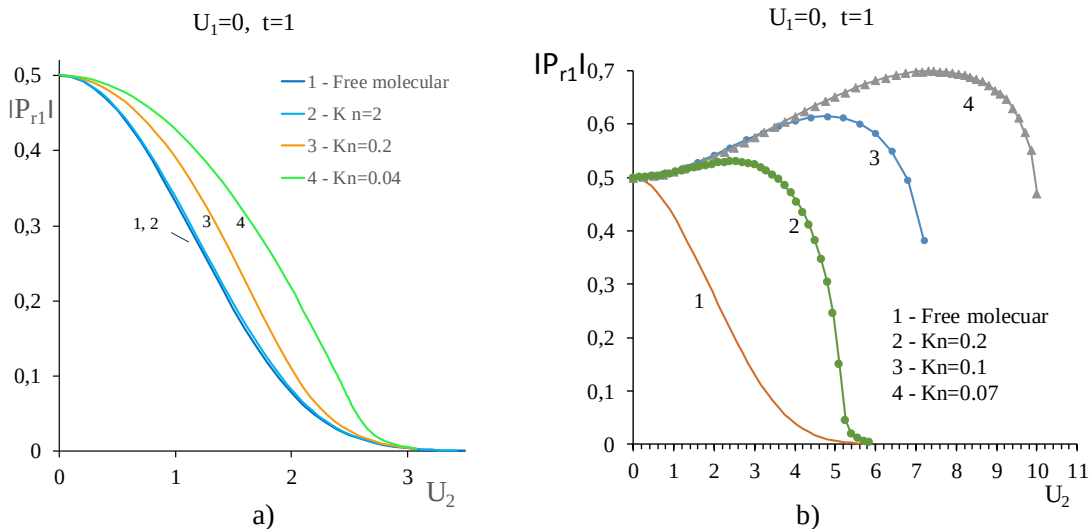


Рисунок 4.14. Абсолютная величина потока нормального импульса P_{r1} , передаваемого внутренней цилиндрической поверхности, в течении Куэтта с неподвижным внутренним цилиндром в зависимости от скорости внешнего цилиндра при двух различных отношениях радиусов: $\beta = 2$ (а) и $\beta = 1.15$ (б)

4.7 КИНЕТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ, ВЫЗВАННЫЕ РАЗНОСТЬЮ ТЕМПЕРАТУР ЦИЛИНДРОВ

Целью данного раздела является исследование влияния различия температур цилиндрических поверхностей на напряжение трения и потоки энергии в течении Куэтта разреженного газа с неподвижным внутренним цилиндром. Рассматриваются различные режимы течения, отличающиеся скоростями внешнего цилиндра и значениями числа Кнудсена.

4.7.1 Свободномолекулярный режим. Эффект перемены знака потока энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, при изменении отношения радиусов цилиндров

В свободномолекулярном режиме безразмерный поток молекул N_i , падающих на внутреннюю ($i = 1$) и внешнюю ($i = 2$) поверхности, а также потоки касательного импульса $P_{\varphi i}$ и энергии Q_i , передаваемых поверхностям были получены В.Ю. Александровым [103]

$$N_1 = \frac{1}{\left[s_1(\beta)t^{-1/2} + s_2(\beta, U) \exp \left[\left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) U^2 \right] \right]}, \quad N_2 = N_1 \exp \left[\left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) U^2 \right] \quad (4.19)$$

$$P_{\varphi 1} = \frac{N_1 U}{2\sqrt{\pi}\beta}, \quad P_{\varphi 2} = -\frac{N_1 U}{2\sqrt{\pi}\beta^3}, \quad (4.20)$$

$$Q_1 = \frac{N_1 (U^2 - 2(t-1)\beta^2)}{4\beta^2 \sqrt{\pi}}, \quad Q_2 = \frac{N_1 (U^2 + 2(t-1)\beta^2)}{4\beta^3 \sqrt{\pi}}, \quad (4.21)$$

где

$$s_1(\beta) = \frac{2 \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right) + 2\sqrt{\beta^2 - 1} - \pi}{2\pi(\beta^2 - 1)} \quad (4.22)$$

$$s_2(\beta, U) = -\frac{e^{-U^2} (2 \arcsin(\frac{1}{\beta}) + 2\sqrt{\beta^2 - 1} - \pi)}{2\pi(\beta^2 - 1)} - \frac{2\beta^2 \int_0^{\frac{U}{\beta}} e^{-U^2 + x^2} x \cdot \operatorname{erf}(x) \cdot (\sqrt{U^2 - x^2} - \sqrt{\frac{U^2}{\beta^2} - x^2}) dx}{\sqrt{\pi}(\beta^2 - 1)U^2} + \quad (4.23)$$

$$\frac{\{1 - \exp[(1 - 1/\beta^2)U^2]\}\beta^2}{(\beta^2 - 1)U^2},$$

$$t = \frac{T_1}{T_2}, \quad \beta = \frac{r_2}{r_1}, \quad U = \frac{U_2}{c}, \quad c = \sqrt{2RT_2}.$$

При $t = 1$ (случай $T_1 = T_2$ при любых β и U) $Q_1 = Q_2\beta$. Если $t \neq 1$,

то

$$\frac{Q_2\beta}{Q_1} = Q(|Ec_{cyl}(t, \beta, U)|) \quad \text{if } t < 1, \quad (4.24)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2\beta} = Q(|Ec_{cyl}(t, \beta, U)|) \quad \text{if } t > 1, \quad (4.25)$$

$$Q(Ec_{cyl}) = -1 + \frac{2c_p |Ec_{cyl}|}{4R + c_p |Ec_{cyl}|}, \quad (4.26)$$

где $Ec_{cyl} = Ec/\beta^2$, $Ec = U_2^2 / [c_p(T_1 - T_2)]$ - число Эккерта, $c_p = 5R/2$.

Таким образом, отношение полных потоков энергии, передаваемых цилиндрическим поверхностям зависит только от одного параметра ($|Ec_{cyl}|$) а не от трех (t, β, U), как сами потоки энергии по отдельности. В случае неподвижных цилиндров $|Ec_{cyl}| = 0$ и $Q(0) = -1$. С увеличением $|Ec_{cyl}|$ величина Q монотонно возрастает, стремясь к единице при $|Ec_{cyl}| \rightarrow \infty$, см. рис. 4.15

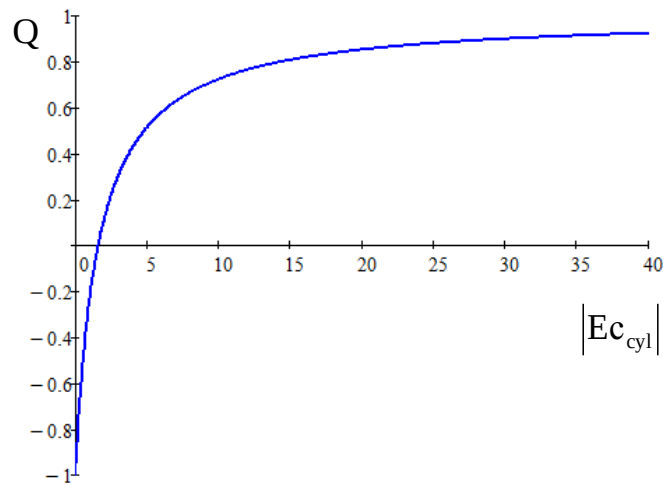


Рисунок 4.15. Зависимость отношения суммарных потоков энергии, передаваемых поверхностям, от абсолютной величины цилиндрического числа Эккерта.

Из (4.21) следует, что зависимость потока энергии, передаваемой внутренней поверхности, от скорости U всегда имеет максимум при $t \geq 1$ (а внешней соответственно при $t \leq 1$). Далее, как видно из рис. 4.16, в некоторых случаях (при $t < t_{b1} < 1$) поток энергии, передаваемый на внутреннюю поверхность, монотонно уменьшается с увеличением U ($t_{b1} = 0.68$ при $\beta = 2$). То же явление наблюдается для потоков энергии, передаваемых на внешнюю поверхность. А именно, при $t > t_{b2} > 1$ поток энергии, передаваемый на внешнюю поверхность, монотонно уменьшается с увеличением U ($t_{b2} = 1.31$ при $\beta = 2$).

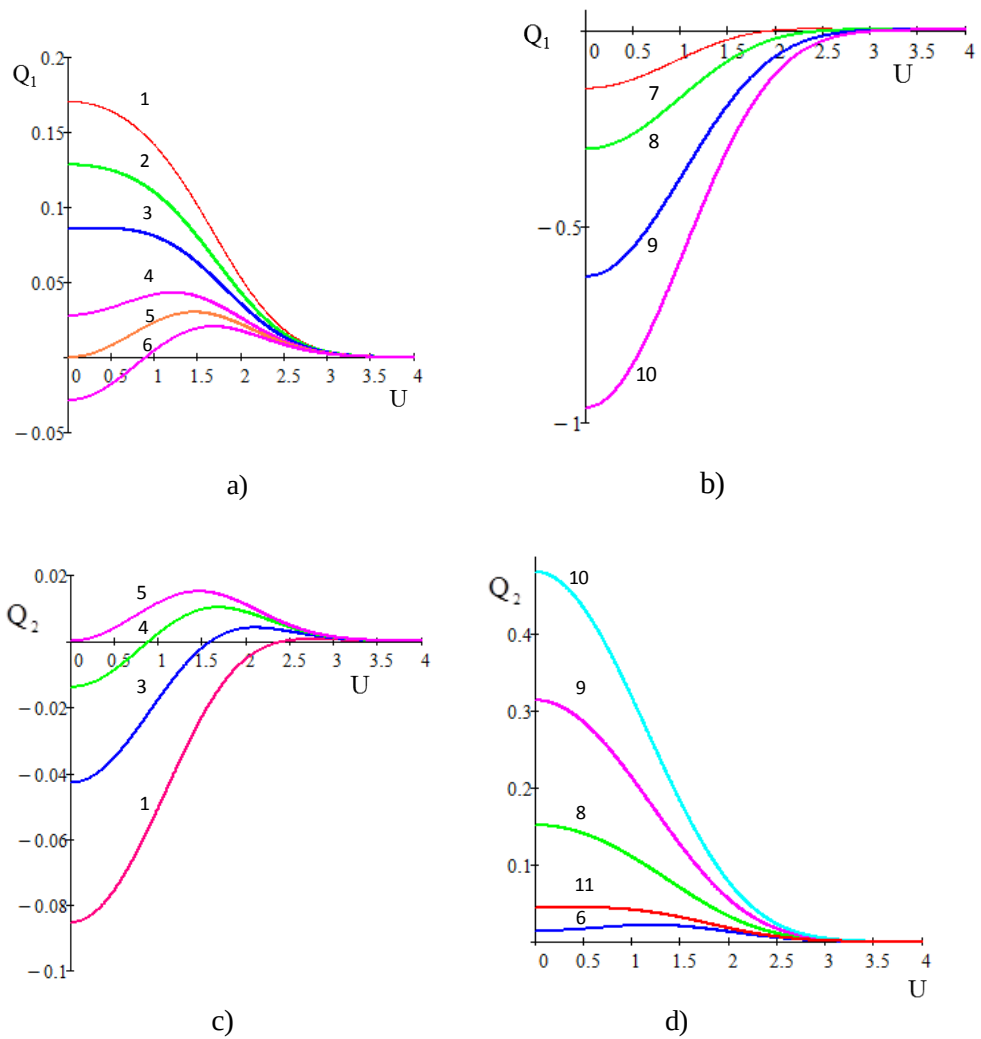


Рисунок 4.16. Поток энергии, передаваемый на внутреннюю и внешнюю цилиндрические поверхности, в зависимости от скорости внешнего цилиндра при $\beta = 2$ и различном температурном отношении:

1-11 – $t = 0.25, 0.5, 0.68, 0.9, 1, 1.1, 1.5, 2, 3, 4, 1.31$;

Это можно объяснить следующим образом. Увеличение U приводит как к уменьшению потока молекул, падающих на поверхность с другой поверхности, так и к увеличению средней энергии налетающих молекул.

Если для всех U первый эффект преобладает над вторым, то $Q_1(U)$ и $Q_2(U)$ монотонно убывают при любом U . С другой стороны, если первый эффект доминирует над вторым только при достаточно больших значениях U , то зависимости имеют максимумы. Как видно из рис.4.16 и рис.4.17, эти

эффекты приводят к тому, что в случае $t > 1$ при увеличении U (и постоянных β и t) может происходить изменение знака потока энергии, передаваемого в «горячий» внутренний цилиндр, а при $t < 1$ - к изменению знака потока энергии, передаваемого в «горячий» внешний цилиндр. Это происходит при $U^2 = 2(t-1)\beta^2$ и $U^2 = 2(1-t)\beta^2$, см. (4.21). Легко заметить, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} Q_1(\beta, U, t) = \sqrt{t} \frac{2(1-t) + U^2}{2\sqrt{\pi}(1 + \sqrt{t})}; \quad \lim_{U \rightarrow \infty} Q_1(\beta, U, t) = 0; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_1(\beta, U, t) = \frac{(1-t)U^2}{2\sqrt{\pi}[\exp(U^2) - 1]}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} Q_2(\beta, U, t) = \sqrt{t} \frac{2(t-1) + U^2}{2\sqrt{\pi}(1 + \sqrt{t})};$$

$$\lim_{U \rightarrow \infty} Q_2(\beta, U, t) = 0; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta Q_2(\beta, U, t) = \frac{(t-1)U^2}{2\sqrt{\pi}[\exp(U^2) - 1]}$$

На рис. 4.18 показана зависимость потоков энергии, передаваемой внутренней и внешней цилиндрическим поверхностям, от отношения радиусов при различных скоростях и температурах внешнего цилиндра. Как видно из рис. 4.18, эта зависимость существенно отличается от аналогичной зависимости для $U = 0$. А именно, зависимости потока энергии монотонны для $U = 0$, но при определенных $U > 0$ могут иметь максимумы и минимумы. Как видно из рис. 4.18, для $t > 1$ при росте β при достаточно большой постоянной скорости может происходить изменение знака потока энергии, передаваемой «горячему» внутреннему цилиндру, а для $t < 1$ при изменении знака поток энергии, передаваемой «горячему» внешнему цилиндру. Это связано с тем, что при увеличении β доля дополнительной энергии, связанной с вращением внешнего цилиндра в средней энергии молекул, падающих на противоположную поверхность, уменьшается до такой степени, что это приводит к изменению знака потока энергии, передаваемой поверхности. Зависимости нормированных полных потоков

энергии $\beta Q_2(\beta)$, передаваемых внешнему цилиндру при различных значениях U , также показаны на рис.4.18. Как видно из графиков, зависимости потока энергии и потока полной энергии от β могут качественно различаться.

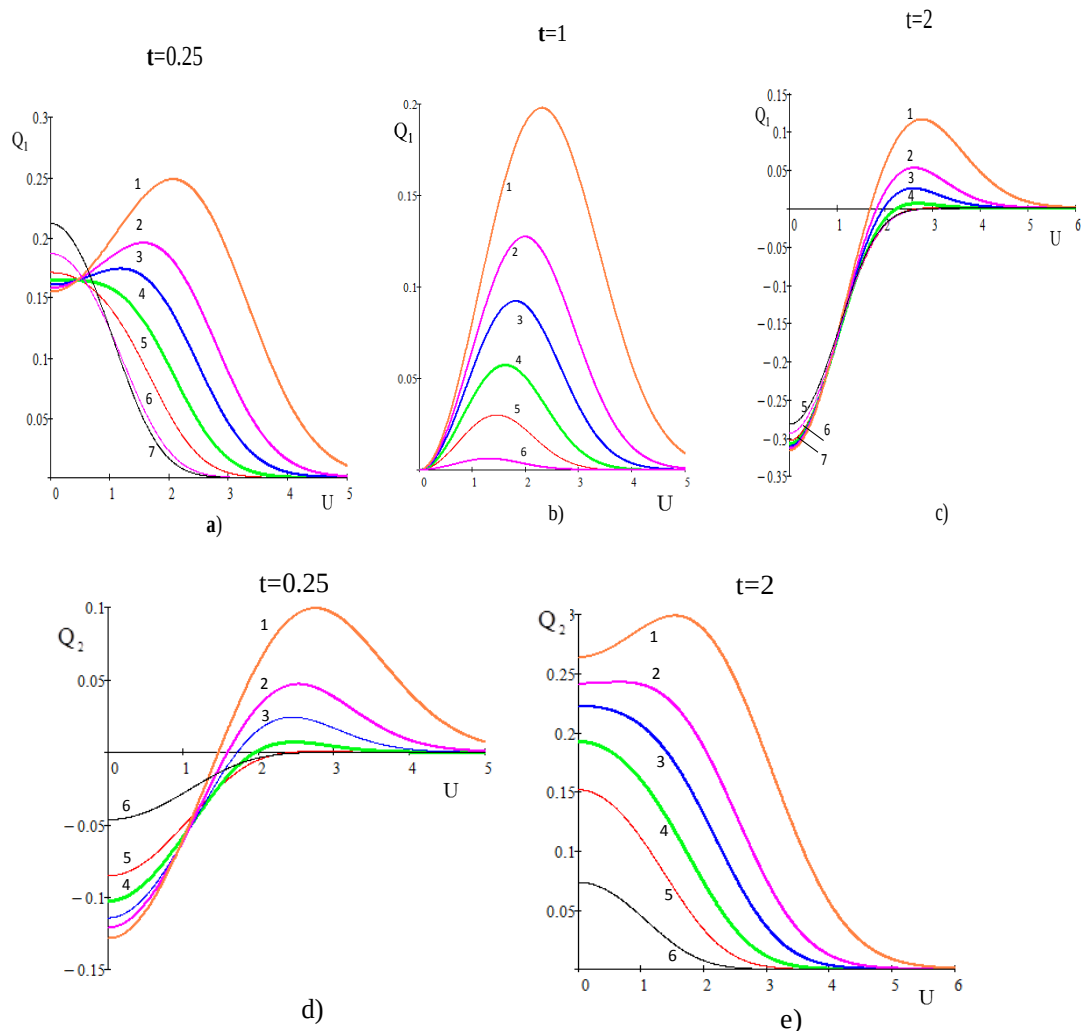


Рисунок 4.17. Поток энергии, передаваемые на внутреннюю и внешнюю цилиндрические поверхности, в зависимости от скорости внешнего цилиндра при различных соотношениях радиусов:

1-6 – $\beta = 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 2, 4$; 7 – $\beta \rightarrow \infty$.

На рис. 4.17 (а, b, d) кривые 1-5 очень близки друг к другу при некоторых значениях U , близких к единице. Это означает, что при этих значениях U и t зависимости Q_1 и Q_2 от β очень слабые. Такая же картина у кривых 1–4 на рис. 4.18а₁. При некоторых значениях β и t зависимость от U очень слабая.

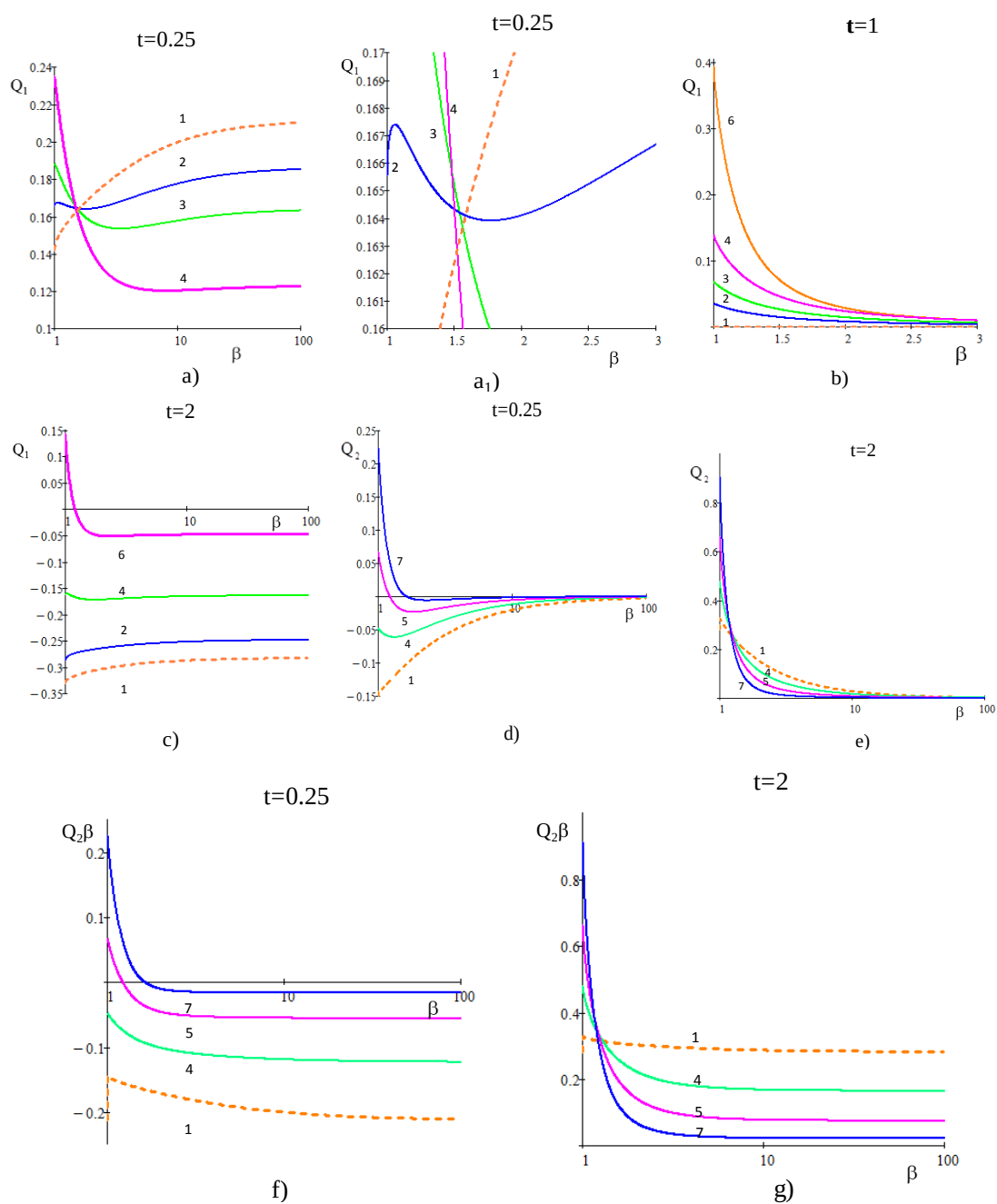


Рисунок 4.18. Поток энергии, передаваемые на внутреннюю и внешнюю цилиндрические поверхности, в зависимости от отношения радиусов при различных скоростях внешнего цилиндра: 1-7 – $U = 0, 0.5, 0.7, 1, 1.5, 1.7, 2$.

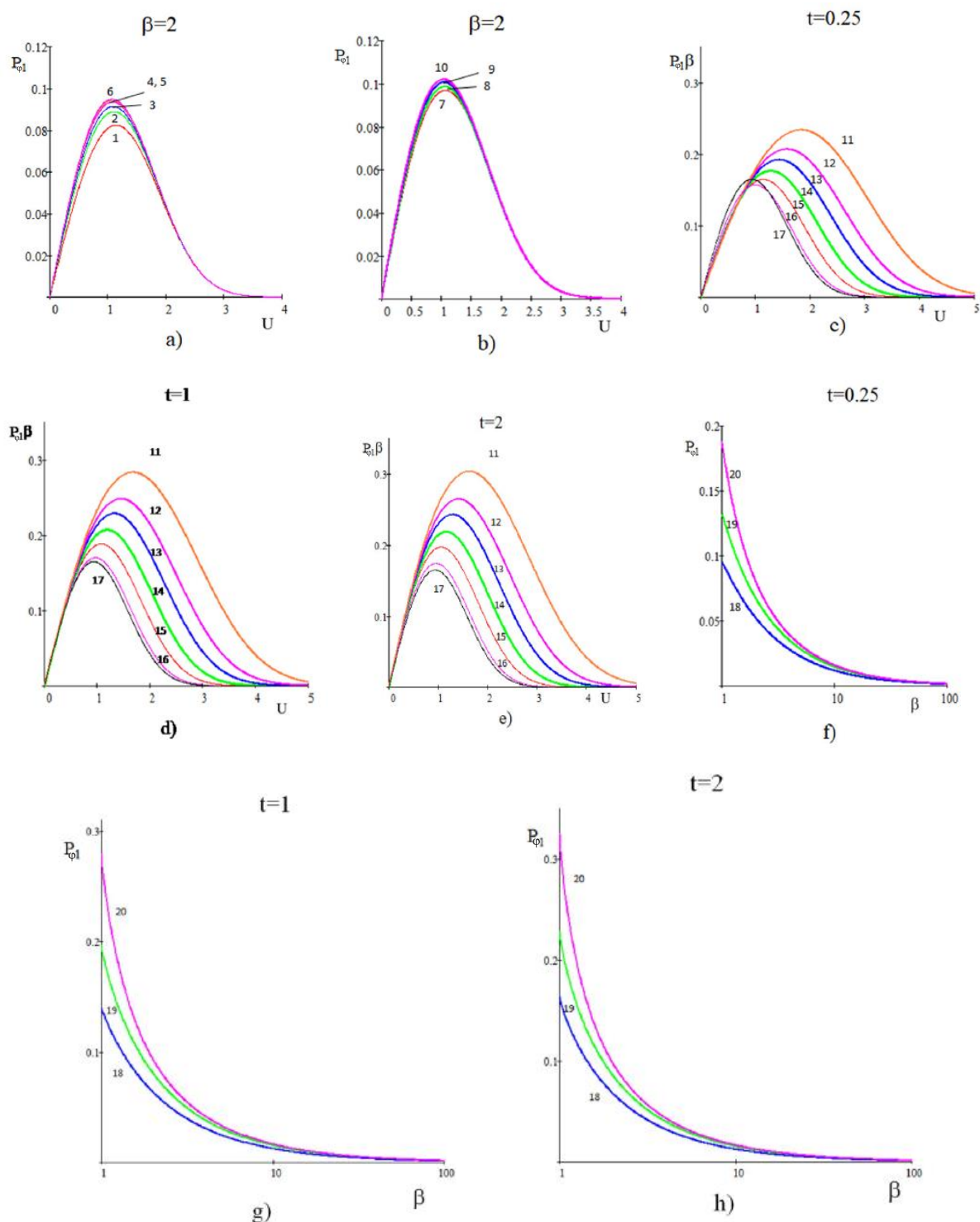


Рисунок 4.19. Поток тангенциального импульса, передаваемый внутренней цилиндрической поверхностью (напряжение сдвига), в зависимости от скорости внешнего цилиндра при различном отношении температур (а, б): 1-10 - $t = 0.25, 0.5, 0.68, 0.9, 1, 1.1, 1.5, 2, 3, 4$; при различной величине отношения радиусов (с, д, е): 11-16 - $\beta = 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 2, 4$; 17 - $\beta \rightarrow \infty$; и в зависимости от отношения радиусов при разных скоростях внешнего цилиндра (ф, г, h): 18-20 - $U = 0.5, 0.7, 1$.

На рис. 4.19 показаны зависимости потоков импульса, передаваемых внутреннему цилиндру, от U и от β . В отличие от зависимости потока энергии от скорости, зависимость касательного напряжения от скорости, как следует из (3.1), немонотонна при любых температурах поверхности. Таким образом, напряжение сдвига всегда достигает максимума при некотором $U = U_{p \max}(\beta, t)$. Однако предельная зависимость $P_{\varphi 1}(\beta, U, t)\beta$ при $\beta \rightarrow \infty$ не зависит от t , и $U_{p \max}(\beta, t) \rightarrow 0.935$ при $\beta \rightarrow \infty$.

Как видно из рис. 4.16, рис. 4.17, и рис. 4.18, различие температур цилиндров может приводить к качественным различиям в зависимостях потоков энергии от скорости и отношения радиусов. Отметим, что разница температур существенно меньше влияет на соответствующие зависимости касательного напряжения, см. рис. 4.19. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 1} P_{\varphi 1}(\beta, U, t) &= \frac{U\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}(1+\sqrt{t})}; & \lim_{U \rightarrow \infty} P_{\varphi 1}(\beta, U, t) &= 0; \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_{\varphi 1}(\beta, U, t)\beta &= \frac{U^3}{2\sqrt{\pi}[\exp(U^2)-1]}. \end{aligned}$$

4.7.2 Переходный режим. Эффект возникновения максимума в зависимости потока энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, от скорости при изменении числа Кнудсена в случае различных температур поверхностей.

Теперь рассмотрим влияние степени разрежения газа на напряжение трения и потоки энергии, передаваемые поверхностям.

Напряжение трения во внутреннем цилиндре (поток импульса, передаваемого поверхности) в зависимости от скорости внешнего цилиндра, показано на рис. 4.20 при различных числах Кнудсена для двух разных температур. Напряжение трения на внешнем цилиндре пропорционально напряжению трения на внутреннем цилиндре, см. (4.6). Потоки энергии, передаваемые внутреннему и внешнему цилиндрам, в зависимости от скорости внешнего цилиндра представлены на рис. 4.21. Зависимости $P_{\varphi 1}(U)$, $Q_1(U)$, полученные путем решения уравнений Навье-Стокса (4.8) - (4.10) с граничными условиями прилипания и граничными условиями скольжения (4.11), сравниваются с зависимостями, полученными методом DSMC при $Kn = 0.05$ на рис. 4.20 и рис. 4.21.

Использование граничных условий скольжения позволяет получить лучшее совпадение с расчетами DSMC. Более того, соответствующие кривые для $Q_1(U)$ и $P_{\varphi 1}(U)$ имеют максимумы, как и результаты расчетов DSMC. Однако при высоких скоростях Kn_1 имеет порядок единицы и более, и зависимости, полученные при $U > 2.5$ с использованием граничных условий скольжения, лишь качественно описывают картину течения.

Как видно из графиков на рис. 4.20, уменьшение числа Кнудсена не меняет кардинальным образом вид зависимости напряжения трения от скорости внешней цилиндрической поверхности. Однако это не относится к потокам энергии, передаваемой цилиндрам, если соответствующая свободномолекулярная зависимость $Q_1(U)$ или $Q_2(U)$ монотонно уменьшается, см. рис. 4.21.

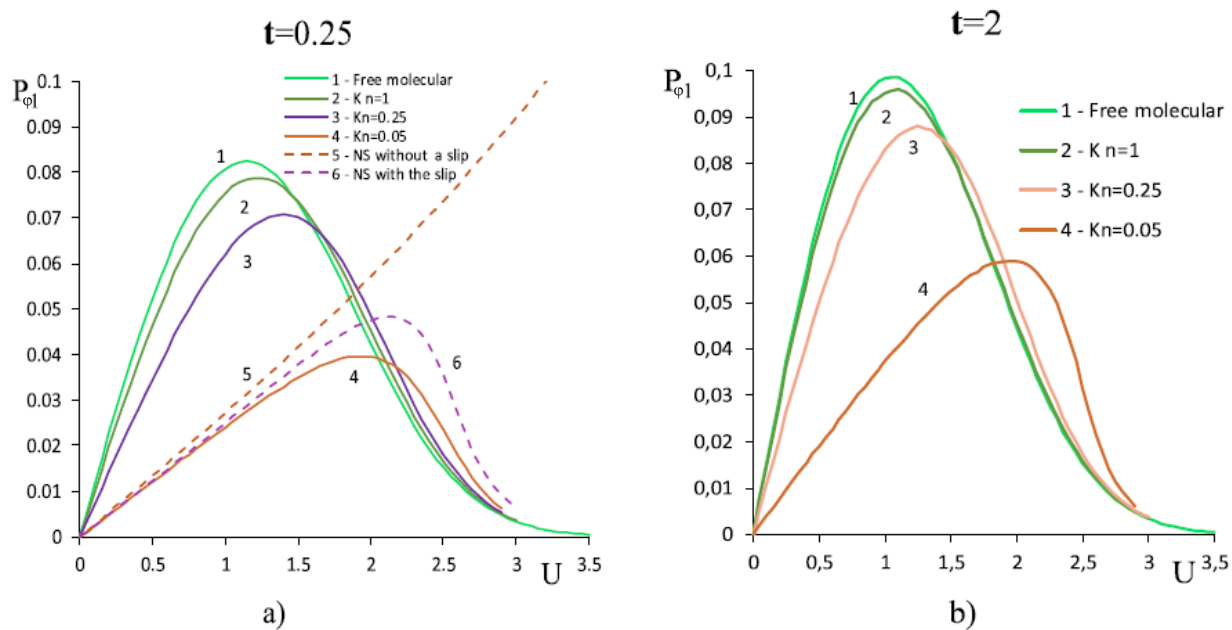


Рисунок 4.20. Напряжение сдвига на внутреннем цилиндре в зависимости от U при разных числах Кнудсена.

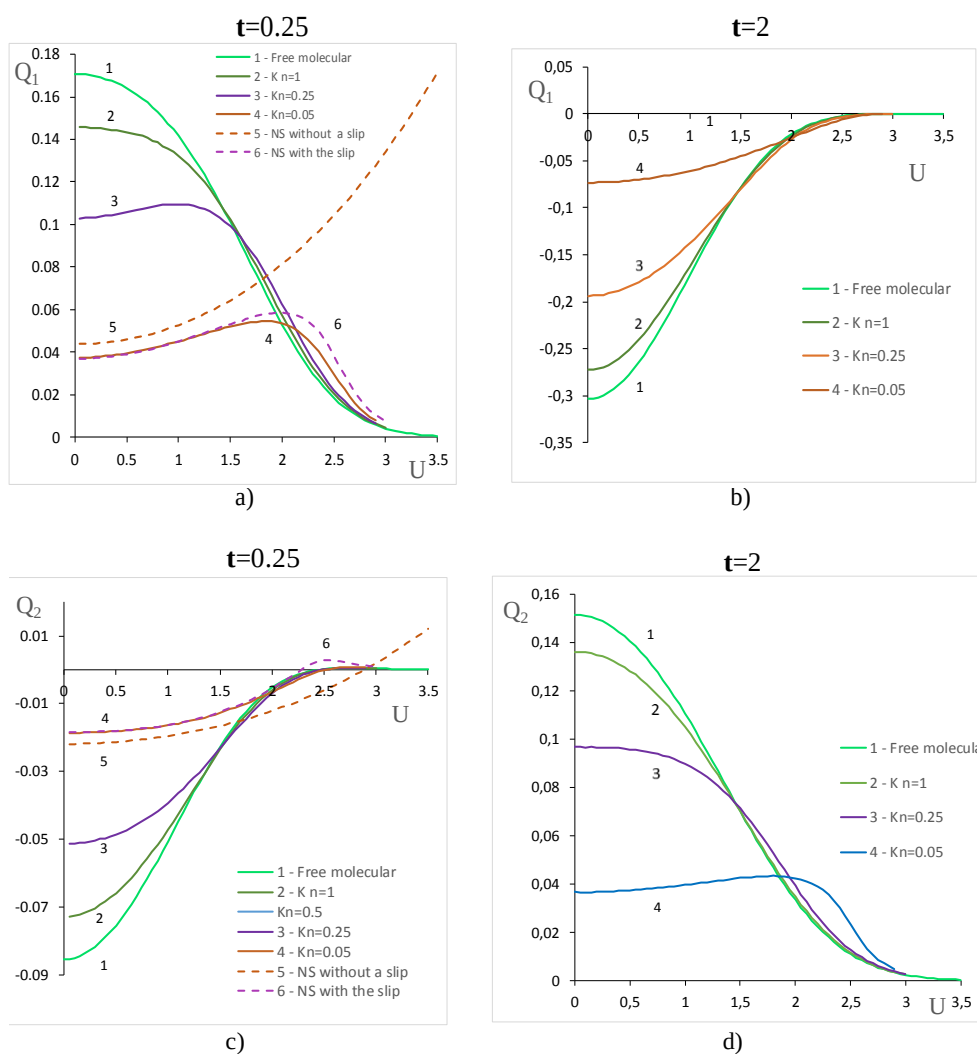


Рисунок 4.21. Поток энергии, передаваемый внутреннему и внешнему цилиндрам в зависимости от U при разных числах Кнудсена.

Действительно, если Kn достаточно мал, функция $Q_1(U)$ сначала (при малых U) возрастает, потому что она близка к сплошнородной зависимости. Затем, если U достаточно велико, $Q_1(U)$ уменьшается из-за сильного увеличения локального числа Кнудсена вблизи внутреннего цилиндра, как и при $t=1$ (см. Раздел 4.2). Следовательно, при Kn меньшем, чем определенное значение, функция $Q_1(U)$ имеет максимум. В соответствующем интервале температур $Q_2(U)$ ведет себя аналогично: если Kn достаточно мал, то $Q_2(U)$ имеет максимум, в противном случае $Q_2(U)$ монотонно убывает.

Таким образом, в Гл. IV показано, что течение Куэтта с неподвижным внутренним цилиндром и вращающимся внешним цилиндром обладает следующими свойствами:

1. В свободномолекулярном и в переходном режиме течения Куэтта зависимости потоков тангенциального импульса и энергии от скорости внешнего цилиндра качественно отличаются от соответствующих зависимостей для навье-стоксового режима. В режиме Навье-Стокса вязкость и теплопроводность не зависят от плотности газа, а напряжение сдвига и тепловой поток увеличиваются по мере увеличения градиентов скорости и температуры. Поэтому, несмотря на то что при высоких скоростях внешнего цилиндра плотность газа около внутреннего цилиндра мала, потоки энергии и импульса монотонно увеличиваются с увеличением скорости. В свободномолекулярных и переходных режимах, начиная с определенного значения скорости, уменьшение потока молекул, падающих на внутренний цилиндр, не компенсируется увеличением количества движения и энергии молекул, отраженных от внешнего цилиндра, и поток тангенциального импульса, передаваемый внутренней поверхности, достигает максимума, а затем уменьшается с увеличением скорости. Таким образом, зависимость напряжения трения от скорости имеет максимум при любой величине отношения температур и любом числе Кнудсена.
2. Поведение потока энергии, передаваемой внутреннему цилиндру, зависит от отношения температур поверхностей и числа Кнудсена. Если отношение температур поверхностей находится в определенном диапазоне, поток энергии, передаваемый внутренней поверхности, монотонно уменьшается с увеличением скорости внешнего цилиндра; в противном случае зависимость потока энергии от скорости может иметь максимум. Это зависит от числа Кнудсена. Уменьшение числа Кнудсена приводит к изменению формы зависимости потока энергии,

передаваемой поверхности, от скорости внешнего цилиндра с монотонного на немонотонный, имеющий максимум.

3. При достаточно малых числах Кнудсена, вычисляемых по средней плотности и достаточно больших скоростях внешнего цилиндра слаборазреженный режим течения вблизи внутреннего цилиндра с ростом скорости сменяется режимом свободномолекулярного течения, практически скачком. Таким образом имеет место эффект очень резкого уменьшения касательного напряжения и потоков энергии, передаваемых цилиндрам, если число Кнудсена достаточно мало, а скорость вращения внешнего цилиндра достаточно велика.

4. Если радиус внешнего цилиндра незначительно превышает радиус внутреннего цилиндра, то зависимость абсолютной величины потока нормального импульса, передаваемого внутреннему цилиндру, имеет максимум по скорости вращения внешнего цилиндра.

5. Поток энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, в свободномолекулярном режиме меняет знак при изменении отношения радиусов цилиндров.

6. В свободномолекулярном режиме отношение потоков полной энергии, передаваемой цилиндрам, зависит только от цилиндрического числа Эккерта, а не от трех параметров, как потоки энергии, передаваемой каждой поверхности по-отдельности.

ГЛАВА V. ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА С НЕПОДВИЖНЫМ ВНЕШНИМ ЦИЛИНДРОМ.

Рассмотрим теперь случай, когда внешний цилиндр неподвижен $u_2 = 0$, внутренний цилиндр вращается с линейной скоростью u_1 , а температуры цилиндров различны. Течение с неподвижным внешним цилиндром изучалось в [132-135, 137-140, 142, 143, 145-147, 151, 153-155]. Устойчивость цилиндрического течения Куэтта разреженного газа и переход к вихревому течению Тейлора-Куэтта исследовались в [72, 143, 156-159].

Целью данной главы является исследование влияния вращения внутреннего цилиндра на потоки энергии и импульса, передаваемые поверхностям в течении Куэтта разреженного газа с неподвижным внешним цилиндром. Рассматриваются различные режимы течения при разных температурах поверхностей и различных значениях числа Кнудсена. Проводится сравнение цилиндрических течений, вызванных вращением внутреннего и внешнего цилиндров.

5.1 Эффекты максимума в зависимостях потоков тангенциального импульса и энергии, передаваемой цилиндрам от отношения радиусов цилиндров в свободномолекулярном режиме.

В свободномолекулярном цилиндрическом течении Куэтта с неподвижным внешним цилиндром безразмерные потоки молекул N_i , падающих на внутреннюю ($i = 1$) и внешнюю ($i = 2$) поверхности, а также потоки касательного импульса $P_{\phi i}$ и энергии Q_i , передаваемые поверхностям (5.1) - (5.3) были получены В.Ю. Александровым в [103]

$$N_1(\beta, U_1, t) = \frac{n_1 c_1}{n_{av} c_2} = \frac{1}{[s_1(\beta, U_1 t^{-1/2}) t^{-1/2} + s_2(\beta)]}, \quad N_2 = \frac{n_2 c_2}{n_{av} c_2} = N_1, \quad (5.1)$$

$$P_{\varphi 1} = -\frac{N_1 U_1}{2\sqrt{\pi}}, P_{\varphi 2} = \frac{P_{\varphi 1}}{\beta^2}, \quad (5.2)$$

$$Q_1 = \frac{N_1}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{U_1^2}{2} - (t-1) \right], Q_2 = \frac{N_1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left[\frac{U_1^2}{2} + (t-1) \right] \quad (5.3)$$

где

$$s_1(\beta, U_1, t) = \frac{\exp(-t^{-1}U_1^2) \left(\beta^2 \arcsin(1/\beta) + \sqrt{\beta^2 - 1} - \pi/2 \right)}{\pi(\beta^2 - 1)} +$$

$$\frac{2t \exp(-t^{-1}U_1^2)}{\sqrt{\pi}U_1^2(\beta^2 - 1)} \left[\int_0^{\frac{U_1}{\sqrt{t}}} \left(\sqrt{\frac{\beta^2 U_1^2}{t} - x^2} - \sqrt{\frac{U_1^2}{t} - x^2} \right) x e^{x^2} \operatorname{erf}(x) dx \right]$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} s_1(\beta, U_1, t) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} s_1(\beta, U_1, t) = 0; \quad \lim_{U_1 \rightarrow \infty} s_1(\beta, U_1, t) = 0;$$

$$\beta \rightarrow 1 \quad \beta \rightarrow \infty \quad U_1 \rightarrow \infty$$

$$s_2(\beta) = \frac{\pi/2 - \beta^2 \arcsin(\beta^{-1}) - \sqrt{\beta^2 - 1}}{\pi(\beta^2 - 1)} + 1,$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} s_2(\beta) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} s_2(\beta) = 1;$$

$$\beta \rightarrow 1 \quad \beta \rightarrow \infty$$

$$t = \frac{T_1}{T_2}, \quad \beta = \frac{r_2}{r_1}, \quad U_1 = \frac{u_1}{c}, \quad c = c_2 = \sqrt{2RT_2},$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned} N_1(\beta, U_1, t) &\rightarrow 2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^{-1}, & N_1(\beta, U_1, t) &\rightarrow 1, & N_1(\beta, U_1, t) &\rightarrow s_2^{-1}(\beta) \\ \beta &\rightarrow 1, & \beta &\rightarrow \infty, & U_1 &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$P_{\varphi 1}(\beta, U_1, t) \rightarrow \infty; \quad P_{\varphi 2}(\beta, U_1, t) \rightarrow \infty; \quad Q_1(\beta, U_1, t) \rightarrow \infty; \quad Q_2(\beta, U_1, t) \rightarrow \infty;$$

$$U_1 \rightarrow \infty \quad U_1 \rightarrow \infty \quad U_1 \rightarrow \infty. \quad U_1 \rightarrow \infty.$$

Из (4.29) следует, что $Q_2\beta/Q_1=1$ при $t=1$. Легко убедиться, что при $t \neq 1$

$$\frac{Q_2\beta}{Q_1} = Q(\text{Ec}(t, \beta, U_1)) \quad \text{if } t < 1, \quad (5.5)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2\beta} = Q(\text{Ec}(t, \beta, U_1)) \quad \text{if } t > 1. \quad (5.6)$$

$$Q(\text{Ec}) = -1 + \frac{2c_p|\text{Ec}|}{4R + c_p|\text{Ec}|}, \quad (5.7)$$

$$\text{где } \text{Ec} = u_1^2 / [c_p(T_1 - T_2)], c_p = 5R/2.$$

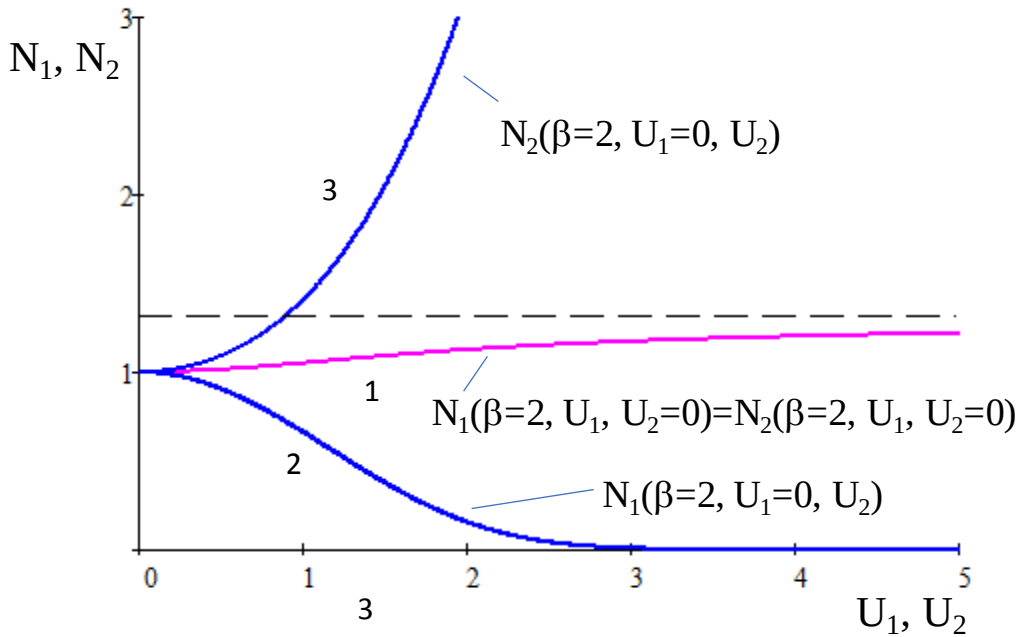


Рисунок 5.1. Безразмерные потоки молекул, падающие на внутреннюю N_1 (1,2) и внешнюю N_2 (1,3) цилиндрическую поверхность для двух различных цилиндрических задач Куэтта в зависимости от скоростей внутреннего U_1 (1) и внешнего U_2 (2,3) цилиндра при $T_1 = T_2$.

Таким образом, в случае неподвижного внешнего цилиндра отношение потоков энергий зависит только от числа Эккерта и совпадает с отношением потоков энергий, передаваемых пластинам в плоской задаче Куэтта. Оно

также совпадает с аналогичным отношением для течения Куэтта с неподвижным внешним цилиндром, у которого $|E_c|$ в β раз больше, чем у рассматриваемого течения с неподвижным внутренним цилиндром.

Рассмотрим подробно потоки тангенциального импульса и энергии, передаваемые цилиндрам (5.2) - (5.3), и сравним их с соответствующими потоками в течении Куэтта с неподвижным внутренним цилиндром. В последнем случае используем аналитические выражения для потоков (4.20) - (4.21).

На рис. 5.1 показаны зависимости потоков молекул, падающих на внутренний и внешний цилиндры, от соответствующих скоростей цилиндров. Как видно из рис. 5.1, зависимость $N_1(U_1)$ принципиально отличается от зависимости $N_1(U_2)$. В самом деле, $N_1(U_1)$ является ограниченной монотонно возрастающей функцией, тогда как $N_1(U_2)$ убывает, стремясь к нулю. Это связано с тем, что во втором случае, в отличие от первого, с увеличением скорости вращения поток молекул, падающих на внутренний цилиндр, быстро уменьшается за счет захвата молекул вращающимся внешним цилиндром (из-за увеличения тангенциальной составляющей скоростей отраженных молекул, см. Гл. IV. Как следует из (5.1) при $t = 1$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} N_1(\beta, U_1, 1) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} N_1(\beta, U_1, 1) = 1$$

Следовательно, в случае неподвижного внешнего цилиндра с $T_2 = T_1$ зависимость падающего на цилиндр молекулярного потока от отношения радиусов должна иметь экстремум. На рис. 5.2 показан поток молекул, падающих на внутренний цилиндр в зависимости от отношения радиусов в случае неподвижного внешнего цилиндра и в случае неподвижного внутреннего цилиндра при $T_1 = T_2$. Как видно из рис. 5.2, в первом случае зависимость $N_1(\beta)$ имеет максимум, а во втором $N_1(\beta)$ монотонно убывает.

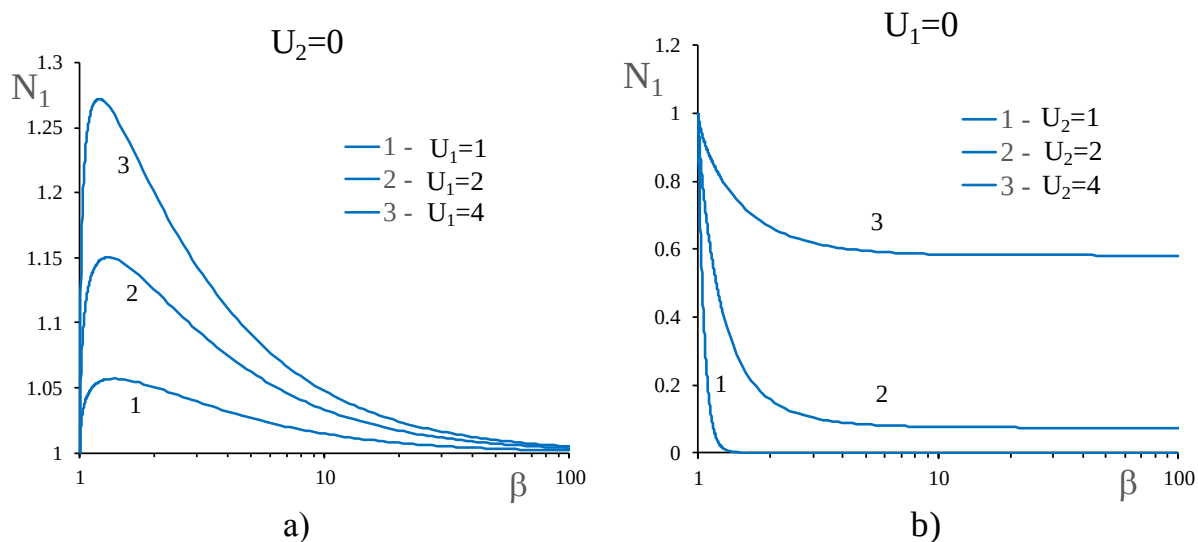


Рисунок 5.2. Безразмерные потоки молекул, попадающих на внутреннюю цилиндрическую поверхность N_1 для двух различных цилиндрических задач Куэтта, в зависимости от отношения радиусов β при $T_1 = T_2$ и различных скоростях цилиндра; а) внешний цилиндр неподвижен, б) внутренний цилиндр неподвижен.

Напряжение трения и потоки энергии, передаваемые цилиндрам, пропорциональны величинам потоков молекул (см. (4.20) и (4.21)), поэтому зависимости $P_{\varphi i}(\beta), Q_i(\beta)$ (где $i = 1, 2$) также имеют максимумы при условии, что $t = 1$.

5.2 Неограниченное возрастание потоков тангенциального импульса и энергии, передаваемых цилиндрам с увеличением скорости вращения внутреннего цилиндра

5.2.1 Свободномолекулярный режим

На рис. 5.3 показаны потоки импульса, передаваемые внутреннему и внешнему цилиндрам, в зависимости от соответствующих скоростей и отношения радиусов в случаях неподвижного внешнего (а,с) и неподвижного внутреннего (b,d) цилиндров. Как видно из рис. 5.3а, в зависимость $P_{\varphi 1}(U_1)$ принципиально отличается от зависимости $P_{\varphi 1}(U_2)$. Действительно, $|P_{\varphi 1}(U_1)|$ монотонно увеличивается, а $P_{\varphi 1}(U_2)$ с увеличением скорости сначала увеличивается, а затем, достигнув максимума, уменьшается, стремясь к нулю. Это объясняется тем, что во втором случае, в отличие от первого, с увеличением скорости поток молекул, падающих на внутренний цилиндр $N_1(U_2)$, экспоненциально быстро уменьшается. Зависимость $P_{\varphi 1}(\beta)$ при $U_2 = 0$ также кардинально отличается от $P_{\varphi 1}(\beta)$ при $U_1 = 0$. Эти функции имеют существенно разные пределы при $\beta \rightarrow \infty$. В последнем случае $P_{\varphi 1}(\beta)$ стремится к 0 при любых температурах, см. рис. 5.3d, а в первом - к не зависящим от температуры ненулевым константам, см. рис. 5.3с. Это объясняется следующим образом. Поток импульса, передаваемого цилиндру, равен разности потоков импульса, падающих и отраженных молекул (в системе координат, связанной с поверхностью цилиндра). Во всех случаях функция распределения отраженных молекул по скоростям (в системе координат, связанной с точкой на поверхности внутреннего цилиндра) является полумаксвелловской, и, следовательно, полный тангенциальный поток импульса отраженных молекул равен нулю. В случае неподвижного внешнего цилиндра функция распределения падающих молекул, падающих на внутренний цилиндр, совпадает с функцией распределения молекул по скоростям в плоском газовом потоке, движущемся со скоростью U_1 и плотностью n_2 . При $\beta \rightarrow \infty$ доля молекул, отраженных от внутреннего цилиндра в общем потоке молекул, попадающих на некоторую точку поверхности внешнего цилиндра, стремится к нулю и

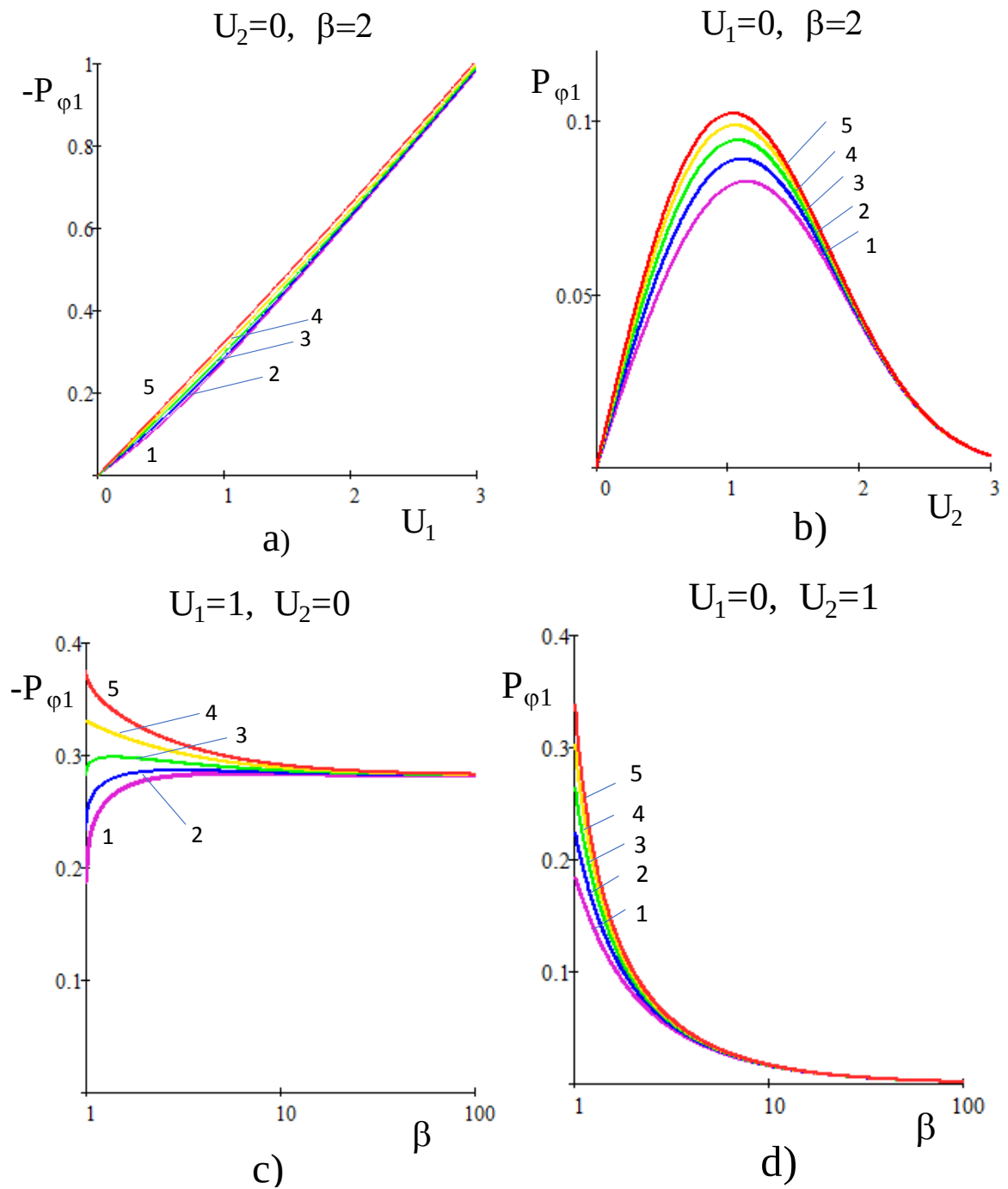


Рисунок 5.3. Поток импульса, передаваемый внутренней цилиндрической поверхности, для двух различных цилиндрических задач Куэтта, в зависимости от скорости внутреннего U_1 (a) и внешнего U_2 (b) цилиндра и от отношения радиусов β при различных отношениях температур: 1-5 - $t = 0,25, 0,5, 1, 2, 4$;

значит

$$n_2 \rightarrow n_{av} \text{ при } \beta \rightarrow \infty.$$

Следовательно, поток тангенциального импульса, передаваемого внутреннему цилиндру

$$P_{\varphi 1} \rightarrow -\frac{U_1}{2\sqrt{\pi}} \text{ при } \beta \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, в случае неподвижного внутреннего цилиндра тангенциальная составляющая скорости молекул, падающих на произвольную точку на поверхности внутреннего цилиндра, стремится к нулю при $\beta \rightarrow \infty$, а функция распределения молекул, попадающих в эту точку, стремится к зеркально симметричной. Следовательно, суммарный касательный импульс, передаваемый внутреннему цилиндру в любой точке поверхности, стремится к нулю.

Зависимости $Q_1(U_1)$, $Q_1(U_2)$, $Q_2(U_1)$ и $Q_2(U_2)$ показаны на рисунках 5.4 и 5.5. В случае неподвижного внешнего цилиндра поток энергии, передаваемой цилиндру, как и поток импульса при любом температурном отношении t монотонно увеличивается с увеличением скорости вращения внутреннего цилиндра, см. рис. 5.4а и рис. 5.5а. В случае неподвижного внутреннего цилиндра $Q_1(U_2)$ и $Q_2(U_2)$ после достижения максимума или без него стремятся к нулю с увеличением скорости вращения внешнего цилиндра, см. рис. 5.4b и рис. 5.5b. Зависимости $Q_1(\beta)$ и $Q_2(\beta)\beta$ для случаев закрепленных внешнего (с) и внутреннего (d) цилиндров показаны на рис. 5.4с,d и рис. 5.5с,d. Отметим, что в случае вращения внутреннего цилиндра, в отличие от случая вращения внешнего цилиндра, зависимости $Q_1(\beta)$ и $Q_2(\beta)$ всегда имеют постоянный знак, а отношение радиусов цилиндров не влияет на отношение температур, при котором поток энергии, передаваемый цилиндру, равен нулю.

Условия равенства нулю потоков энергии, передаваемых на граничные поверхности, одинаковы для цилиндрической задачи Куэтта с неподвижным внешним цилиндром и для плоской задачи Куэтта. А именно,

$$Q_1 = 0 \text{ при } T_1 = T_2 + u_1^2 / 4R, \quad (5.8)$$

$$Q_2 = 0 \text{ при } T_2 = T_1 + u_1^2 / 4R. \quad (5.9)$$

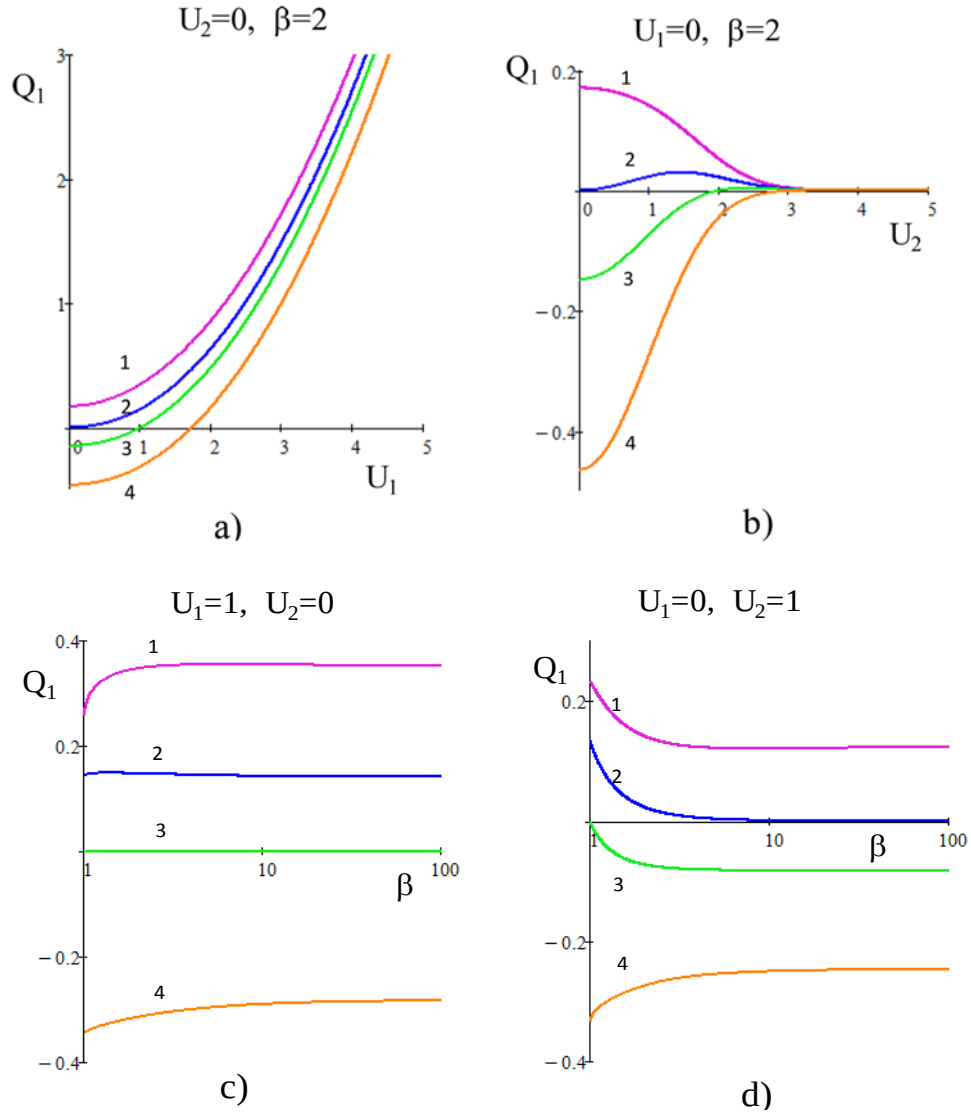


Рисунок 5.4. Потоки энергии Q_1 , передаваемые на внутреннюю цилиндрическую поверхность для двух различных свободномолекулярных цилиндрических задач Куэтта, в зависимости от скоростей внутреннего U_1 (a) и внешнего U_2 (b) цилиндра и в зависимости от отношения радиусов β (c, d) при различных отношениях температур: 1-4 - $t = 0,25, 1, 1,5, 2,5$.

Объясняется этот факт следующим образом. Используя (4.2), легко получить поток энергии молекул, отраженных от вращающегося внутреннего цилиндра, в фиксированной системе координат [71]

$$E^\uparrow(r_1) = \frac{mn_1c_1}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{u_1^2}{2} + 2RT_1 \right), \text{ где } c_1 = \sqrt{2RT_1}$$

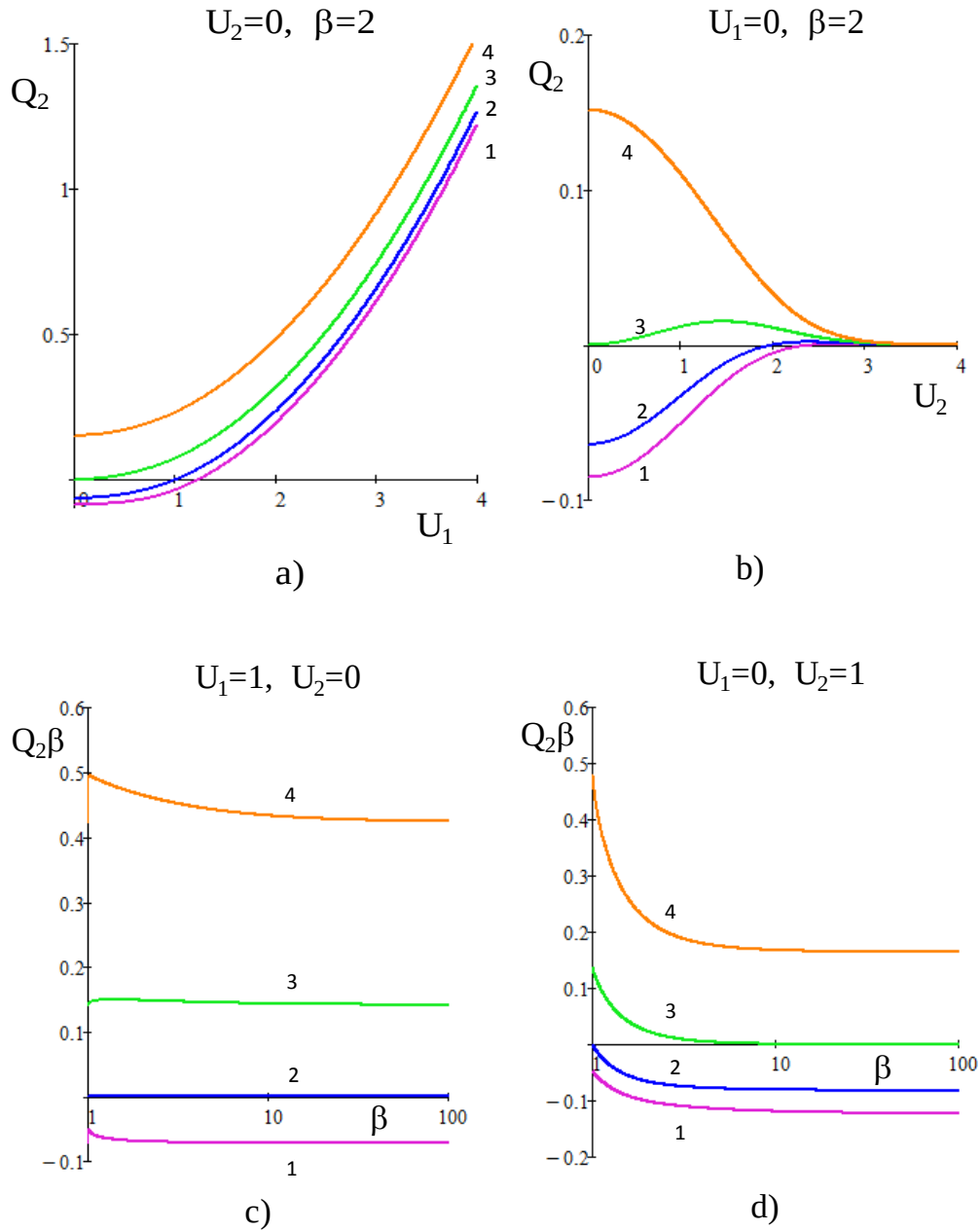


Рисунок 5.5. Поток энергии Q_2 (a, b) и поток полной энергии $Q_2\beta$ (c, d), передаваемые на внешнюю цилиндрическую поверхность для двух различных цилиндрических задач Куэтта в зависимости от скоростей внутреннего U_1 (a) и внешнего U_2 (b) цилиндра и от отношения радиусов β (c, d) при различных отношениях температур: 1-4 – $t=0.25, 0.5, 1, 2$.

Попадающие на поверхность молекулы падают на нее под углами от 0 до π . В свободномолекулярном режиме функция распределения по скоростям постоянна вдоль траектории движения молекул [72]. Следовательно, используя (4.3) и условие непроницаемости, получаем в неподвижной

системе координат поток энергии падающих на внутреннюю поверхность молекул

$$E^{\downarrow}(r_1) = \frac{mn_2cRT_2}{2\pi^{1/2}} = \frac{mn_1c_1RT_2}{2\pi^{1/2}}$$

Таким образом, в неподвижной системе координат полный поток энергии молекул при $r = r_1$

$$E(r_1) = \frac{mn_1c_1}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{u_1^2}{2} + 2RT_1 - 2RT_2 \right)$$

Используя (5) и учитывая, что внешний цилиндр покоится, имеем

$$E_2 = E(r_2) = \frac{mn_1c_1}{2\pi^{1/2}\beta} \left(\frac{u_1^2}{2} + 2RT_1 - 2RT_2 \right)$$

и, следовательно, (5.9).

Поток импульса, передаваемого в любой точке внутренней поверхности [71]

$$P_{n\phi 1} = \frac{mn_1c_1u_1}{2\pi^{1/2}}$$

Используя (4.7), получаем

$$E_1 = -\beta E_2 + P_{n\phi 1}u_1 = \frac{mn_1c_1}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{u_1^2}{2} - 2RT_1 + 2RT_2 \right)$$

и, следовательно, (5.8).

Зависимости нормальных потоков импульса, передаваемого внутреннему P_{r1} и внешнему P_{r2} цилиндрам, от скоростей соответствующих цилиндров показаны на рис. 5.6 при $t = 1$. В случае свободномолекулярного течения Куэтта с неподвижным внешним цилиндром нормальный поток импульса, передаваемого внутреннему цилиндру,

$$P_{r1}(\beta, U_1, t) = \frac{N_1(\beta, U_1, t)(1 + t)}{4}$$

монотонно увеличивается с увеличением его скорости, см. (5.4)). Как видно

из рис. 5.6 зависимости потоков нормального импульса, как и потоков тангенциального импульса для рассматриваемых течений Куэтта отличаются кардинальным образом. Это вызвано тем, что центробежные силы играют различную роль в формировании рассматриваемых течений.

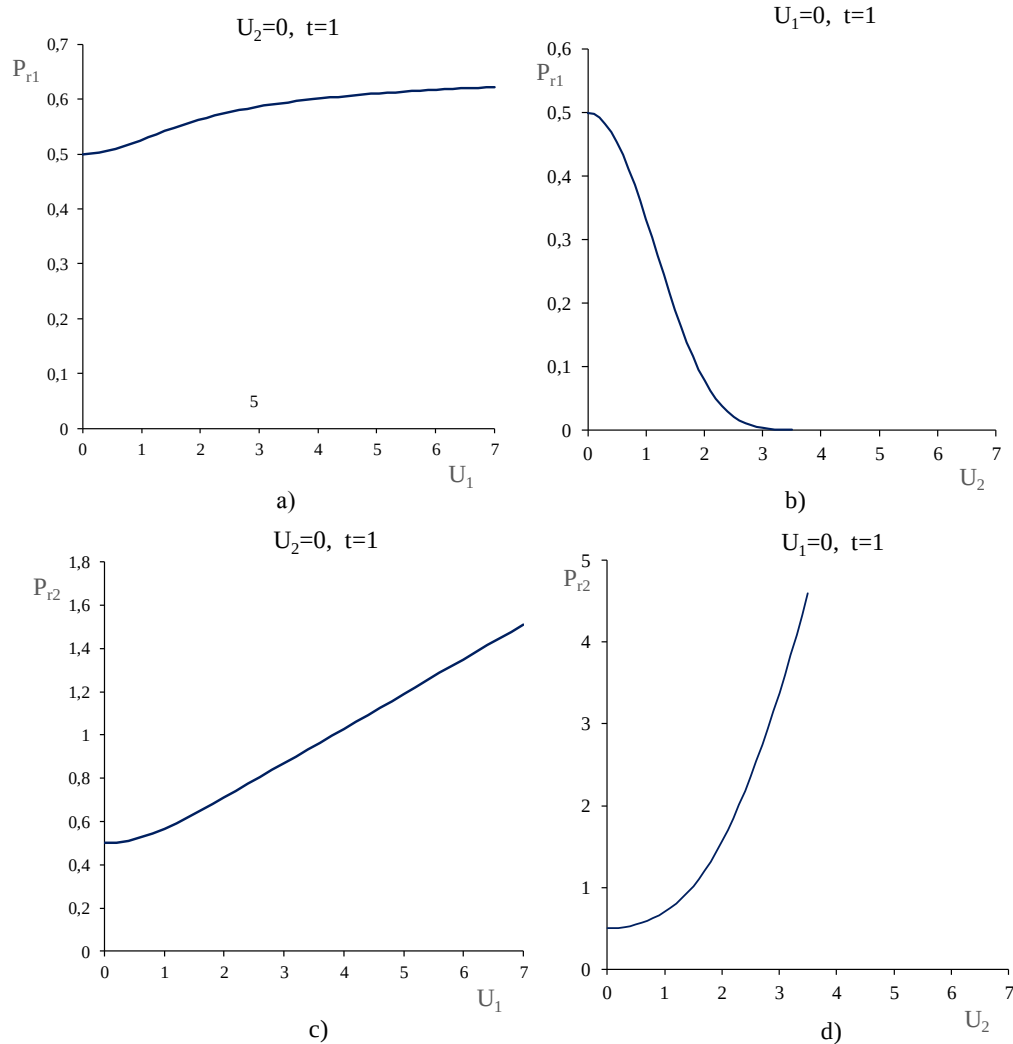


Рисунок 5.6. Свободномолекулярные нормальные потоки импульса P_{r1} и P_{r2} передаваемые на внутреннюю (a, b) и внешнюю (c, d) цилиндрические поверхности для цилиндрических течений Куэтта с неподвижным внешним цилиндром (a, c) и с неподвижным внутренним цилиндром (b, d) в зависимости от скоростей внутреннего и внешнего цилиндра соответственно $\beta = 2$.

5.2.2 Переходный режим

Теперь рассмотрим влияние числа Кнудсена на напряжение трения и потоки энергии, передаваемой поверхностям. В [143] исследована устойчивость цилиндрического течения Куэтта разреженного газа с вращающимся внутренним цилиндром. Результаты исследований, проведенных в [143], показывают, что при $t=1$ и $Kn \geq 0.04$ течение устойчиво. В дальнейшем стационарное цилиндрическое течение Куэтта с вращающимся внутренним цилиндром исследуется при $Kn \geq 0.04$ (для $t=1$ и $t=2$) и при $Kn \geq 0.2$ (для $t=0.25$).

Напряжение сдвига во внутреннем цилиндре и потоки энергии, передаваемые цилиндрам, в зависимости от скорости цилиндра для двух различных цилиндрических задач Куэтта (с вращающимся внутренним цилиндром и с вращающимся внешним цилиндром) представлены на рис. 5.7-5.9 при разных числах Кнудсена и разных температурах. В переходном режиме, а также в свободномолекулярном режиме зависимости $P_{\phi 1}(U_1)$, $Q_1(U_1)$ и $Q_2(U_1)$ принципиально отличаются от $P_{\phi 1}(U_2)$, $Q_1(U_2)$ и $Q_2(U_2)$. Это связано с кардинальным различием зависимостей молекулярных потоков, падающих на внутренний цилиндр, от скорости вращающегося цилиндра, т.е. с различием между $N_1(U_1)$ и $N_1(U_2)$, см. рис. 5.1.

Зависимости отношений потоков импульса $P_{\phi 1}$ и энергии Q_1 к их свободномолекулярным значениям $P_{\phi 1 fm}$ и $Q_{1 fm}$ от скоростей соответствующих цилиндров показаны на рис. 5.10 при $t=1$. В плоском течении Куэтта при одинаковой температуре пластин эти значения совпадают [42,60]. Как видно из рис. 5.10, для обоих цилиндрических течений в переходном режиме эти отношения близки друг к другу. В случае вращения внутреннего цилиндра эти отношения слабо зависят от скорости

вращения цилиндра (при $U_1 \leq 3.5$). Однако в случае вращения внешнего цилиндра зависимость очень существенная.

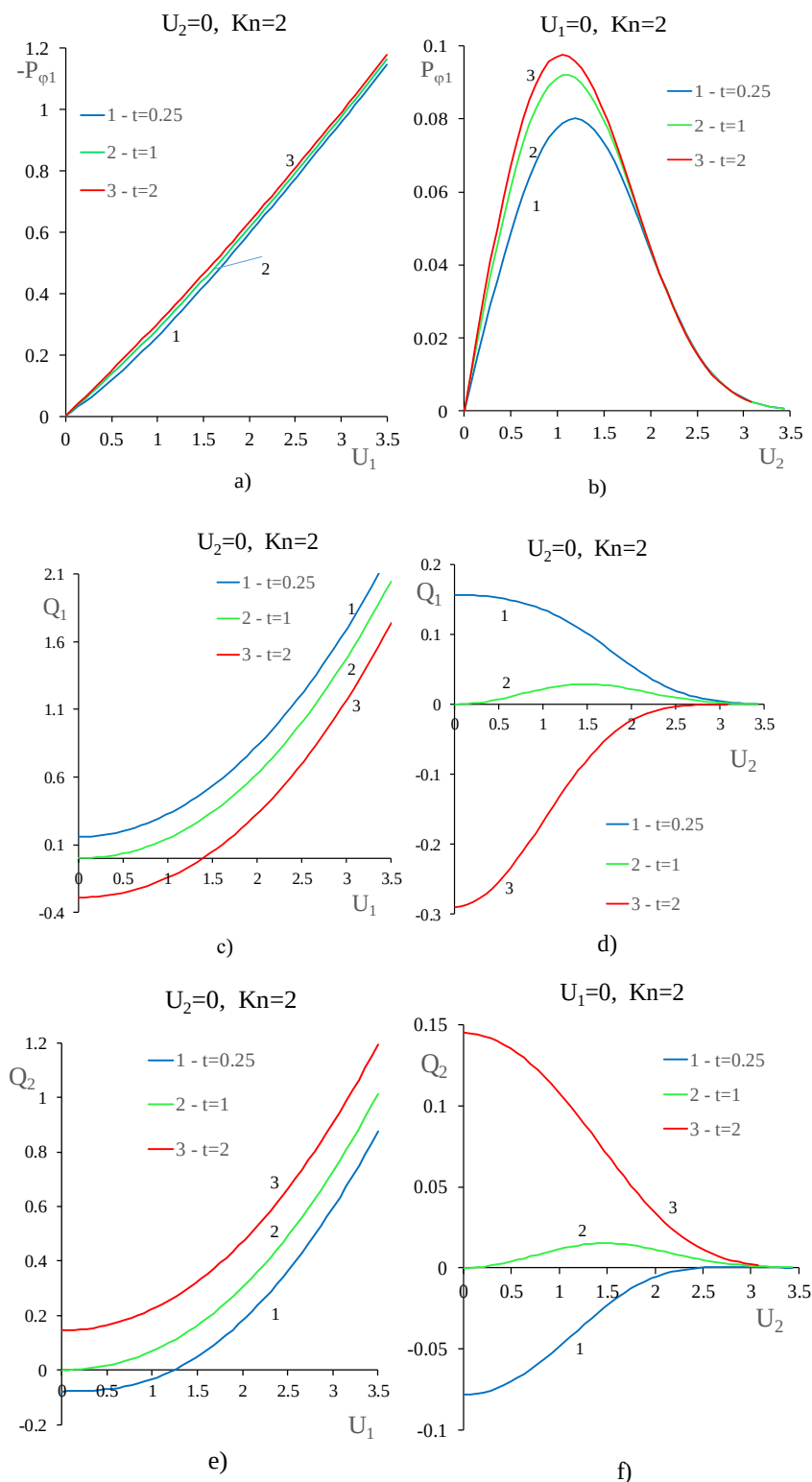


Рисунок 5.7. Потoki импульса (a, b) и потоки энергии (c-f), передаваемые на внутреннюю (a-d) и внешнюю (e, f) цилиндрические поверхности, для двух различных цилиндрических задач Куэтта в зависимости от скоростей внутреннего U_1 и внешнего цилиндров U_2 при $Kn = 2$, $\beta = 2$ и различных отношениях температур: 1-3 - $t = 0,25, 1, 2$.

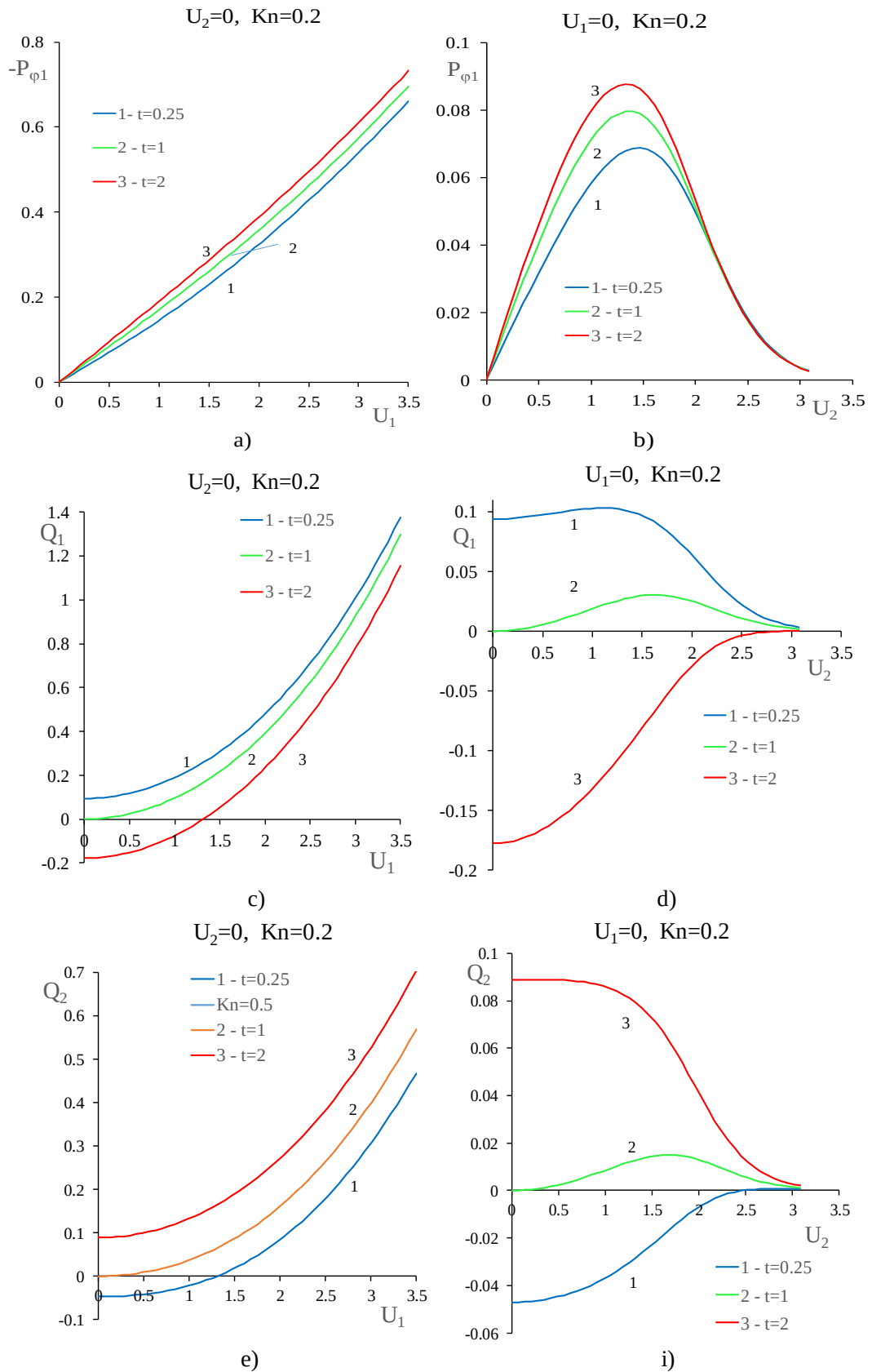


Рисунок 5.8. Потoki импульса (a, b) и энергии (c-f), передаваемые внутренней (a-d) и внешней (e, f) цилиндрическим поверхностям, для двух различных цилиндрических задач Куэтта в зависимости от скоростей внутреннего и внешнего цилиндров при $Kn = 0.2$, $\beta = 2$ и различной температуре: 1-3 – $t = 0.25, 1, 2$.

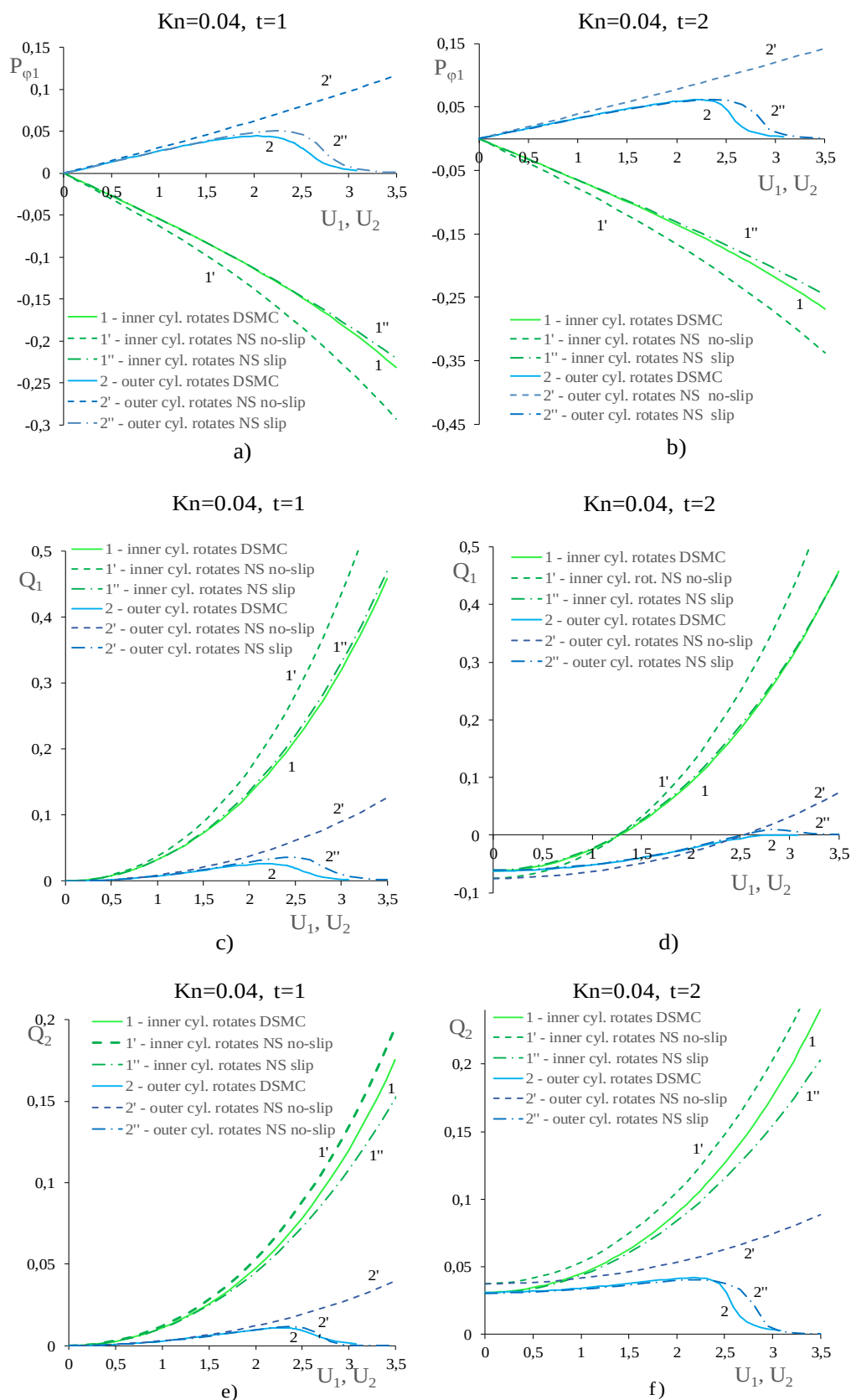


Рисунок 5.9. Поток импульса (а-с) и потоки энергии (d-i), передаваемые на внутреннюю (а-f) и внешнюю (g-i) цилиндрические поверхности, для двух различных цилиндрических задач Куэтта в зависимости от скоростей внутреннего U_1 и внешнего U_2 цилиндров при $Kn=0.04$, $\beta=2$ и различных отношениях температур: 1-2 – $t=1, 2$.

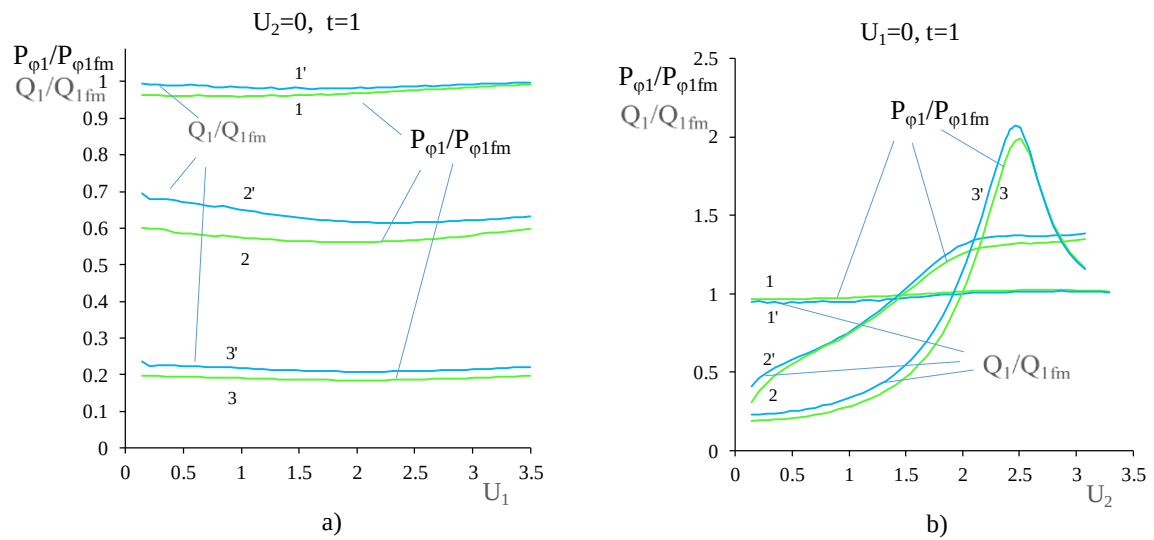


Рисунок 5.10. Отношение потоков тангенциального импульса (1,2,3) и энергии (1', 2', 3'), передаваемых внутренним цилиндрическим поверхностям, к их свободномолекулярным значениям в зависимости от скоростей внутреннего U_1 и внешнего U_2 цилиндра при $\beta = 2$ и различных числах Кнудсена: 1,1'- $Kn = 2$; 2,2'- $Kn = 0.2$; 3,3' - $Kn = 0.04$ а) $U_2 = 0$, б) $U_1 = 0$.

5.3 Эффект минимума потока нормального импульса, передаваемого вращающемуся внутреннему цилиндру в переходном режиме

В случае $Kn \ll 1$ зависимость нормального потока импульса, передаваемого внутреннему цилиндру, принципиально отличается от аналогичной зависимости в свободномолекулярном режиме. Как видно из рис. 5.11a (кривые 3 и 4), увеличение U_1 сначала приводит к уменьшению P_{r1} , а затем, достигнув минимума, P_{r1} снова увеличивается. Это имеет следующее физическое объяснение. Характер зависимости $P_{r1}(U_1)$ является результатом взаимодействия двух эффектов: центробежного и диссипативного. При $Kn \ll 1$ течение газа между цилиндрами описывается уравнениями Навье-Стокса для сжимаемой жидкости. В случае кругового движения существует радиальный градиент давления, при котором давление и плотность газа около внутреннего цилиндра меньше, чем у внешнего цилиндра (центробежный эффект). Увеличение угловой скорости внутреннего цилиндра способствует уменьшению плотности и давления (нормального потока количества движения, передаваемого цилиндру) у его поверхности. Параллельно с этим из-за увеличения напряжения трения происходит усиление процесса преобразования кинетической энергии макроскопического движения газа в тепловую, сопровождающийся повышением температуры газа. Однако влияние этого эффекта на увеличение нормального напряжения ослабляется за счет уменьшения плотности газа. Как видно из рис. 5.11a, первоначально центробежный эффект преобладает над диссипативным. С уменьшением плотности локальное число Кнудсена Kn_1 вблизи внутреннего цилиндра увеличивается. При дальнейшем увеличении скорости вращения внутреннего цилиндра плотность в основном пространстве между цилиндрами не может стать настолько малой, чтобы поток приобрел черты свободномолекулярного течения. В противном случае высоко температурный газ из области около внешнего цилиндра заполнил бы

это пространство и увеличил бы плотность газа в нем. При дальнейшем увеличении U_1 поток нормального импульса, передаваемого внутреннему цилиндру $P_{r1}(U_1)$, после достижения минимума увеличивается. Это является следствием того, что $n(r_1)$ перестает уменьшаться и диссипативный эффект становится преобладающим. Монотонное увеличение потока нормального импульса, передаваемого внешнему цилиндру, объясняется тем, что оба эффекта способствуют увеличению $P_{r2}(U_1)$ с увеличением U_1 , см. рис.5.11с.

В случае течения Куэтта с неподвижным внутренним цилиндром зависимость нормального потока импульса, передаваемого внутреннему цилиндру $P_{r1}(U_2)$ от скорости вращения внешнего цилиндра принципиально отличается от $P_{r2}(U_2)$, см. рис.5.11b,d. Первый монотонно убывает с ростом U_2 . Этот эффект объясняется следующим образом. При увеличении скорости внешнего цилиндра поток молекул, падающих на внутренний цилиндр, быстро уменьшается из-за предварительных многократных отражений молекул от области вблизи внешнего цилиндра. Локальное число Кнудсена Kn_1 становится порядка единицы или более, и диссипативный эффект становится недостаточным для увеличения потока импульса, передаваемого внутреннему цилиндру.

Профили плотности, скорости и температуры для течения Куэтта с фиксированным внешним цилиндром и для потока с фиксированным внутренним цилиндром приведены на рис.5.12 при $Kn = 0.04$ и различных скоростях цилиндра. В обоих случаях с увеличением скорости плотность газа у внутреннего цилиндра уменьшается, а у внешнего - увеличивается. Однако, как отмечалось выше, в случае течения с фиксированным внешним цилиндром уменьшение плотности газа вблизи внутреннего цилиндра и в целом в пространстве между цилиндрами ограничено. Как и следовало ожидать, значение скорости вращающегося цилиндра гораздо сильнее влияет на профиль плотности в потоке Куэтта с неподвижным внутренним

цилиндром, чем в потоке с неподвижным внешним цилиндром. Уже при $U_2 = 3$ плотности около внутреннего цилиндра становится намного меньше, чем плотность около внешнего цилиндра, и ширина той части потока, где плотность намного меньше средней плотности, становится намного больше ширины части потока, где $n(r) \gg n_{av}$ (сравним рис. 5.12a и рис. 5.12b). В этом случае основная масса газа вращается почти, как твердое тело с угловой скоростью $\omega = U_2 / r_2$ и температурой, равной температуре внешнего цилиндра, см. рис. 5.12d,e. Отметим также, что в случае течения Куэтта с неподвижным внешним цилиндром увеличение $P_{r1}(U_1)$ при $U_1 \gg 1$ сопровождается очень значительным увеличением средней температуры газа, т. е. значительным усилением диссипативного процесса.

Известные кинетические эффекты сопровождаются тем, что в определенной области течения локальное число Кнудсена становится порядка единицы и более. Рассмотренный случай течения Куэтта с неподвижным внутренним цилиндром не является исключением. При этом значение локального числа Кнудсена в пространстве между цилиндрами, за исключением области вблизи внутреннего цилиндра, не превышает 0,14 ($U_1 = 7$, $Kn = 0.04$). Однако из-за резкого уменьшения L_{local} (размера области около внутреннего цилиндра, в которой тепловой поток изменяется на свою величину), значение $Kn_{local} = \lambda_{local} / L_{local}$ при высоких скоростях увеличивается около внутреннего цилиндра до значений порядка единицы.

Зависимости $P_{\phi 1}(U_1)$, $Q_1(U_1)$, $Q_2(U_1)$, $P_{r1}(U_1)$ и $P_{r2}(U_1)$, полученные путем решения уравнений Навье-Стокса с граничными условиями прилипания и граничными условиями скольжения, сравниваются с зависимостями, полученными методом DSMC при $Kn = 0.04$ на рис. 4.9a,c,e и рис. 4.9a,c. Соответствующие профили скорости, плотности и температуры для различных скоростей внутреннего цилиндра показаны на рис. 4.9a,c,e.

Как видно из графика, уравнения Навье - Стокса с использованием граничных условий скольжения обеспечивают гораздо лучшее, чем с условиями прилипания, согласие с расчетами DSMC.

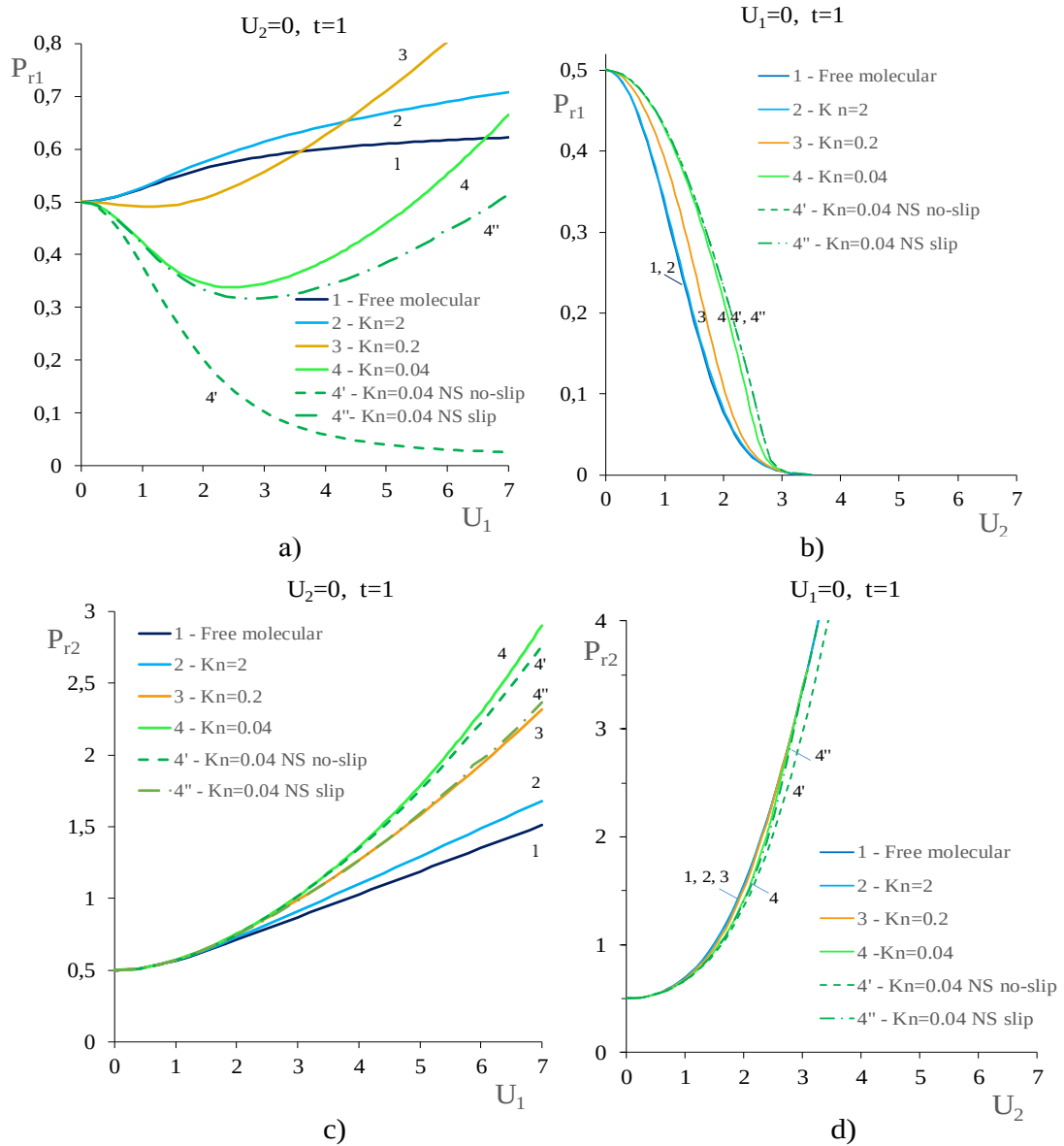


Рисунок 5.11. Нормальные потоки импульса P_{r1} и P_{r2} передаваемые на внутреннюю (a, b) и внешнюю (c, d) цилиндрические поверхности, для цилиндрических течений Куэтта с неподвижным внешним цилиндром (a, c) и с неподвижным внутренним цилиндром (b, d) в зависимости от скоростей внутреннего и внешнего цилиндра соответственно при различных числах Кнудсена, $\beta = 2$.

В отличие от зависимости $P_{r1}(U_1)$, полученной с использованием граничных условий скольжения, такая же зависимость, полученная с

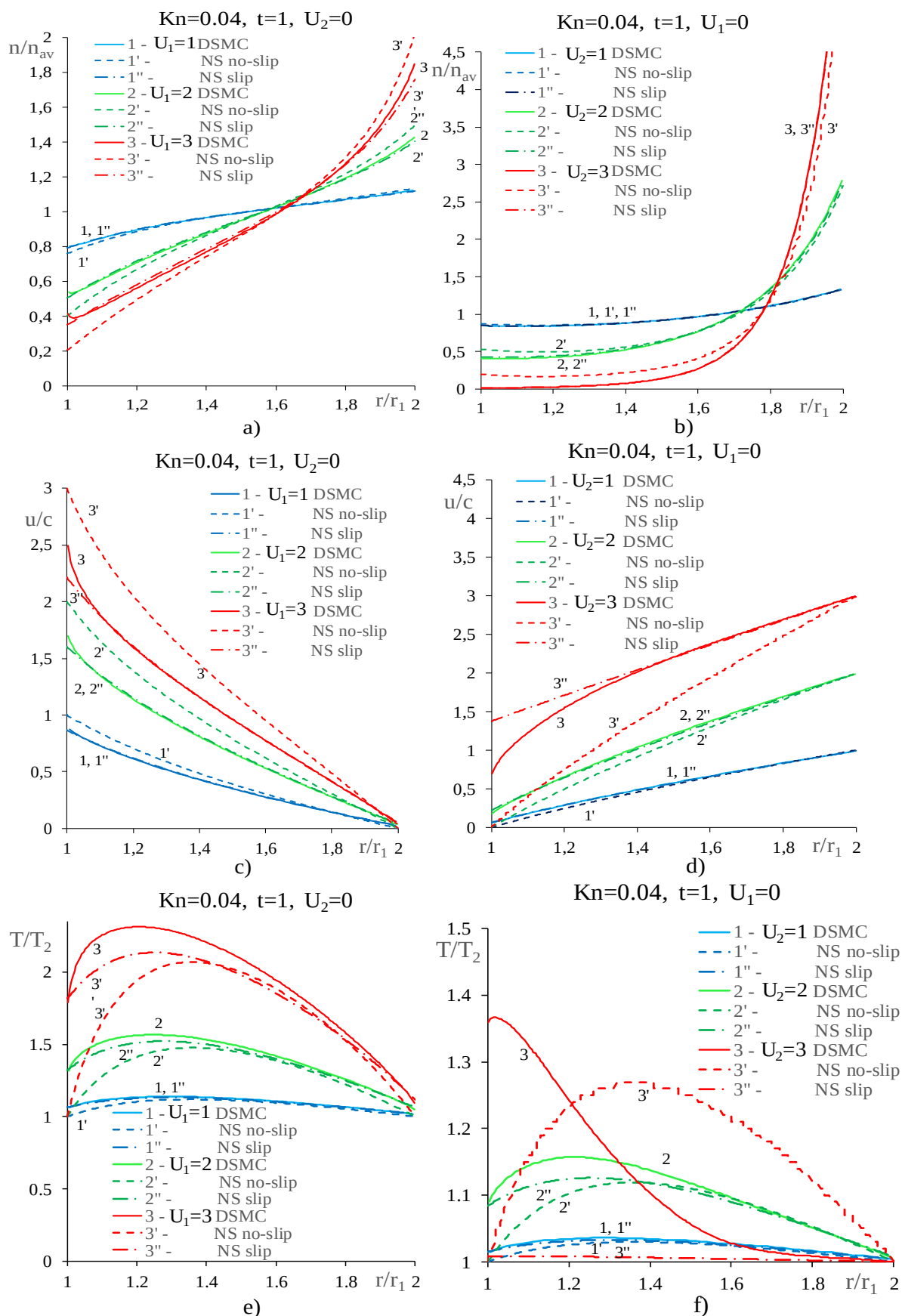


Рисунок 5.12. Профили скорости (а, б), плотности (с, д) и температуры (е, ф) для двух различных цилиндрических задач Куэтта: с фиксированным внешним цилиндром (а, с, е) и с фиксированным внутренним цилиндром (б, д, ф); $\beta = 2$.

граничными условиями прилипания, кардинально отличается от результатов расчетов методом DSMC, см. рис. 5.11a. Аналогичные зависимости для цилиндрического течения Куэтта с закрепленным внутренним цилиндром, полученные путем решения уравнений Навье-Стокса, показаны на рис. 5.9b,d,f; рис. 5.11b,d и рис. 5.12b,d,f. Зависимости $P_{\varphi 1}(U_2)$, $Q_1(U_2)$ и $Q_2(U_2)$, полученные путем решения уравнений Навье-Стокса с условиями прилипания, радикально отличаются от результатов DSMC.

По мере увеличения скорости вращения цилиндра соотношение (4.12) перестает выполняться, и решения уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения начинают заметно отличаться от результатов прямого статистического моделирования и при достаточно высоких скоростях часто только качественно описывают их, см. рис. 5.9, рис. 5.11 и рис. 5.12. Например, температурный профиль, полученный с помощью решения уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения при $U_2 = 3$ (рис. 5.12f, кривая 3'') близок к постоянному $T(r) = T_2 = 1$, и существенно отличается от температурного профиля, полученного с помощью DSMC при $1 < r < 1.4$ (рис. 5.12f, кривая 3).

Это связано с тем, что решение уравнений Навье-Стокса с условиями скольжения приближается к решению, соответствующему вращению газа, как твердое тело во всем пространстве между цилиндрами. В то время как DSMC решение приближается к этому решению лишь в части пространства, в которой сосредоточена основная масса газа.

Таким образом, в Гл. V показано, что течение Куэтта с неподвижным внешним цилиндром и внутренним цилиндром, вращающимся с постоянной угловой скоростью, обладает следующими свойствами:

1. В свободномолекулярном режиме напряжение трения и потоки энергии, передаваемые цилиндрам, имеют максимум, как функции отношения радиусов цилиндров.
2. Абсолютная величина потока нормального импульса, передаваемого внутреннему цилиндру, имеет в переходном режиме минимум как функция скорости внешнего цилиндра.
3. Напряжение трения и потоки энергии, передаваемой поверхностям, монотонно возрастают с ростом скорости вращения внутреннего цилиндра. Это кардинально отличает течение с вращающимся внутренним цилиндром от течения с вращающимся внешним цилиндром и сближает его с плоским течением Куэтта.

ГЛАВА VI. УСЛОВНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ МАКСИМУМЫ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

В настоящей главе рассматривается температурная немонотонность потока энергии в разреженном газе между коаксиальными цилиндрами, между концентрическими сферами и в течениях Куэтта разреженного газа. Зависимости потоков энергии, передаваемых граничным поверхностям, как функции двух температур поверхности не имеют максимумов. Однако если температура «горячей» поверхности фиксирована, то тепловой поток как функция температуры «холодной» поверхности имеет условный максимум. Такая немонотонность теплового потока в плоской задаче теплопроводности найдена и исследована в [43,160] при различных числах Кнудсена. В частности, поток свободномолекулярного тепла к «холодной» поверхности в плоской задаче теплопроводности имеет условный максимум при отношении температур пластин $\tau = 1/4$ [43]. Целью данной работы является обобщение результатов работ [43,159] на случай цилиндрических и сферических поверхностей в задачах теплопроводности и на случай плоского и продольного цилиндрического течения Куэтта.

6.1 ПОЛОЖЕНИЕ И ВЕЛИЧИНА ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ О ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ.

Рассмотрим вначале теплопередачу между двумя коаксиальными цилиндрами, пространство между которыми заполнено одноатомным газом. Пусть внутренний цилиндр радиуса r_1 имеет температуру T_1 , а внешняя цилиндрическая поверхность радиуса r_2 имеет температуру T_2 .

6.1.1 Свободномолекулярная теплопередача.

В свободномолекулярном режиме поток энергии, передаваемой единице площади внутренней поверхности равен [160,161]

$$E_{1cyl} = \frac{1}{\beta} \left(c_v + \frac{R}{2} \right) \rho_{av} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} (T_1 - T_2) \left[\frac{1}{\sqrt{T_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{T_1}} - \frac{1}{\sqrt{T_2}} \right) \cdot (1 - S(\beta)) \right]^{-1} \quad (6.1)$$

Поток энергии, передаваемой единице площади внешней поверхности равен [160,161]

$$E_{2cyl} = \frac{1}{\beta} (c_v + \frac{R}{2}) \rho_{av} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} (T_2 - T_1) \left[\frac{1}{\sqrt{T_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{T_1}} - \frac{1}{\sqrt{T_2}} \right) \cdot (1 - S(\beta)) \right]^{-1} \quad (6.2)$$

где $S(\beta) = S_{cyl}(\beta) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \arccos \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right)$, $\beta = \frac{r_2}{r_1}$. c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, R - газовая постоянная; зависимость $S_{cyl}(\beta)$ приведена на рис. 6.1

В отличие от плоской задачи [43] поток энергии в цилиндрическом случае, как видно из (6.1) и (6.2) не симметричен относительно температур поверхностей. Следовательно, для поиска оптимальных тепловых потоков, передаваемых внутренней и внешней поверхностям необходимо рассмотреть две различные задачи

Введем для этих задач безразмерные переменные

$$Q_{1cyl} = \frac{E_{1cyl}}{(c_v + \frac{R}{2}) \rho_{av} (2RT_2)^{1/2} T_2}, \quad \tau_1 = \frac{T_1}{T_2}$$

$$Q_{2cyl} = \frac{E_{2cyl}}{(c_v + \frac{R}{2}) \rho_{av} (2RT_1)^{1/2} T_1}, \quad \tau_2 = \frac{T_2}{T_1}$$

Тогда формулы (5.1) и (5.2) принимают вид

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{\pi}} \frac{1 - \tau_1}{1 + \sqrt{\tau_1} + (\sqrt{\tau_1} - 1)S(\beta)}, \quad (6.3)$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{\tau_2}{\pi}} \frac{\tau_2 - 1}{1 + \sqrt{\tau_2} + (1 - \sqrt{\tau_2})S(\beta)} \quad (6.4)$$

Для нахождения локальных экстремумов функций $Q_1(\tau_1)$ и $Q_2(\tau_2)$ воспользуемся условиями $dQ_1/d\tau_1 = 0$ и $dQ_2/d\tau_2 = 0$, которые приводят к кубическим относительно $\sqrt{\tau_1}$ и $\sqrt{\tau_2}$ уравнениям

$$2(1 + S)(\sqrt{\tau_1})^3 + 3(1 - S)\tau_1 + S - 1 = 0, \quad (6.5)$$

$$2(1 - S)(\sqrt{\tau_2})^3 + 3(1 + S)\tau_2 - S - 1 = 0. \quad (6.6)$$

Решение кубического уравнения (6.5) имеет единственный действительный корень. Он соответствует значению отношения температур

$$\tau_{1min\ cyl} = \frac{(1-S(\beta))^2 \left[\left(1 + \sqrt{S(\beta)}\right)^{2/3} \left(1 - \sqrt{S(\beta)}\right)^{-2/3} + \left(1 - \sqrt{S(\beta)}\right)^{2/3} \left(1 + \sqrt{S(\beta)}\right)^{-2/3} - 1 \right]^2}{4(1+S(\beta))^2}, \quad (6.7)$$

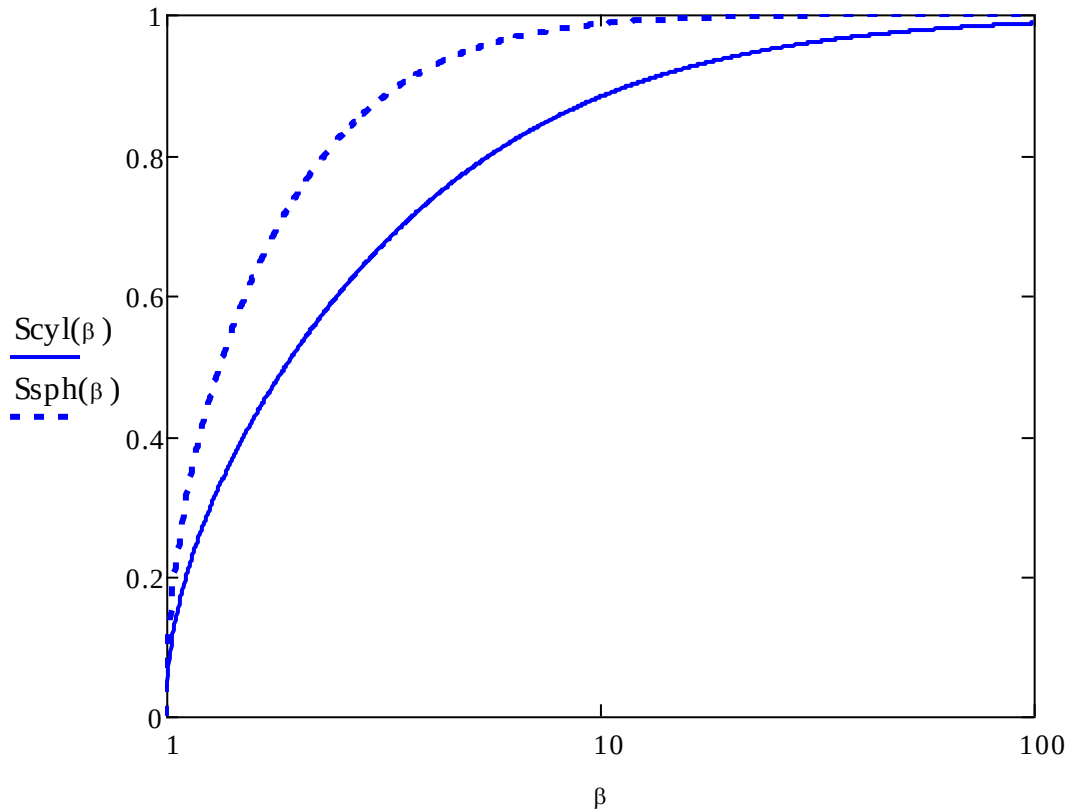


Рисунок 6.1. Зависимости параметра S от отношения радиусов поверхностей для цилиндров и сфер.

при котором поток энергии, передаваемой «холодной» внутренней поверхности, имеет максимум при условии постоянства температуры «горячей» внешней цилиндрической поверхности.

Кубическое уравнение (6.6) имеет три действительных корня, однако только один из них положителен и соответствует значению отношения температур

$$\tau_{2max\ cyl} = \left[\frac{1+S(\beta)}{1-S(\beta)} \right]^2 \left[\cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{S(\beta)^2 - 6S(\beta) + 1}{(1+S(\beta))^2} \right) \right] - \frac{1}{2} \right]^2, \quad (6.8)$$

при котором поток энергии, передаваемой «холодной» внешней поверхности, имеет максимум при условии постоянства температуры «горячей» внутренней цилиндрической поверхности.

Зависимости $\tau_{1\max cyl}(\beta)$ и $\tau_{2\max cyl}(\beta)$ приведены на рис. 6.2.

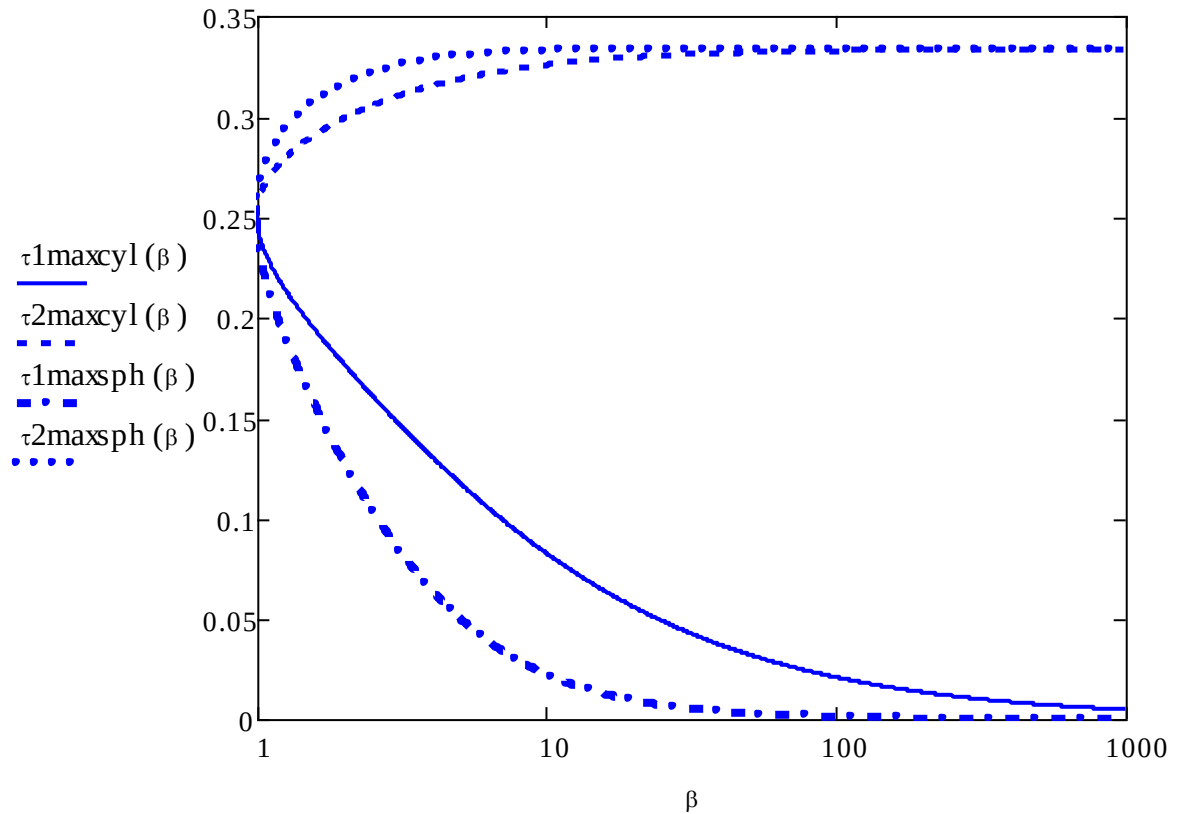


Рисунок 6.2. Значения отношений температур поверхностей, соответствующих локальным максимумам потока энергии, передаваемой внутренней и внешней поверхностям, при фиксированной температуре другой поверхности для цилиндрических и сферических поверхностей при различных значениях отношения радиусов поверхностей.

На рис. 6.3 приведены соответствующие зависимости

$$Q_{1\max cyl} = Q_1(\tau_{1\max cyl}(\beta)) \text{ и } Q_{2\max cyl} = Q_2(\tau_{2\max cyl}(\beta))$$

При $\beta \rightarrow 1$ мы приходим к плоской геометрии и в полном соответствии с [43] находим

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \tau_{1\max cyl}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow 1} \tau_{2\max cyl}(\beta) = \tau_{\max plane} = \frac{1}{4} \cdot$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} Q_{1\max cyl}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow 1} Q_{2\max cyl}(\beta) = Q_{\max plane} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot$$

С другой стороны

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_{1 \max cyl}(\beta) = 0; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_{2 \max cyl}(\beta) = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{1 \max cyl}(\beta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}; \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} Q_{2 \max cyl}(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{9\sqrt{\pi}}.$$

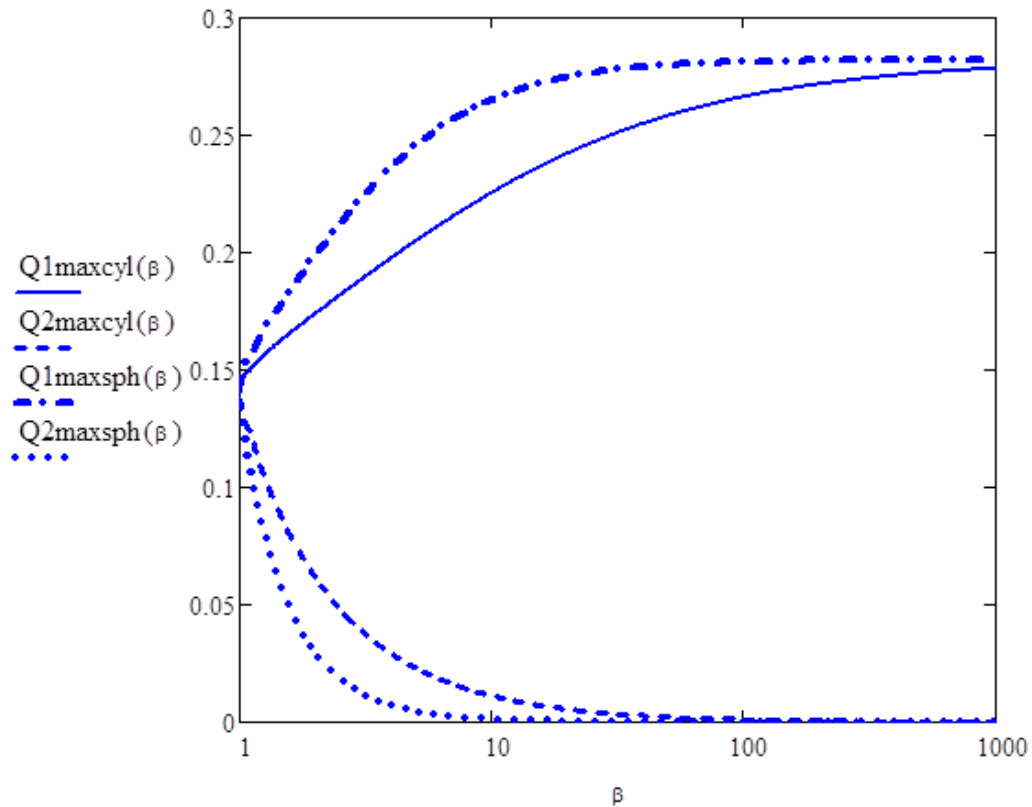


Рисунок 6.3. Значения величин локальных максимумов потока энергии, передаваемой внутренней и внешней поверхностям, при фиксированной температуре другой поверхности при различных значениях отношения радиусов поверхностей.

6.1.2 Теплопередача при произвольном числе Кнудсена.

Исследование влияния числа Кнудсена $Kn = \lambda / L$, где λ средняя длина пробега молекулы; $L = r_2 - r_1$ на величину и положение условного максимума теплового потока для цилиндрической задачи проводилось с помощью DSMC метода [71]. Расчеты выполнялись для одноатомного газа "твёрдых сфер".

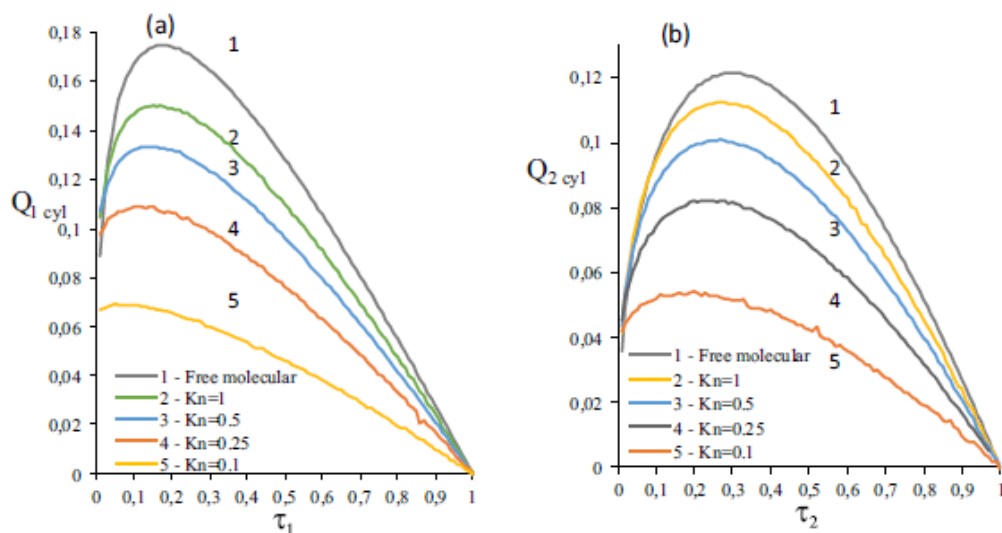


Рисунок 6.4 Тепловые потоки, передаваемые к внутренней (а) и внешней (б) цилиндрическим поверхностям, в зависимости от отношения температур при различных числах Кнудсена для $\beta = 2$

На рис. 6.4 показаны зависимости тепловых потоков, передаваемых поверхностям, от отношения температур поверхностей при различных числах Кнудсена. Видно, что с уменьшением Kn положение максимумов, как и в плоском случае [160] смещается в сторону меньших значений отношения температур. При малых значениях Kn кривые $Q_{1\text{cyl}}(\tau_1)$ и $Q_{2\text{cyl}}(\tau_2)$ монотонны вне сужающейся с уменьшением числа Кнудсена области вблизи τ_1 и τ_2 равных нулю. Этот результат вполне естественен, поскольку в пределе сплошной среды соответствующие зависимости монотонны.

6.2 ПОЛОЖЕНИЕ И ВЕЛИЧИНА ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ О ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ МЕЖДУ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ СФЕРАМИ.

Рассмотрим теперь теплопередачу между двумя концентрическими сферами. Предположим, что пространство между сферами заполнено газом со среднемассовой плотностью ρ_{av} . Пусть r_1 , r_2 радиусы внутренней и внешней сфер, и пусть T_1 и T_2 их температуры. Предположим также, что отражение молекул от поверхностей происходит диффузно с температурой поверхности.

6.2.1 Свободномолекулярная теплопередача.

Выражение для величины потока энергии (тепла) на внутреннюю поверхность имеет вид [161,162]

$$E_{1\ sph} = \left(c_v + \frac{R}{2}\right) \rho_{av} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} (T_2 - T_1) \left[\frac{1}{\sqrt{T_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{T_1}} - \frac{1}{\sqrt{T_2}} \right) \cdot \left(1 - \frac{((r_2/r_1)^2 - 1)^{3/2}}{(r_2/r_1)^3 - 1} \right) \right]^{-1} \quad (6.9)$$

Поток энергии на внешнюю поверхность

$$E_{2\ sph} = -r_1^2 E_{1\ sph} / r_2^2$$

Введем безразмерные величины

$$Q_{1\ sph} = \frac{E_{1\ sph}}{(2RT_2)^{3/2} \rho_{av}}, \quad Q_{2\ sph} = \frac{E_{2\ sph}}{(2RT_1)^{3/2} \rho_{av}}.$$

$$\tau_1 = \frac{T_1}{T_2}, \quad \tau_2 = \frac{T_2}{T_1}$$

Тогда

$$Q_{1\ sph} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\pi}} \frac{1 - \tau_1}{1 + \sqrt{\tau_1} + (\sqrt{\tau_1} - 1)S(\beta)},$$

$$Q_{2\ sph} = \frac{1}{\beta^2} \sqrt{\frac{\tau_2}{\pi}} \frac{1 - \tau_2}{1 + \sqrt{\tau_2} + (1 - \sqrt{\tau_2})S(\beta)},$$

$$\text{где } S(\beta) = S_{\text{sph}}(\beta) = \frac{(\beta^2 - 1)^{3/2}}{\beta^3 - 1} \beta = \frac{r_2}{r_1}.$$

Формула (6.9) отличается от (6.1) только функцией, содержащей отношение радиусов. Следовательно, формулы для соответствующих условных максимумов $\tau_{1\text{max sph}}(\beta)$ и $\tau_{2\text{max sph}}(\beta)$ сохраняют вид (6.7) и (6.8) с

$S(\beta) = S_{\text{sph}}(\beta)$. На рис. 6.2 показаны зависимости $\tau_{1\text{max sph}}(\beta)$ и $\tau_{2\text{max sph}}(\beta)$

Зависимости $Q_{1\text{max sph}}(\beta) = Q_{2\text{sph}}[\tau_{2\text{max sph}}(\beta)]$ и $Q_{2\text{max sph}}(\beta) = Q_{2\text{sph}}(\tau_{2\text{max sph}}(\beta))$

представлены на рис. 6.3. Легко получить, что

$$\tau_{1\text{max sph}}(\beta) < \tau_{1\text{max cyl}}(\beta) < \tau_{\text{max plane}}; \quad \tau_{2\text{max sph}} > \tau_{2\text{max cyl}}(\beta) > \tau_{\text{max plane}};$$

$$Q_{1\text{max sph}}(\beta) > Q_{1\text{max cyl}}(\beta) > Q_{\text{max plane}}; \quad Q_{2\text{max sph}}(\beta) < Q_{2\text{max cyl}}(\beta) < Q_{\text{max plane}};$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_{1\text{max sph}}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_{1\text{max cyl}}(\beta); \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_{2\text{max sph}}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_{2\text{max cyl}}(\beta);$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{1\text{max sph}}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{1\text{max cyl}}(\beta); \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{2\text{max sph}}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{2\text{max cyl}}(\beta);$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{1\text{max sph}}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{1\text{max cyl}}(\beta); \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{2\text{max sph}}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{2\text{max cyl}}(\beta);$$

Таким образом, оптимальные потоки энергии в сферическом и цилиндрическом вариантах стремятся к одному пределу при $\beta \rightarrow \infty$. Основное отличие состоит в том, что в сферическом случае максимальный тепловой поток стремится к пределу быстрее, чем в цилиндрическом. Отметим, что в свободномолекулярном режиме и в случае цилиндров, и в случае сфер значения отношений температур поверхностей, при которых тепловые потоки достигают максимумов, не зависят от показателя адиабаты.

6.2.2 Теплопередача при произвольном числе Кнудсена.

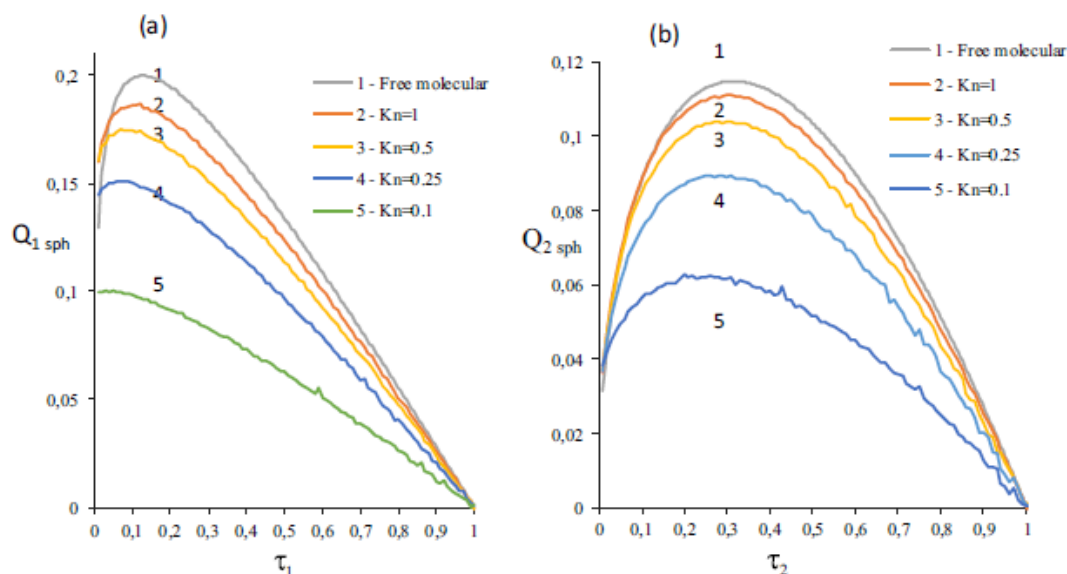


Рисунок 6.5 Тепловые потоки, передаваемые к внутренней (а) и внешней (б) сферическим поверхностям, в зависимости от отношения температур при различных числах Кнудсена для $\beta = 2$.

Исследование влияния числа $Kn = \lambda / L$, где λ средняя длина пробега молекулы; $L = r_2 - r_1$ на величину и положение условного максимума теплового потока для сферических задач также проводилось с помощью DSMC метода [71]. Зависимости тепловых потоков, передаваемых к сферическим поверхностям, от отношения температур поверхностей при различных числах Кнудсена показаны на рис. 6.5. Расчеты выполнялись для одноатомного газа «твёрдых сфер». Видно, что с уменьшением Kn положение максимумов, как и в цилиндрическом случае смещается в сторону меньших значений отношения температур.

6.3 ПОЛОЖЕНИЕ И ВЕЛИЧИНА ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

Рассмотрим свободномолекулярный режим. При $Kn \rightarrow \infty$ решение плоской задачи Куэтта приведено в аналитическом виде в [38]. Для свободномолекулярного течения функция распределения молекул f не зависит от нормальной координаты и при $v_y > 0$ имеет вид (1.2) с

$$n_{r1} = \frac{2\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} n_{av} \quad (6.10)$$

При $v_y < 0$ функция распределения f имеет вид (1.3) с параметром

$$n_{r2} = \frac{2\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} n_{av}. \quad (6.11)$$

Эти параметры получаются из условий непротекания. Здесь использованы те же обозначения, что и в главе 1.

Подставляя n_{r1} и n_{r2} в формулы, приведенные в [38], находим для безразмерной разности потоков энергии падающих на нижнюю поверхность молекул и отраженных ею

$$Q = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau} \frac{\tau - 1 - \kappa M^2/4}{\sqrt{\tau} + 1},$$

где

$$Q = \frac{E_y}{kT_2 c n_{av}}, E_y = -\int v_y \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{V})|_{y=0} d\mathbf{V}, \text{ где } d\mathbf{V} = dv_x dv_y dv_z,$$

$$c = \sqrt{2RT_2}, M = u_2/\sqrt{\kappa RT_2}, \tau = T_1/T_2, \kappa - \text{показатель адиабаты.}$$

Положительное направление потока энергии выбрано от верхней пластины к нижней.

В [43] показано, что при фиксированной температуре одной из пластин зависимость потока энергии между пластинами от отношения температур τ в свободномолекулярном режиме при $M=0$ имеет максимум при $\tau = 1/4$.

Обобщим результаты [43] на случай произвольных чисел Маха. Рассмотрим более подробно картину течения при $\tau \rightarrow 0$. Как показывает анализ формул (6.10) и (6.11) при $\tau \rightarrow 0$ плотность частиц, летящих от нижней стенки, стремится к n_{av} , а летящих от верхней стенки стремится к нулю. Поток частиц и вместе с ним поток энергии и поток импульса также стремятся к нулю. С другой стороны, при $\tau = 1 + \kappa M^2/4$ потоки энергии, приносимые на пластину и уносимые с нее, сравниваются, и суммарный поток энергии $Q(t)$ обращается в ноль. Таким образом, функция $Q(t)$ должна иметь максимум в интервале $0 < \tau < 1 + \kappa M^2/4$. Результаты расчетов нормированного потока энергии $Q(\tau)$ для свободномолекулярного течения представлены на рис. 5.6а при $\kappa=5/3$ для различных M .

Для нахождения τ_{max} и Q_{max} воспользуемся условием $dQ/d\tau = 0$, которое приводит к кубическому относительно $\sqrt{\tau}$ уравнению

$$8(\sqrt{\tau})^3 + 12\tau - 4 - \kappa M^2 = 0.$$

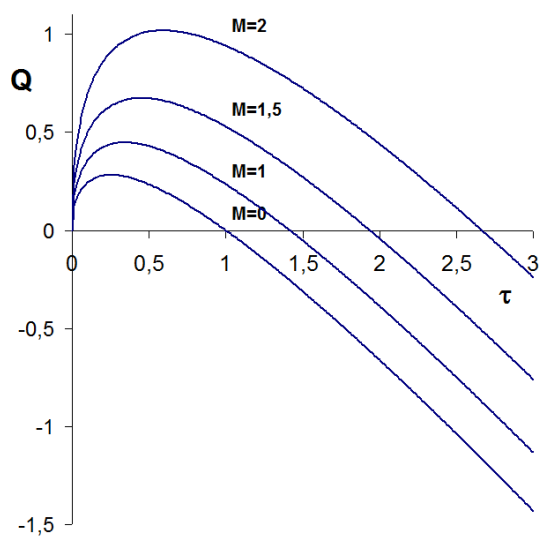
Действительное решение этого уравнения имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{1}{4} \left\{ \left[1 + \frac{\kappa M^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\kappa M^2}} \right) \right]^{1/3} + \left[1 + \frac{\kappa M^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\kappa M^2}} \right) \right]^{-1/3} - 1 \right\}^2$$

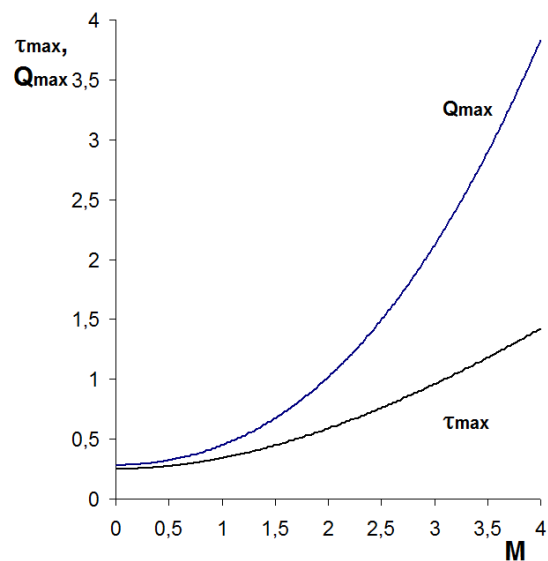
На рис. 6.6b приведены зависимости τ_{max} и $Q(\tau_{max})$ от M при $\kappa=5/3$.

Разумеется, говоря об оптимальном значении отношения температур, следует помнить, что в силу того, что $Q = E_y/(kT_2 c n_{cp})$ речь идет о максимальном значении потока энергии на одну из пластин при фиксированном значении температуры другой пластины.

/



a)



b)

Рисунок 6.6(a) Зависимости нормированного потока энергии на нижнюю пластину от отношения температур пластин для свободномолекулярного течения; (b) Зависимости положения и величины локального максимума потока энергии от M .

6.4 ПОЛОЖЕНИЕ И ВЕЛИЧИНА ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ПРОДОЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

Рассмотрим стационарное течение разреженного газа, имеющего среднемассовую плотность ρ_{av} , между двумя коаксиальными цилиндрами. Введём цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . Ось z совпадает с осью цилиндров, r расстояние от оси цилиндров, φ азимутальная координата. Без потери общности, полагаем, что внутренний цилиндр покоится. Пусть внешний цилиндр движется относительно внутреннего со скоростью U_z параллельной оси z . Направление оси z -совпадает с направлением U_z . Предположим, что отражение молекул от поверхности происходит диффузно с температурой равной температуре поверхности. Течение является одномерным.

Для описания течения газа необходимо решить краевую задачу для уравнения Больцмана:

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = J(f, f')$$

Со следующими граничными условиями для функции распределения молекул по скоростям f на внутренней и внешней поверхностях:

$$f = f_1 = n_1 (2\pi RT_1)^{-3/2} \exp\left[-\frac{v^2 + v_z^2}{2RT_1}\right], \quad v_r > 0, \quad r = r_1$$

$$f = f_2 = n_2 (2\pi RT_2)^{-3/2} \exp\left[-\frac{v^2 + (v_z - U_z)^2}{2RT_2}\right], \quad v_r < 0, \quad r = r_2.$$

Здесь, $J(f, f')$ интеграл столкновений молекул [38]; $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$, v_r , v_φ и v_z - компоненты $\mathbf{V}$ скорости молекулы в цилиндрической системе координат; R - газовая постоянная. Параметры в функции распределения, соответствующие отражённым молекулам n_1 и n_2 могут быть найдены из условия баланса между падающими и отражёнными молекулами. Обозначим радиус и температуру внутреннего цилиндра r_1 и T_1 . Соответственно

обозначим радиус и температуру внешнего цилиндра r_2 и T_2 . В вычислениях использовалась модель “твёрдых сфер”. Для этой модели средняя длина пробега даётся выражением $\lambda = (\sqrt{2}n_{av}\sigma_{sp})^{-1}$, где n_{av} - среднечисловая плотность газа, σ_{sp} - сечение поперечного столкновения. Если $U_z=0$, то мы имеем задачу о цилиндрической теплопередаче.

6.4.1 Максимумы свободномолекулярных потоков энергии, передаваемой внутренней цилиндрической поверхности

Поток энергии передаваемой внутренней поверхности [59]

$$E_1 = (c_v + R/2)\rho_{av}\sqrt{\frac{R}{2\pi}}\left[T_2 - T_1 + \frac{U_z^2}{2(c_v + R/2)}\right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{T_2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{T_1}} - \frac{1}{\sqrt{T_2}}\right) \cdot (1 - s(\beta))\right]^{-1}.$$

Введём безразмерные величины

$$Q_1 = \frac{E_1}{(c_v + R/2)\rho_{av}(2RT_2)^{1/2}T_2}, \quad \tau_1 = \frac{T_1}{T_2}, \quad U_2 = \frac{U_z}{\sqrt{(c_v + R/2)T_2}}.$$

Тогда

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{\pi}} \frac{1 + U_2^2/2 - \tau_1}{1 + \sqrt{\tau_1} + (\sqrt{\tau_1} - 1)s(\beta)}.$$

Для нахождения условного экстремума функции $Q_1(\tau_1)$, используем условие $dQ_1(\tau_1)/d\tau_1 = 0$. Это условие приводит к кубическому уравнению относительно $\sqrt{\tau_1}$

$$2(1+s)(\sqrt{\tau_1})^3 + 3(1-s)\tau_1 + (1 + \frac{U_2^2}{2})(s-1) = 0. \quad (6.12)$$

Кубическое уравнение (6.12) имеет один вещественный корень. Оно даёт выражение для отношения температур

$$\tau_{1\max}(\beta, U_2) = \left[\frac{(1-s)(a + a^{-1} - 1)}{2(1+s)} \right]^2, \quad \text{где}$$

$$a = \frac{(1+s)^{2/3}}{(1-s)^{2/3}} \left\{ \left[\frac{4s}{(s+1)^2} + \frac{U_2^2}{2} \right]^{1/2} + \left[1 + \frac{U_2^2}{2} \right]^{1/2} \right\}^{2/3}.$$

При этом отношении температур, поток энергии, передаваемый к “холодной” поверхности максимален, при условии, что температура “горячего” внешнего цилиндра фиксирована. Отношение температур

$\tau_{1\max}(\beta, 0)$ соответствует задачи о теплопередаче между двумя коаксиальными цилиндрами.

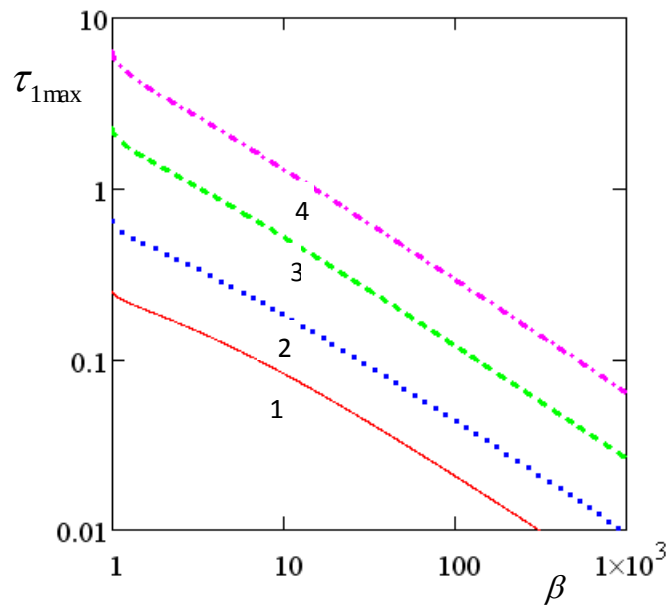


Рисунок 6.7. Отношение температур, соответствующее условному максимуму потока энергии на внутреннюю поверхность в зависимости от отношения радиусов: 1-4 – $U_2 = 0, 2, 5, 10$.

Зависимости $\tau_{1\max}(\beta, U_2)$ приведены на рис. 6.7. Из графиков видно, что увеличение отношения радиусов цилиндров уменьшает $\tau_{1\max}$. Легко показать, что

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta \tau_{1\max} = \left(\frac{1 + U_2^2 / 2}{\pi} \right)^{2/3}$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

и

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_1[\tau_{1\max}(\beta, U_2), U_2] = \frac{1 + U_2^2 / 2}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

Для представления зависимостей максимальных безразмерных потоков энергий $Q_{1\max}(\beta, U_2) = Q_1[\tau_{1\max}(\beta, U_2), U_2]$ при различных U_2 их удобно нормировать на $Q_{1\max}(1, U_2)$

$$q_{1\max}(\beta, U_2) = \frac{Q_{1\max}(\beta, U_2)}{Q_{1\max}(1, U_2)}$$

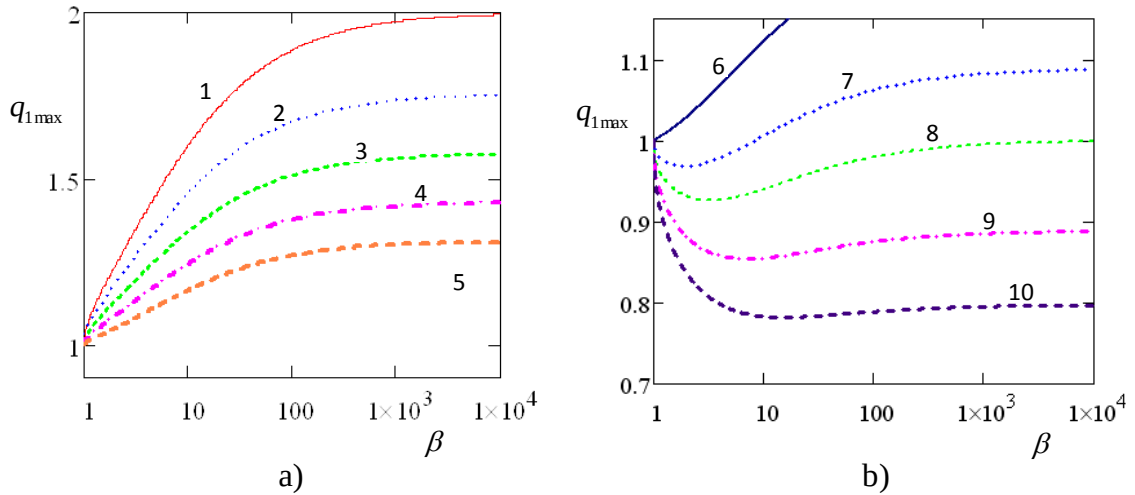


Рисунок 6.8. Условный максимум потока энергии, передаваемой внутренней поверхности цилиндра в зависимости от отношения радиусов: 1-10 – $U_2 = 0, 1, 1.5, 2, 2.5, 2.82, 4, 5, 7, 10$.

Зависимости $q_{1\max}(\beta, U_2)$ показаны на рис. 6.8.

$$\lim_{U_2 \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} q_{1\max}(\beta, U_2) = \frac{1}{2}$$

Из рис. 6.8 следует, что если $U_2 < 2.82$, то максимум потока энергии увеличивается при увеличении β на всём интервале $1 < \beta < \infty$. Однако, если $U_2 > 2.82$, то максимум потока энергии с ростом β сначала уменьшается, а затем, после слабого минимума, начинает увеличиваться. Такое поведение этих зависимостей в продольном цилиндрическом течении Куэтта принципиально отличается от поведения аналогичных зависимостей для задачи о теплопередачи в газе с фиксированными цилиндрами ($U_2 = 0$). Другая разница между этими задачами состоит в том, что в первой задаче

величина $\tau_{1\max}$ зависит от теплоёмкости и молекулярной массы (это входит через величину $c_v + R/2$ в формуле для безразмерной скорости U_2), в то время как во второй задаче $\tau_{1\max}$ не зависит от этих физических величин.

6.4.2 Максимумы свободномолекулярных потоков энергии, передаваемой внешней цилиндрической поверхности

Поток энергии, передаваемой внешней поверхности [59]

$$E_2 = (c_v + R/2) \frac{\rho_{av}}{\beta} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \left[T_1 - T_2 + \frac{U_z^2}{2(c_v + R/2)} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{T_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{T_1}} - \frac{1}{\sqrt{T_2}} \right) \cdot (1 - s(\beta)) \right]^{-1}.$$

Как это сделано выше, вводим безразмерные величины

$$Q_2 = \frac{E_2 \beta}{(c_v + R/2) \rho_{av} (2RT_1)^{1/2} T_1}, \quad \tau_2 = \frac{T_2}{T_1}, \quad U_1 = \frac{U_z}{\sqrt{(c_v + R/2) T_1}}. \quad (6.13)$$

Тогда

$$Q_2 = \sqrt{\frac{\tau_2}{\pi}} \frac{1 + U_1^2/2 - \tau_2}{1 + \sqrt{\tau_2} + (1 - \sqrt{\tau_2})s(\beta)}.$$

Условие $dQ_2(\tau_2)/d\tau_2 = 0$ приводит к кубическому уравнению относительно величины $\sqrt{\tau_2}$

$$2(1-s)(\sqrt{\tau_2})^3 + 3(1+s)\tau_2 - (1 + \frac{U_1^2}{2})(s+1) = 0. \quad (6.14)$$

Если $U_1^2 < 8s(1-s)^{-2}$ кубическое уравнение (6.14) имеет три действительных корня, но только один из них положителен. Этому корню соответствует отношение температур поверхностей

$$\tau_{2\max} = \left[\frac{1+s}{1-s} \right]^2 \left[\cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{U_1^2(s-1)^2 + s^2 - 6s + 1}{(1+s)^2} \right) \right] - \frac{1}{2} \right]^2, \quad (6.15)$$

Если $U_1^2 \geq 8s(1-s)^{-2}$ кубическое уравнение (6.14) имеет один действительный корень и

$$\tau_{2\max}(\beta, U_1) = \left[\frac{(1+s)(b + b^{-1} - 1)}{2(1-s)} \right]^2, \quad (6.16)$$

$$\text{где } b = \frac{(1-s)^{2/3}}{(1+s)^{2/3}} \left\{ \left[\frac{U_1^2}{2} - \frac{4s}{(1-s)^2} \right]^{1/2} + \left[1 + \frac{U_1^2}{2} \right]^{1/2} \right\}^{2/3}$$

Таким образом, с помощью (6.15) и (6.16), находим отношение температур, при котором поток энергии, передаваемый “холодной” внешней поверхности, имеет максимум, при условии, что температура “горячей” внутренней цилиндрической поверхности фиксирована. Отношение температур $\tau_{2\max}(\beta, 0)$ соответствует задаче о теплопередаче между двумя коаксиальными цилиндрами.

Зависимости $\tau_{2\max}(\beta, U_1)$ представлены на рис. 6.9. Легко проверить справедливость соотношений

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_{2\max}(\beta, U_1) = \frac{1}{3} + \frac{U_1^2}{6} \quad \text{и}$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_2[\tau_{2\max}(\beta, U_1), U_1] = \frac{\sqrt{3}(1 + U_1^2/2)^{3/2}}{9\sqrt{\pi}}$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

Удобно представить зависимости $Q_{2\max}(\beta, U_1) = Q_2[\tau_{2\max}(\beta, U_1), U_1]$ при различных U_1 , нормированными на величину $Q_{2\max}(1, U_1)$

$$q_{2\max}(\beta, U_1) = \frac{Q_{2\max}(\beta, U_1)}{Q_{2\max}(1, U_1)}$$

Зависимости $q_{2\max}(\beta, U_1)$ приведены на рис. 6.10

$$\lim_{U_1 \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} U_1^{-1} q_{2\max}(\beta, U_1) = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

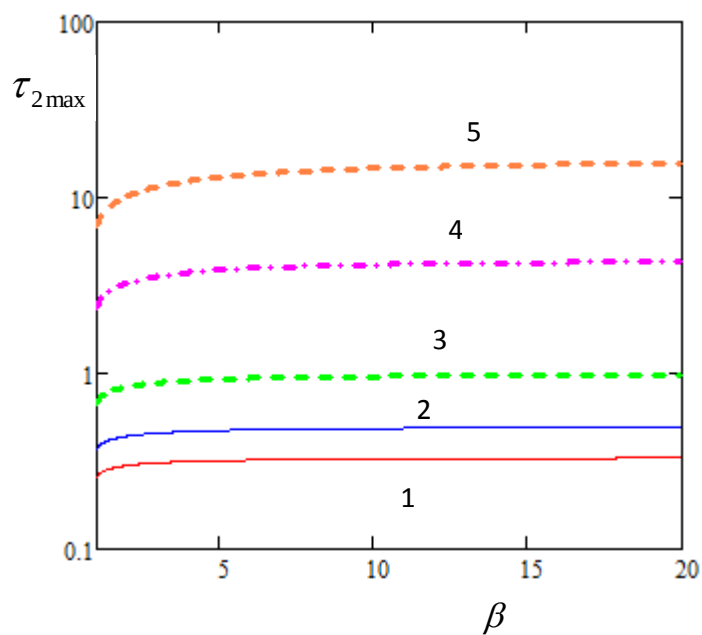


Рисунок 6.9. Отношение температур условного максимума потока энергии, передаваемой внешней поверхности цилиндра, в зависимости от отношения радиусов: 1-5 – $U_2 = 0, 1, 2, 5, 10$.

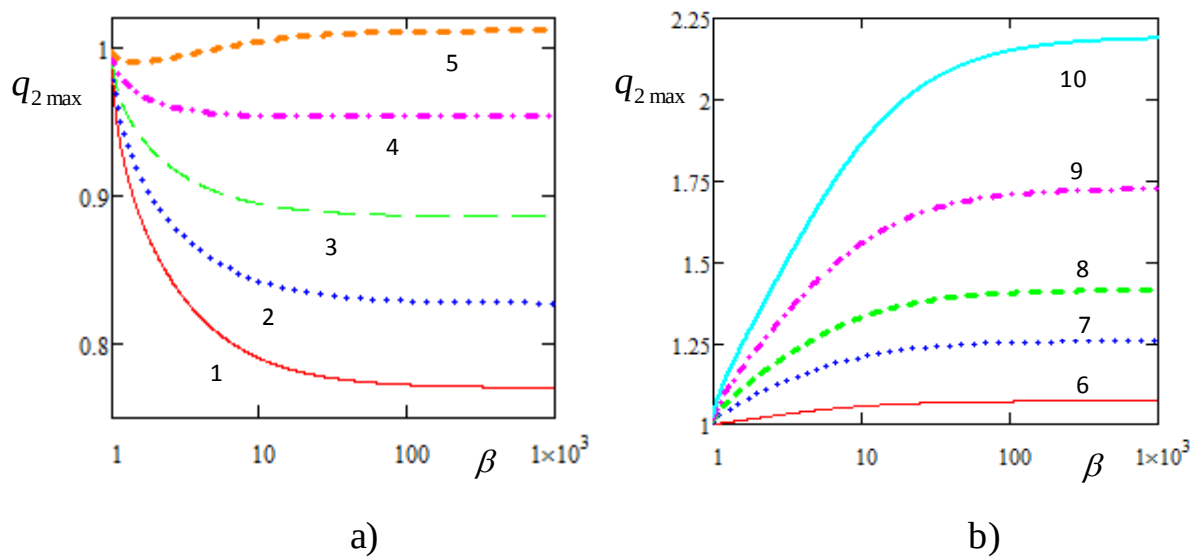


Рисунок 6.10. Условный максимум потока энергии, передаваемой на внешнюю цилиндрическую поверхность, в зависимости от отношения радиусов: 1-10 – $U_1 = 0, 1, 1.5, 2, 2.4, 2.8, 4, 5, 7, 10$

Вычисления показывают, что если $U_1 < 2.0$, то $q_{2\max}(\beta, U_1)$ как функция β монотонно уменьшается на всём интервале $1 < \beta < \infty$. Если $U_1 > 2.8$ то эта функция монотонно возрастает по β на всём интервале $1 < \beta < \infty$. На интервале скоростей ($2.0 < U_1 < 2.8$) функция $q_{2\max}(\beta, U_1)$ сначала падает с увеличением β , а после слабого минимума возрастает. Учитывая соотношение (6.13), видим, что максимум потока энергии, передаваемой внешнему цилиндру, имеет слабый минимум по величине r_2 , при фиксированной величине r_1 . Отметим также, что теплоёмкость и молекулярная масса входят в выражение для $\tau_{2\max}$ через комбинацию $c_v + R/2$ в формуле для U_1 . Таким образом, зависимости потоков энергии от отношения радиусов и от свойств газа в продольном цилиндрическом течении Куэтта существенно отличается от соответствующих зависимостей в задаче о теплопередаче.

6.4.3 Локальные максимумы потока энергии в продольном цилиндрическом течении Куэтта при произвольном числе Кнудсена

Изучим влияние разреженности газа на потоки энергии в продольном цилиндрическом течении Куэтта, используя метод прямого статистического моделирования (DSMC) [71]. Макропараметры течения зависят от числа Кнудсена $Kn = \lambda / L$, где λ средняя длина пробега молекулы; $L = r_2 - r_1$.

Напряжение трения P_{rz1}, P_{rz2} и потоки энергии, передаваемые E_1, E_2 выражаются через функцию распределения:

$$P_{rz1} = - \int m v_r v_z f(\mathbf{V}) d\mathbf{V}, \quad r = r_1; \quad P_{rz2} = -P_{rz1} / \beta;$$

$$E_1 = - \int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{V}) d\mathbf{V}, \quad r = r_1,$$

$$E_2 = - \int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\phi^2 + (v_z - U_z)^2)}{2} f(\mathbf{V}) d\mathbf{V}, \quad r = r_2, \quad \text{где } d\mathbf{V} = dv_r dv_\phi dv_z.$$

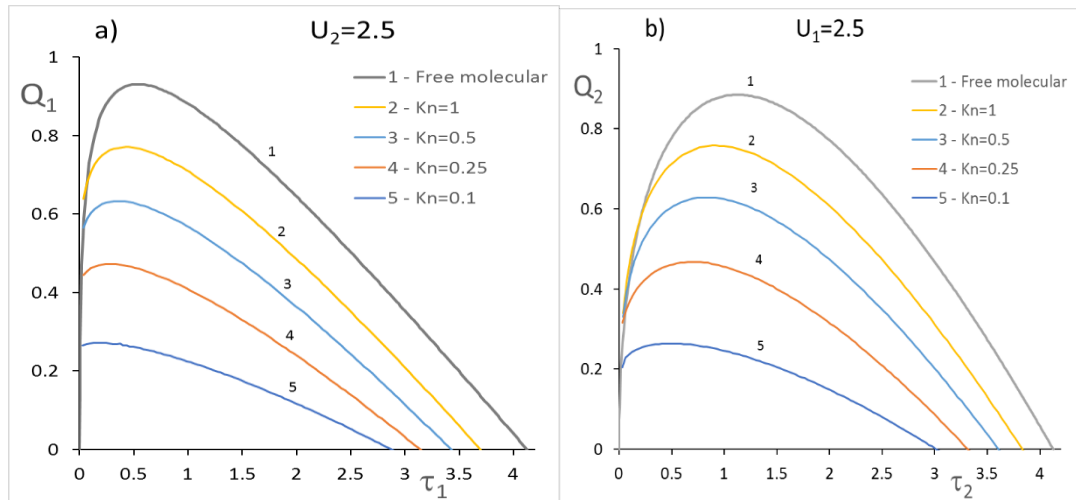


Рисунок 6.11. Потоки энергии, передаваемые внутренней (а) и внешней (б) цилиндрическим поверхностям, в зависимости от отношения температур при различных числах Кнудсена для $\beta=2$.

На рис. 6.11 представляет зависимости безразмерного потока энергии передаваемых цилиндрическим поверхностям в зависимости от отношения температур поверхностей при различных числах Кнудсена. Как можно видеть, во всех случаях уменьшение числа Кн приводит к тем же качественным результатам, что и для неподвижных цилиндров. Уменьшение числа Кн снижает величину максимального потока и, величину отношения температур, при которых он достигается.

Таким образом, в Гл. VI в результате исследования теплопередачи в разреженном газе между неподвижными цилиндрическими и сферическими поверхностями и в плоском и цилиндрическом течениях Куэтта разреженного газа получены следующие результаты:

1. Для всех четырех задач в свободномолекулярном режиме получены точные аналитические выражения для отношения температур поверхностей, при котором поток энергии к “холодной” поверхности максимален при условии постоянства температуры “горячей” поверхности.
2. Показано, что зависимости максимумов потоков энергий от отношения радиусов цилиндров в задаче о продольном цилиндрическом течении Куэтта значительно (и в некоторых случаях качественно) отличаются от соответствующих зависимостей в задаче о теплопередаче. В отличие от теплопередачи, в задаче Куэтта на положения максимума потока влияют величины теплоёмкости и молекулярная масса газа.
3. Для переходного режима с помощью метода прямого статистического моделирования исследовано положение максимумов для продольного цилиндрического течения Куэтта и для газа между неподвижными цилиндрическими и сферическими поверхностями при различных числах Кнудсена.

ГЛАВА VII. АНАЛОГИЯ РЕЙНОЛЬДСА

Известно, что в навье-стоксовом режиме течения Куэтта с различными температурами поверхностей имеет место аналогия Рейнольдса: напряжение трения и тепловой поток пропорциональны друг другу [119]. В настоящее время благодаря развитию нанотехнологий возрос интерес к теплопередаче в микроканалах [69,163-165]. В этой связи представляет интерес рассмотреть аналогию Рейнольдса для классических течений разреженного газа.

7.1 ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ АНАЛОГИИ РЕЙНОЛЬДСА И ДЛЯ ОТНОШЕНИЯ ЭНЕРГИЙ, ПЕРЕДАВАЕМЫХ ПЛАСТИНАМ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

Под коэффициентом аналогии Рейнольдса в дальнейшем понимается величина отношения потока энергии, передаваемого пластине к произведению напряжения трения на относительную скорость пластин

$$R = \frac{E_1}{p_{xy} U_r}$$

В мировой научной литературе эта величина обычно называется Reynolds analogy. В пределе малых чисел Кнудсена ($Kn \rightarrow 0$) движение газа между пластинами описывается уравнениями Навье-Стокса с условиями прилипания на пластинах [38] и поток энергии, передаваемой пластине совпадает с тепловым потоком. В данной работе при произвольном числе Кнудсена рассматриваются параметры подобия для аналогии Рейнольдса и тесно связанной с ней величины отношения потоков энергий, передаваемых пластинам.

Значение R сплошнородного течения Куэтта вязкого сжимаемого газа известно [119,120]. После простых преобразований оно принимает вид

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{Pr Ec} \quad (7.1)$$

Здесь $Pr = \mu \cdot c_p / k$ - число Прандтля; $Ec = U_r^2 / [c_p (T_1 - T_2)]$ - число Эккерта, μ - динамическая вязкость, k - коэффициент теплопроводности, c_p - удельная

теплоемкость при постоянном давлении. Для одноатомного газа $Pr = 2/3$ [38].

С другой стороны, в свободномолекулярном пределе ($Kn \rightarrow \infty$), используя известные выражения для потока энергии и напряжения трения, легко получить

$$R = \frac{1}{2} - \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{1}{Ec} \quad (7.2)$$

Здесь κ - показатель адиабаты [$\kappa = \kappa(Pr)$]. Для одноатомного газа $\kappa = 5/3$.

Таким образом, и в навье-стоксовом, и в свободномолекулярном режиме температуры поверхностей и их относительная скорость влияют на коэффициент аналогии Рейнольдса только через число Эккерта. Естественное предположить, что и в переходном режиме коэффициент аналогии Рейнольдса существенно зависит от величины числа Эккерта. В этом параграфе это предположение проверяется путем численного решения краевой задачи (1.1) - (1.3) методом прямого статистического моделирования.

Зависимости $R(Kn)$ для максвелловских молекул и для «твердых сфер» представлены на рис. 7.1–7.4 при различных U и T . Отметим, что в данном параграфе, в отличие от предыдущих, при вычислении характерной длины свободного пробега максвелловских молекул $\lambda = 3.2c(\sqrt{\pi}n_{av}\sigma_0)^{-1}$ используется $c = \sqrt{R_{gas}(T_1 + T_2)}$. Это приводит к тому, что число Кнудсена перестает зависеть от того, какая пластина является нижней, а какая верхней. Значения R для навье-стоксового режима показаны пунктиром. Сплошные линии соответствуют свободномолекулярным значениям R . Как видно из рис. 7.4 коэффициент аналогии Рейнольдса может быть положительным при всех Kn , может быть отрицательным при всех Kn , и даже в некоторых случаях может менять знак при изменении числа Кнудсена. Последнее

связано с рассмотренным в Разделе 1.5 эффектом изменения знака потока энергии, передаваемого пластине, при изменении числа Кнудсена.

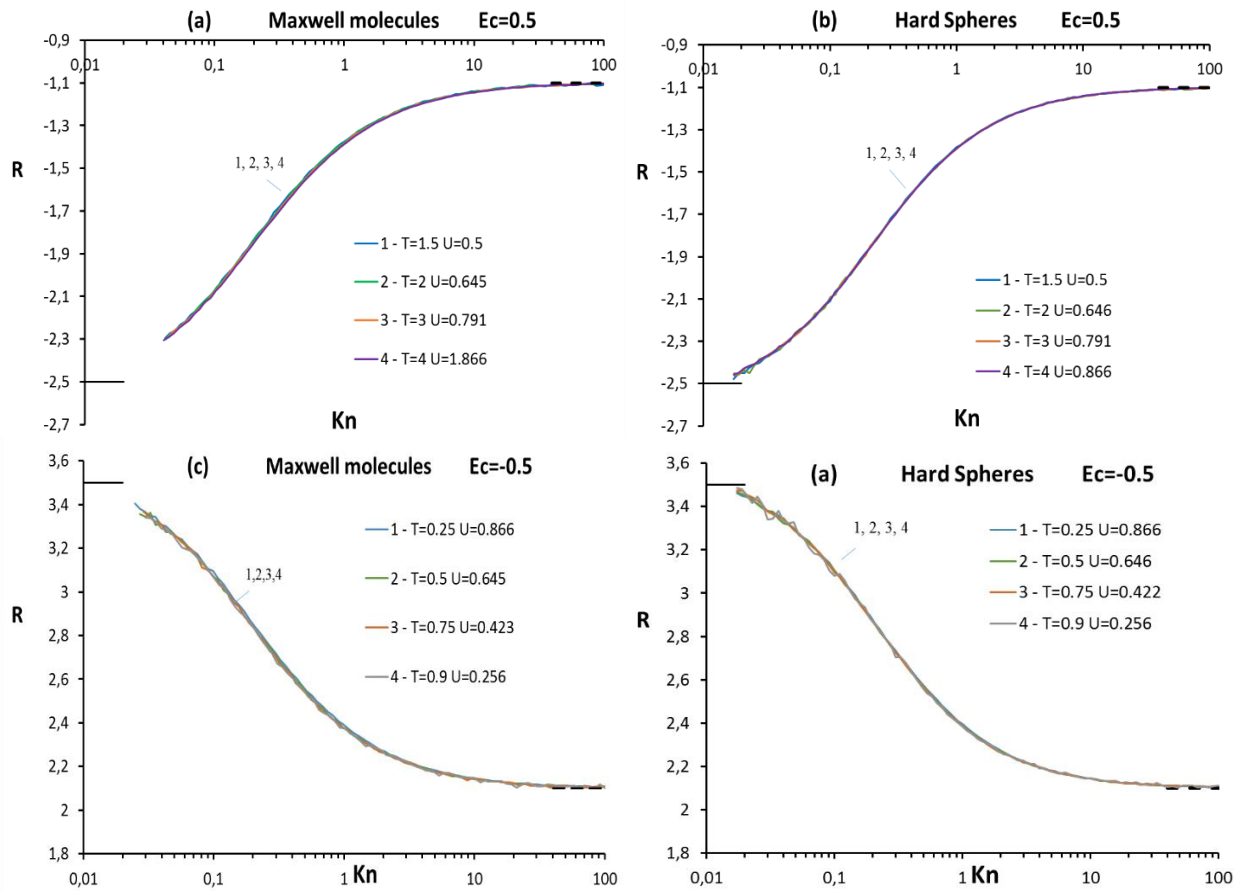


Рисунок 7.1. Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена при $|Ec| = 0.5$ и различных температурах и скоростях.

Из рис. 7.1-7.3 видно, что во всех рассмотренных случаях, как для максвелловских (псевдо) молекул, так и для «твердых сфер» значения U и T с точностью до статистических флуктуаций влияют на значение R только через числа Эккерта и Кнудсена. Такое совпадение кривых дает основания предположить, что коэффициент аналогии Рейнольдса является функцией только двух независимых переменных (Kn и Ec), а не трех (Kn, U и T). Отметим, однако, что зависимости, представленные на рис. 7.1-7.3 получены при $Ec \leq 2$. Результаты расчетов зависимостей $R(U)$ для $Ec = 5$ и $Ec = 10$ при $Kn = 0.1$ и $Kn = 0.25$ представлены на рис. 7.4.

Соответствующие зависимости $T(U)$ приведены на рис. 7.5. Как видно из рис. 7.1–7.4а,b коэффициент аналогии Рейнольдса при $0.25 < U < 1.25$ в рассмотренных случаях с графической точностью постоянен: различия между наибольшим и наименьшим значениями на графиках, представленных на рисунках 7.4а,b не превышают 0.9%. Однако, как видно из рис. 7.4с и рис. 7.4d, при существенно больших U и T их влияние на значение R при одних и тех же значениях чисел Эккерта и Кнудсена несомненно выходит за пределы статистических флуктуаций, хотя и не превышает 7%.

Как видно из рис. 7.1–7.4 при всех рассмотренных параметрах значение коэффициента аналогии Рейнольдса в переходном режиме лежит между ее навье-стоксовым и свободномолекулярным значениями.

$$\min \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5} \frac{1}{Ec} \right); \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{Ec} \right) \right] < \frac{E_1}{p_{xy} U_r} < \max \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5} \frac{1}{Ec} \right); \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{Ec} \right) \right]$$

Зависимости $E_1/p_{xy} U_r$ от Kn при $|Ec| \gg 1$ показаны на рис. 7.6. Как видно из рис. 7.6, коэффициент аналогии Рейнольдса может быть в этом случае с точностью до $0.35/Ec$ записан в виде

$$\frac{E_1}{p_{xy} U_r} \approx \frac{1}{2} - \frac{1.15}{Ec}.$$

Отметим, что при T порядка 1 и меньше условие $|Ec| \gg 1$ соответствует гиперзвуковым скоростям пластины.

На рис. 7.7 результаты расчетов коэффициента аналогии Рейнольдса для «твердых сфер» сравниваются с соответствующими расчетами для максвелловских (псевдо) молекул. Как видно из рис. 7.7 выбор модели молекулярного взаимодействия оказывает слабое влияние на величину коэффициента аналогии Рейнольдса.

Представленные на рис. 7.1–7.3 результаты наводят на мысль о целесообразности нормировки коэффициента аналогии Рейнольдса. Введем модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса

$$R_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{E_1}{p_{xy} U} \right) Ec$$

Зависимости R_m от Kn показаны на рис. 7.8 при различных Ec . Как видно из рис. 7.8 для всех рассмотренных чисел Эккерта при одном и том же законе взаимодействия молекул модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса R_m с высокой точностью зависит только от Kn .

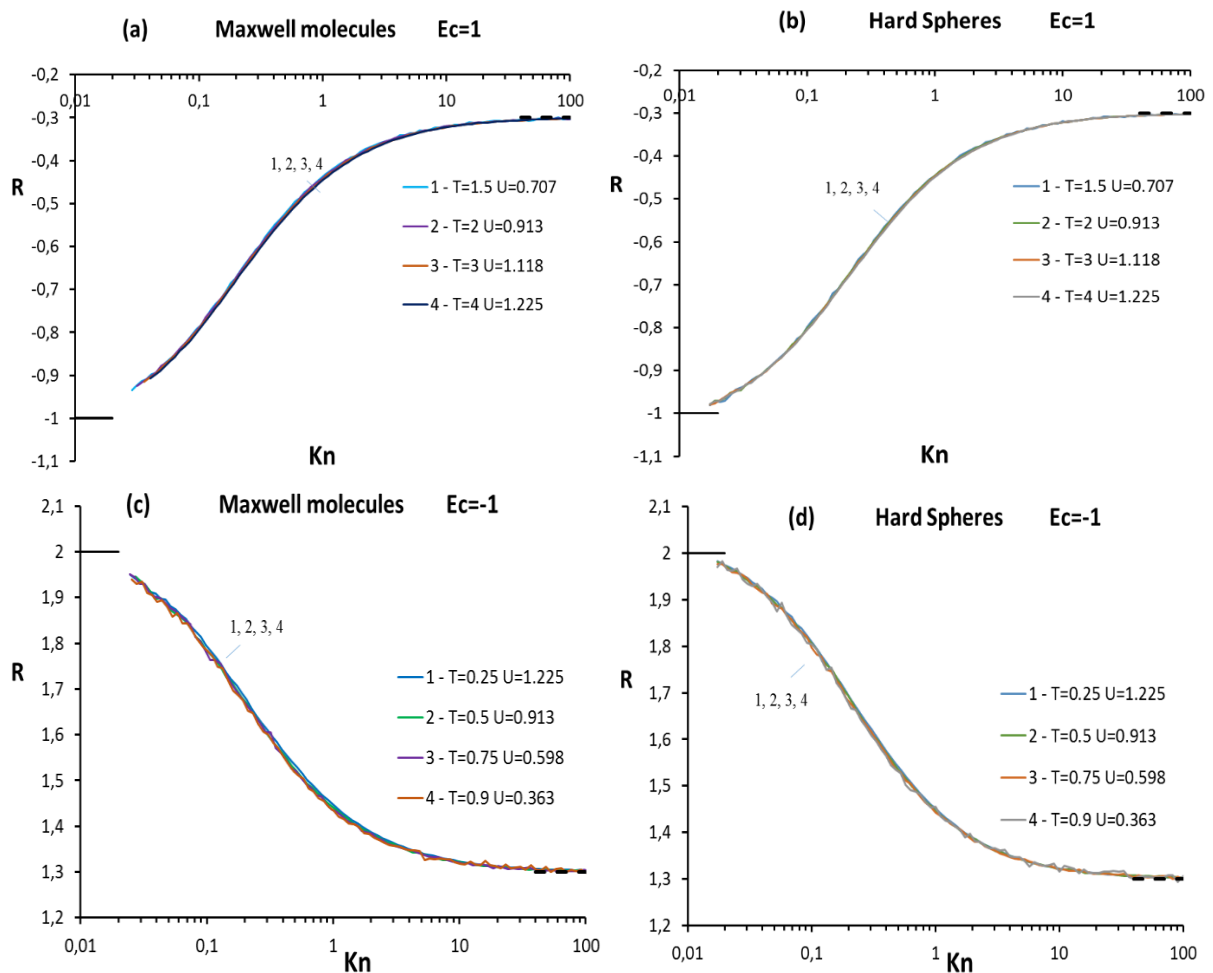


Рисунок 7.2. Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена при $|Ec|=1$ и различных температурах и скоростях.

Таким образом, с высокой точностью для всех рассмотренных U , T и Kn

$$\frac{E_1}{p_{xy}U} \approx \frac{1}{2} - \frac{2(\kappa-1)}{\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{R_m(Kn)}{Ec} \quad (7.3)$$

Рассмотрим теперь важный частный случай $T = 1$, т. е. $T_1 = T_2$. Из (7.1) и (7.2) следует, что при этом и в навье-стоксовом, и в свободномолекулярном пределах $R = 1/2$. Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от Kn в диапазоне от 0.02 до 100 при $T = 1$ и различных U для максвелловских молекул представлены на рис. 7.9. Как видно из графиков во всех случаях с точностью до статистических флуктуаций $R = 1/2$. Эти результаты, так же как аналогичный результат, полученный в [60] позволяют предположить, что коэффициент аналогии Рейнольдса для течения Куэтта равен $1/2$ при любых числах Кнудсена, если $T = 1$. Нетрудно показать, что это действительно так.

Уравнения сохранения импульса и энергии для течения Куэтта разреженного газа, удовлетворяющего уравнению Больцмана, имеют вид [38]:

$$\frac{\partial(\int m v_y v_x f(\mathbf{v}, y) d\mathbf{v})}{\partial y} = 0 \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial(\int v_y \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, y) d\mathbf{v})}{\partial y} = 0 \quad (7.5)$$

Из (7.4, 7.5) и условия непротекания с учетом (7.4) и (7.5) легко находим, что

$$\begin{aligned} -E_1 &= \int v_y \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, L) d\mathbf{v} \\ &= \int v_y \frac{m((v_x - U_r)^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, L) d\mathbf{v} + \end{aligned}$$

$$U_r \int m v_y v_x f(\mathbf{v}, y) d\mathbf{v} - m U_r^2 \int v_y f(\mathbf{v}, L) d\mathbf{v} = E_2 - p_{xy} U_r , ,$$

где E_2 - поток энергии, передаваемой верхней пластине

$$E_2 = \int v_y \frac{m((v_x - U_r)^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, L) d\mathbf{v}$$

Следовательно

$$\frac{E_1}{p_{xy}U_r} + \frac{E_2}{p_{xy}U_r} = 1 \quad (7.6)$$

Нетрудно показать, что (7.6) справедливо не только для течения Куэтта разреженного газа, но и в случае, когда между пластинами протекает жидкость. Действительно для того, чтобы сделать течение Куэтта возможным к пластинам должны быть приложены внешние силы F_1 и $F_2 = -F_1$. Линейная плотность F_1 и F_2 равна $F = \tau$, где τ - абсолютная величина напряжения трения (см. рис. 7.10).

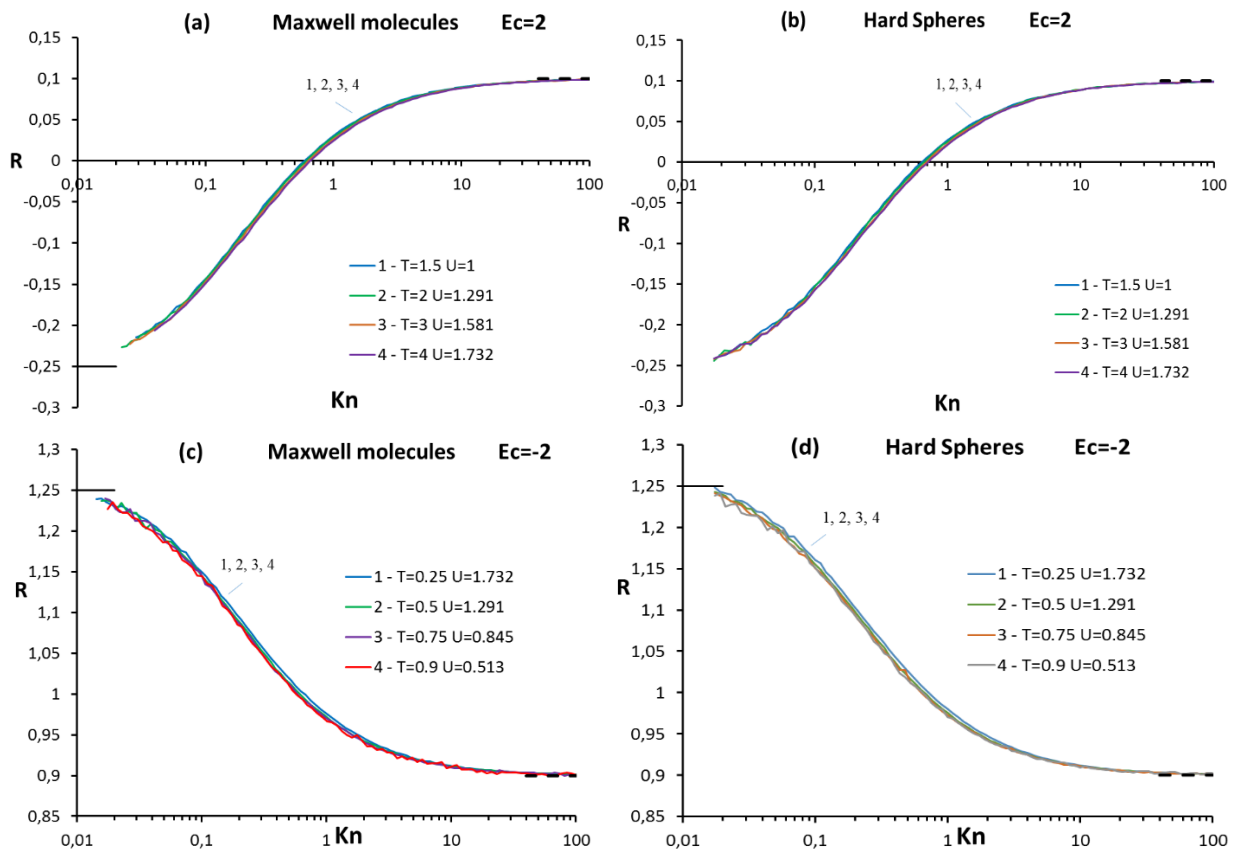


Рисунок 7.3. Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена при $|Ec| = 2$ и различных температурах и скоростях.

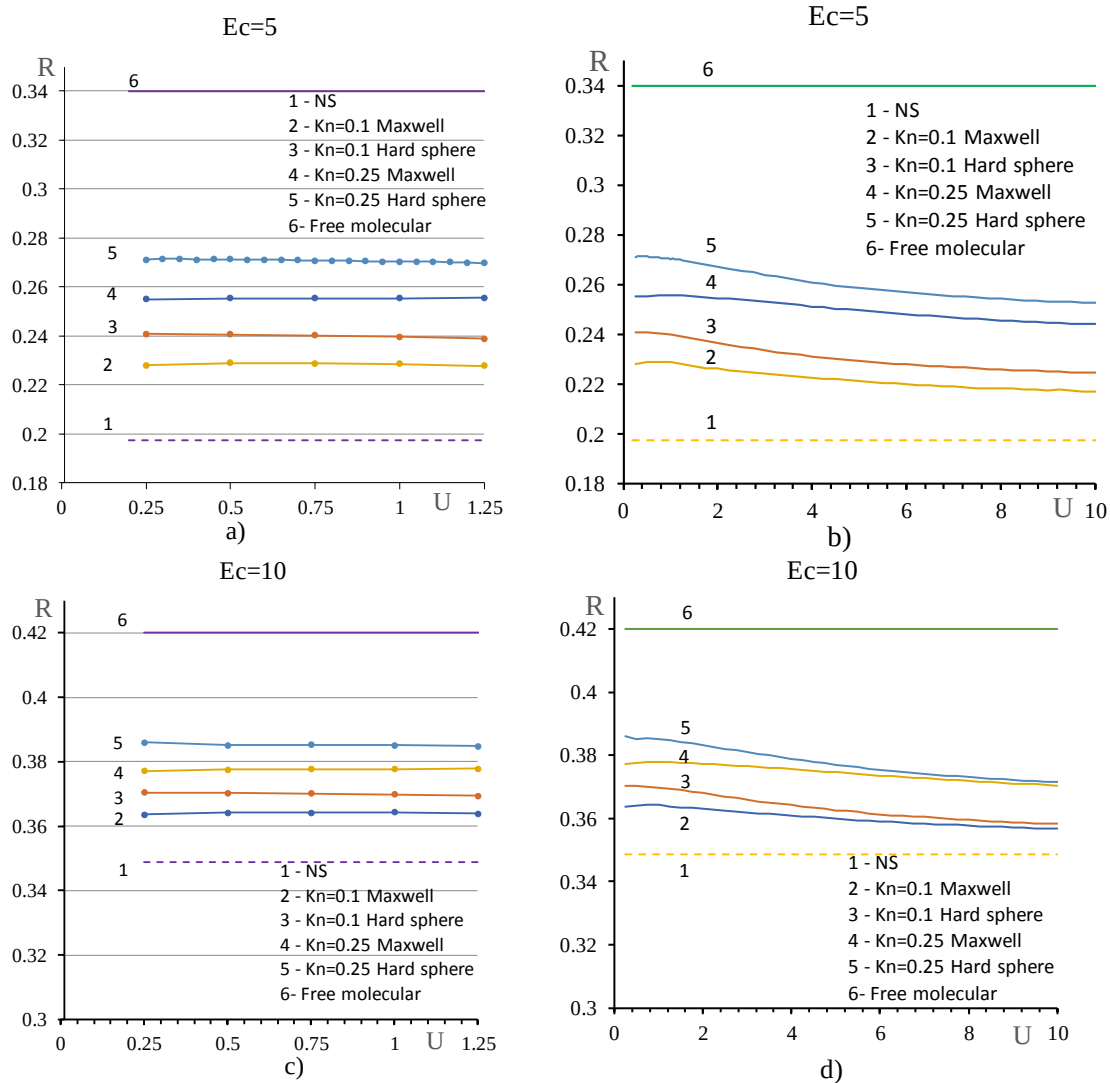


Рисунок 7.4. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса от относительной скорости пластин при различных числах Эккерта и Кнудсена для максвелловских молекул и для «твердых сфер».

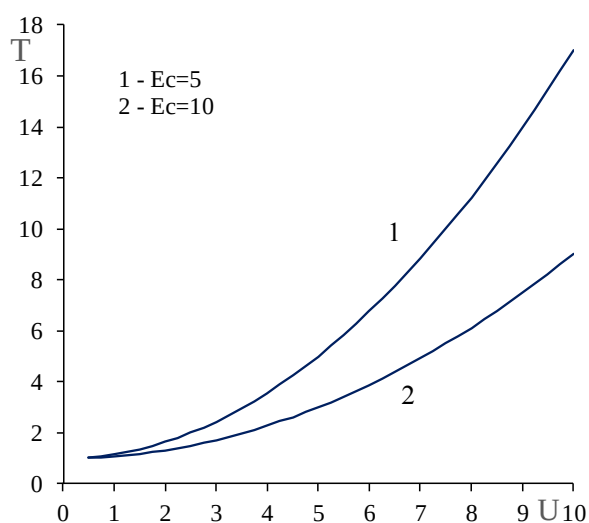


Рисунок 7.5. Температуры и скорости, соответствующие $Ec=5$ и $Ec=10$.

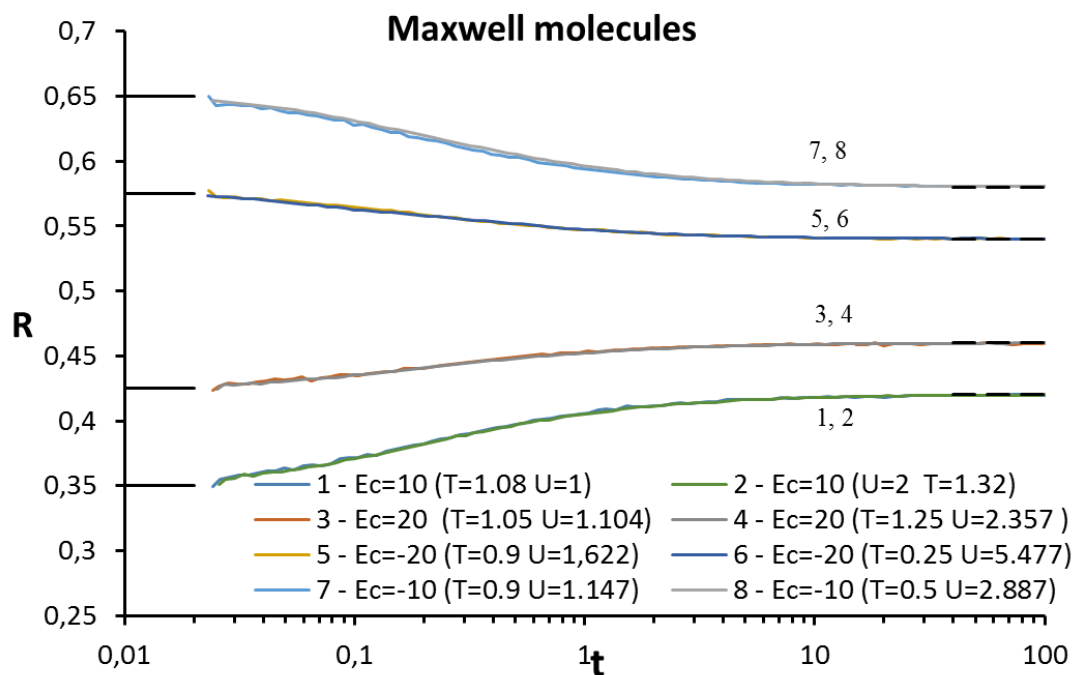


Рисунок 7.6. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена при больших значениях абсолютной величины числа Эккерта.

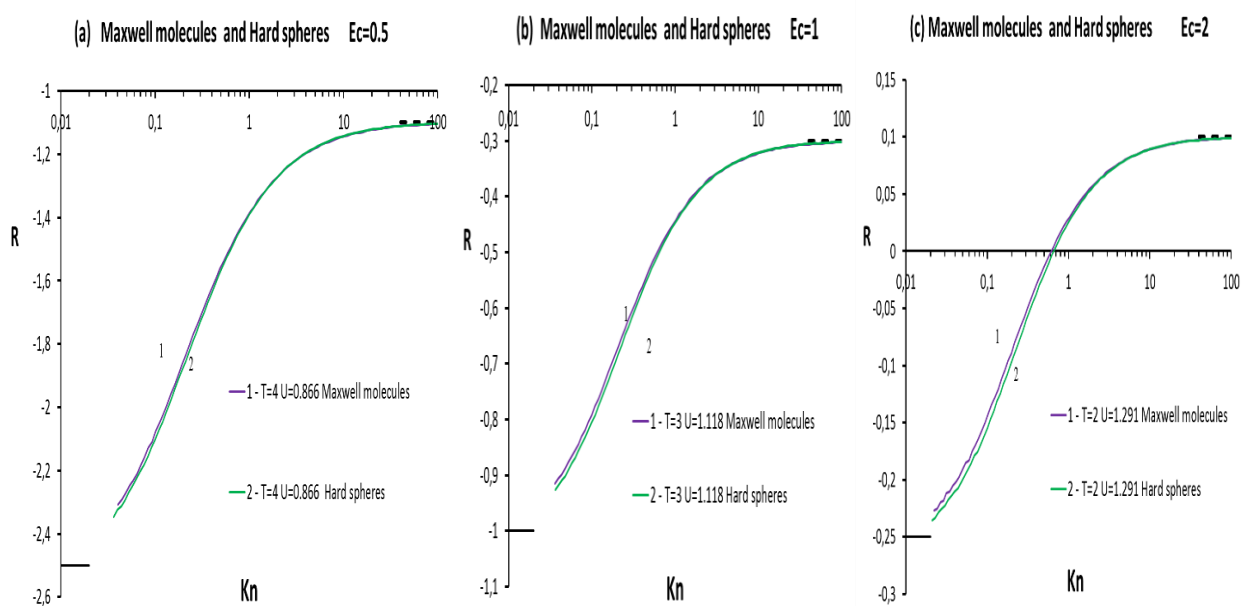


Рисунок 7.7. Коэффициент аналогии Рейнольдса для максвелловских молекул и для «твердых сфер».

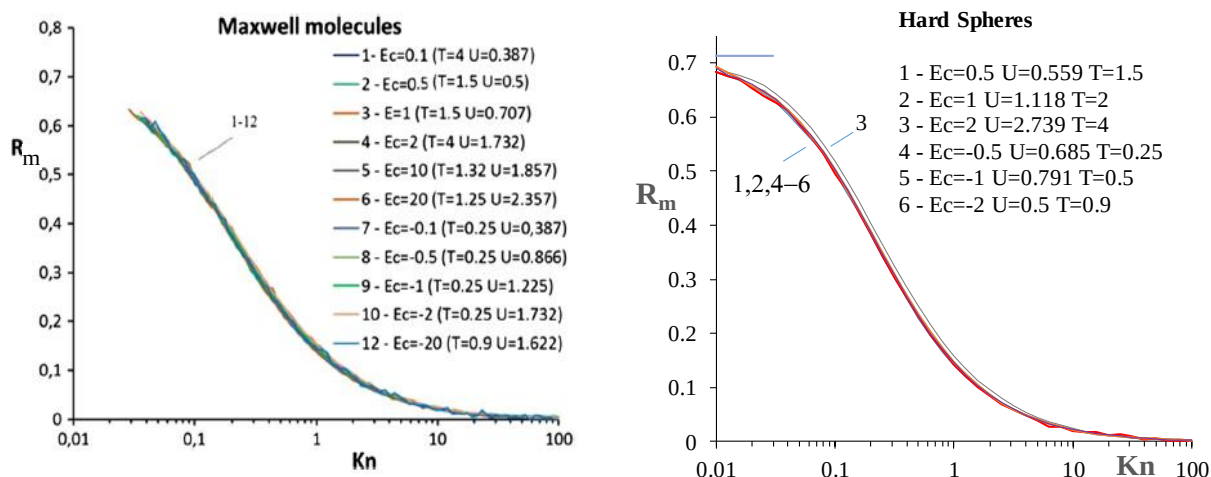


Рисунок 7.8. Зависимость модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена при различных числах Экерта.

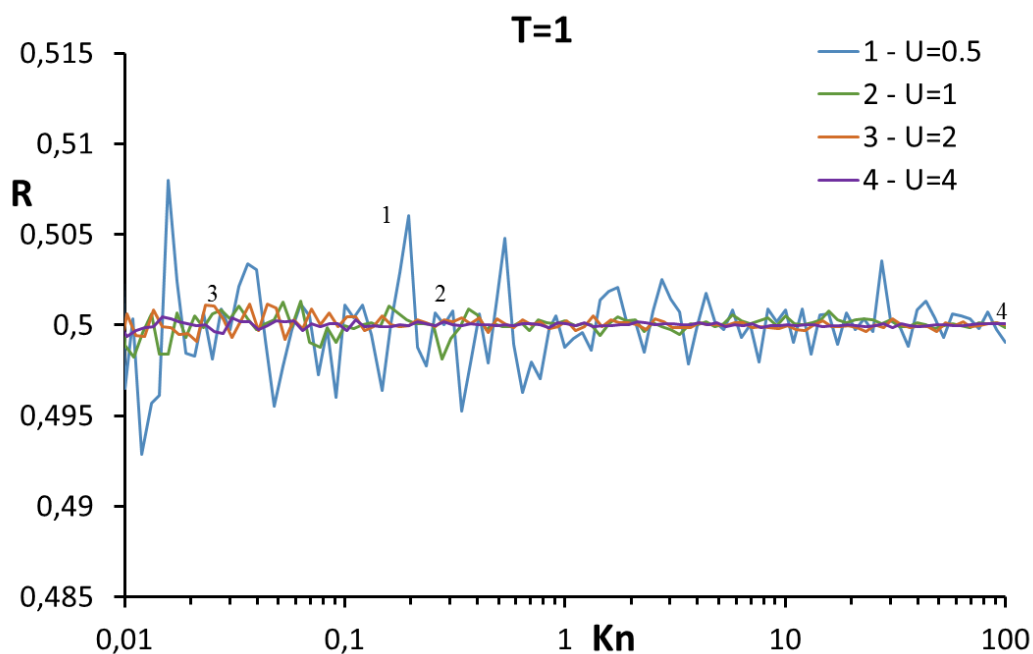


Рисунок 7.9. Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена при различных скоростях и одинаковых температурах поверхностей.

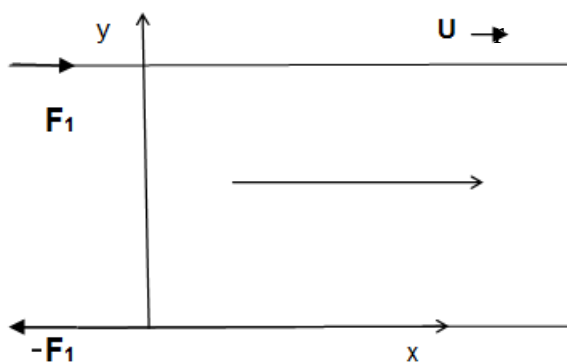


Рисунок 7.10. Течение Куэтта.

Применяя закон сохранения энергии к системе из двух пластин и стационарно текущей жидкости, получаем:

$$\frac{E_1}{\tau U_r} + \frac{E_2}{\tau U_r} = 1, \quad (7.7)$$

Соотношение (7.7) означает, что сумма аналогий Рейнольдса для нижней и верхней пластин течения Куэтта равна единице.

В случае $T_1 = T_2$ и одинаковых законов взаимодействия пластин с жидкостью (газом) течение Куэтта симметрично относительно плоскости $y = L/2$. Следовательно, потоки энергии, передаваемые поверхностям равны: $E_1 = E_2 = E$. В этом случае (7.7) принимает вид:

$$E = \frac{\tau U_r}{2}$$

Таким образом, в симметричной задаче Куэтта поток энергии, передаваемый пластине равен половине произведения напряжения трения на относительную скорость пластин. Это справедливо, как для жидкости, так и для разреженного газа при любых числах Кнудсена. Если законы взаимодействия пластин с газом или жидкостью различны, то коэффициент аналогии Рейнольдса может принимать другие значения. Например, если коэффициент аккомодации по энергии для верхней пластины равен нулю, то из (7.6) следует, что

$$\frac{E_1}{\tau U_r} = 1$$

при любых коэффициентах аккомодации по энергии нижней пластины.

Как видно из рис. 7.10-7.12, 1.15 при всех рассмотренных параметрах

$$R_1(Ec, Kn) + R_1(-Ec, Kn) \approx 1 \quad (7.8)$$

В частности

$$R_1(Ec(U, T), Kn) + R_1(Ec(U, 1/T), Kn) \approx 1 \quad (7.9)$$

Покажем, что соотношение (7.9) выполняется точно. Действительно в системе координат, связанной с верхней пластиной, краевая задача

принимает вид задачи Куэтта (1.1) - (1.3), но с $T = T_2 / T_1$. Остальные параметры остаются неизменными. Затем, используя (1.12), получаем соотношение.

$$R_1(Ec(U, T), Kn) + R_1\left(Ec\left(U, \frac{1}{T}\right), Kn\right) = 1$$

Отметим, что из (7.3) и (7.6) следует что

$$E_1 \approx 0 \text{ при } \frac{1}{2} - \frac{2(\kappa-1)}{\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{R_m(Kn)}{Ec} = 0$$

$$E_2 \approx 0 \text{ при } \frac{1}{2} - \frac{2(\kappa-1)}{\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{R_m(Kn)}{Ec} = 1$$

$$E_1/E_2 = -1 \text{ при } Ec = 0; \quad E_1/E_2 \rightarrow 1 \text{ при } |Ec| \rightarrow \infty.$$

При других значениях числа Эккерта, для всех рассмотренных значений U, T и Kn отношение потоков энергий, передаваемых нижней и верхней пластинам, зависит только от чисел Кнудсена и Эккерта и имеет вид

$$\frac{E_1}{E_2} \approx \left[\left[\frac{1}{2} - \frac{2(\kappa-1)}{\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{R_m(Kn)}{Ec} \right]^{-1} - 1 \right]^{-1}$$

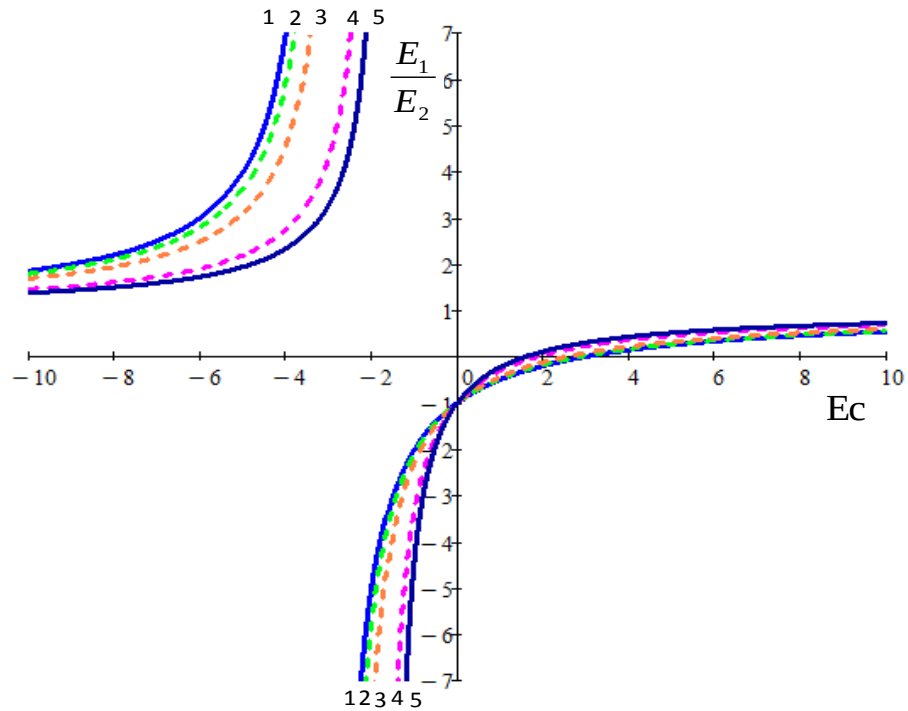


Рисунок 7.11. Зависимости отношений потоков энергий, передаваемых нижней и верхней пластинам, от числа Эккерта при различных числах Кнудсена: 1- навье-стоксов режим; 2 - $Kn = 0.0313$; 3 - $Kn = 0.104$; 4 - $Kn = 1.04$; 5 - свободномолекулярный режим.

Соответствующие зависимости E_1/E_2 от числа Эккерта для псевдомаксвелловских молекул при различных числах Кнудсена приведены на рис. 7.11.

7.2 ЗАДАЧА РЭЛЕЯ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ: ЭФФЕКТ МАКСИМУМА КОЭФФИЦИЕНТА АНАЛОГИИ РЕЙНОЛЬДСА ПО ЧИСЛУ ПРАНДТЛЯ

Рассмотрим вначале аналогию Рейнольдса для несжимаемой жидкости. Под аналогией Рейнольдса понимается величина отношения потока энергии, передаваемой пластине к произведению напряжения трения на скорость пластины

Прежде всего следует отметить, что поскольку задача Рэлея для несжимаемой жидкости автомодельна, коэффициент аналогии Рейнольдса не зависит от времени. Используя [121], несложно получить для течения Рэлея

$$\frac{E}{\tau U_s} \equiv R(\text{Pr}, \text{Ec}) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \text{Pr}} \int_0^{\infty} \text{erfc}(x) \exp\left[\left(1 - \frac{2}{\text{Pr}}\right)x^2\right] dx - \frac{1}{\text{Ec}\sqrt{\text{Pr}}} \dots \quad (7.10)$$

Здесь τ - напряжение трения на пластине; E поток энергии, передаваемый пластине (поток тепла); $\text{Pr} = \mu \cdot c / k$ - число Прандтля; $\text{Ec} = U_s^2 / c(T_s - T_\infty)$ - число Эккерта.

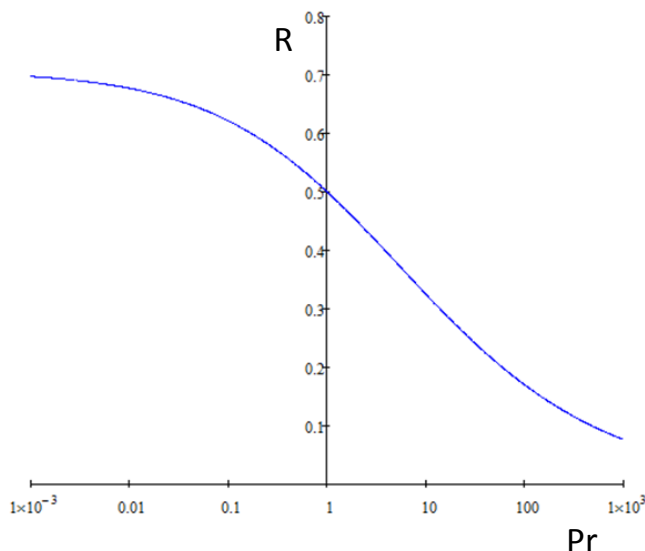


Рисунок 7.12. Коэффициент аналогии Рейнольдса для течения Рэлея несжимаемой жидкости при температуре пластины равной температуре невозмущенного газа.

Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Прандтля для течения Рэлея несжимаемой жидкости при $T_s = T_\infty$ приведена рис. 7.12.

Легко показать, что при $T_s = T_\infty$,

$$\lim_{Pr \rightarrow 0} R(Pr) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Pr \rightarrow 0$$

В важном частном случае $Pr = 1$, (7.10) принимает вид

$$R(1, Ec) = \frac{1}{2} - \frac{1}{Ec}.$$

Если $Ec > 0$ (т.е. $T_s > T_\infty$) и число Прандтля достаточно мало, поток энергии отрицателен (направлен от пластины). Однако увеличение вязкости и/или уменьшение теплопроводности приводят при некотором значении числа Прандтля к изменению знака потока энергии. С другой стороны, как следует из (7.10), $R(Pr, Ec) \rightarrow 0$ при $Pr \rightarrow \infty$. Следовательно, при некотором значении числа Прандтля $R(Pr, Ec > 0)$ достигает положительного максимума.

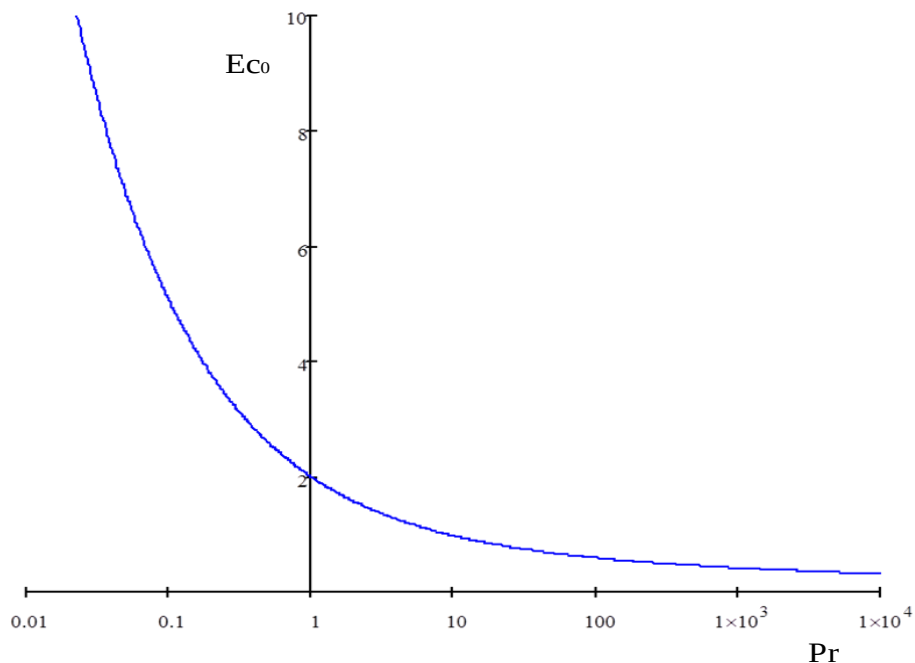


Рисунок 7.13. Число Эккерта при котором поток энергии, передаваемой пластине, равен нулю как функция числа Прандтля.

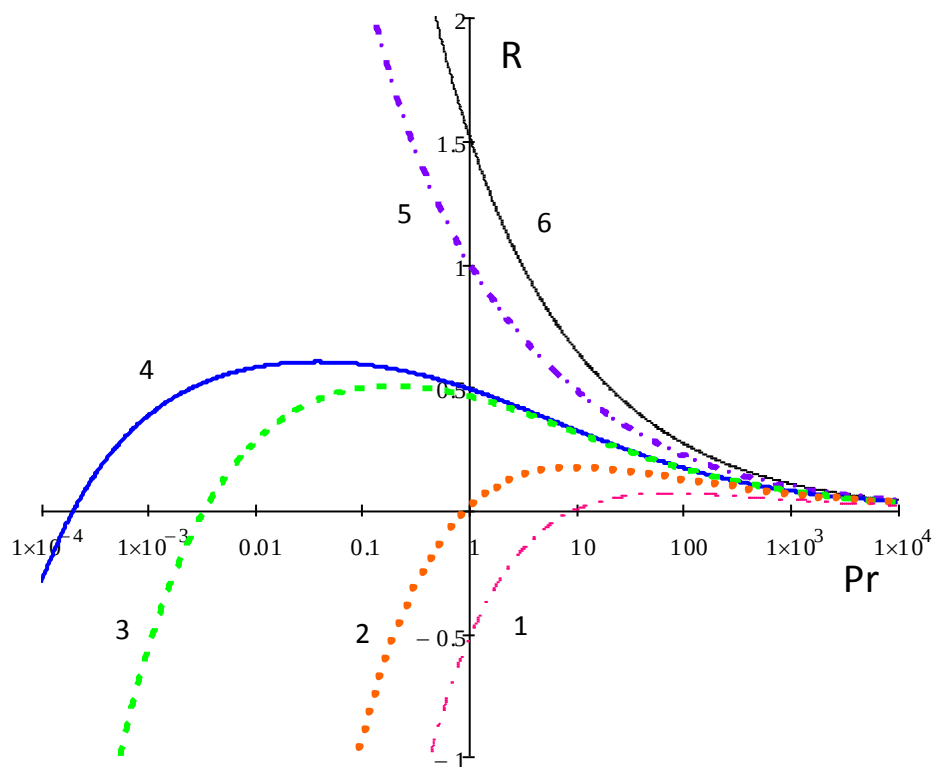


Рисунок 7.14. Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Прандтля для несжимаемой жидкости при различных значениях числа Эккерта: 1-6– $Ec=1, 2, 25, 100, -2, -1$.

Значение числа Эккерта, при котором поток энергии, передаваемый пластине, равен нулю

$$Ec_0(Pr) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(x) \cdot \exp\left[\left(1 - \frac{2}{Pr}\right)x^2\right] dx},$$

Легко видно, что

$$Ec_0(Pr) \rightarrow \infty; \quad Ec_0(Pr) \rightarrow 0.$$

$$Pr \rightarrow 0 \qquad Pr \rightarrow \infty$$

Эта зависимость приведена на рис. 7.13. Зависимости $R(Pr, Ec)$ при различных числах Эккерта показаны на рис. 7.14.

7.3 ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ АНАЛОГИИ РЕЙНОЛЬДСА В ТЕЧЕНИИ РЭЛЕЯ

Рассмотрим, теперь, аналогию Рейнольдса, т.е. соотношение между потоками импульса и энергии, передаваемыми пластине в разреженном газе.

Сначала рассмотрим свободномолекулярный режим. С помощью [71], легко найти коэффициент аналогии Рейнольдса для течения Рэлея многоатомного идеального газа:

$$\frac{E_s}{p_{xy} U_s} = \frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} \cdot \quad (7.11)$$

Здесь κ - показатель адиабаты; E_s - поток энергии, передаваемый пластине; p_{xy} - напряжение трения; $Ec = U_s^2 / c_p (T_s - T_\infty)$, c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Таким образом, коэффициент аналогии Рейнольдса в свободномолекулярном режиме также, как и коэффициент аналогии Рейнольдса для несжимаемой жидкости не зависит от времени. Она зависит только от числа Прандтля и числа Эккерта (κ различна при различных Pr).

Рассмотрим, теперь, аналогию Рейнольдса для переходного режима. Как отмечалось выше, решение задачи нахождения потоков импульса и энергии, передаваемых пластине в задаче Рэлея, зависит от трех безразмерных переменных $T_w = T_s / T_\infty$; $U_w = U_s / c_\infty$; $t = \bar{t} \cdot c_\infty / \lambda_\infty$. Выясним от какого количества независимых переменных зависит коэффициент аналогии Рейнольдса. Рассмотрим в начале случай, когда температура пластины равна температуре невозмущенного газа.

В свободномолекулярном режиме при $T_s = T_\infty$ из (7.11) получаем

$$\frac{E_s}{p_{xy} U_s} = \frac{1}{2} \quad (7.12)$$

С другой стороны, с помощью (7.10), для несжимаемой жидкости при $Pr=2/3$ (число Прандтля одноатомного газа) получаем $R=0.527$. Естественно

предположить, что в переходном режиме течения Куэтта моноатомного газа также, как в сжимаемом навье-стоксовом режиме при $T_w = 1$

$$\frac{E_s}{p_{xy} U_s} \approx \frac{1}{2} \quad (7.13)$$

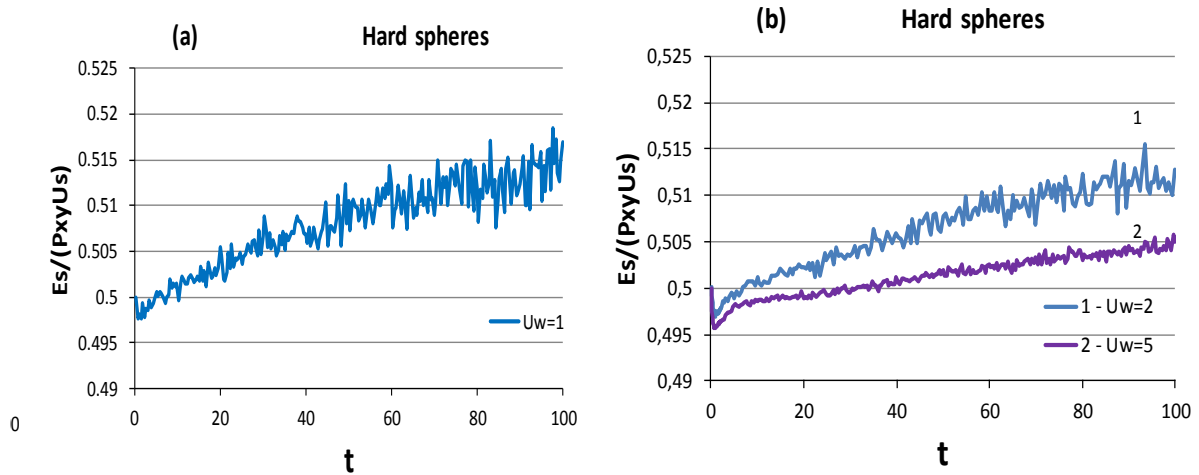


Рисунок 7.15. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса от времени при различных значениях скорости пластины для $T_w = 1$.

Зависимости $E_s/p_{xy} U_s$ от t показаны на рис. 7.15 для различных U_w от 1 до 5. Отметим, что при $U_w = 1$ изменение плотности газа невелико, в то время как при $U_w = 5$ плотность газа меняется весьма существенно. На рис. 7.15 безразмерное время t изменяется от 0 до 100. При этом режим течения меняется от свободномолекулярного до навье-стоксового. Как видно из рис. 7.15, для t близких к нулю значение $E_s/p_{xy} U_s$ очень близко к свободномолекулярному пределу: 0.5. С другой стороны при $U_w = 1$ и $t = 100$ значение $E_s/(p_{xy} U_s)$ очень близко к 0.527, т.е. к значению коэффициента аналогии Рейнольдса для несжимаемой жидкости при числе Прандтля соответствующем одноатомному газу ($Pr=2/3$). Заметим, что, как видно из графиков увеличение U_w не приводит к увеличению влияния t на $E_s/(p_{xy} U_s)$. Таким образом, как видно из графиков, коэффициент аналогии Рейнольдса

при $T_w = 1$ слабо зависит от времени и от скорости пластины, и формула (7.13) остается справедливой с точностью до нескольких процентов.

Конечно, результаты численных расчетов, представленные на рис. 7.15, не являются строгим математическим доказательством справедливости (7.13) для любых U_w и t . Однако, они определенно являются сильным аргументом в пользу такого вывода и сильным стимулом для дальнейшего анализа.

Рассмотрим теперь влияние на аналогию Рейнольдса дополнительного потока энергии, который создается из-за разности между температурой пластины и температурой невозмущенного газа. Зависимости $E_s/p_{xy}U_s$ от t показаны на рис. 7.16 и рис. 7.18 для различных U_w и T_w . Свободномолекулярные значения $E_s/p_{xy}U_s$ показаны на рис. 7.16 и рис. 7.18 сплошными линиями, а значения $E_s/p_{xy}U_s$ для несжимаемой жидкости - пунктиром. Как видно из рис. 7.16 и рис. 7.18, значения U_w и T_w влияют на величину $E_s / (p_{xy}U_s)$ главным образом через число Эккерта. Таким образом, полученные результаты указывают на то, что коэффициент аналогии Рейнольдса в переходном режиме является в основном функцией двух переменных (t и Ec), а не трех (t , U_w и T_w). Коэффициент аналогии Рейнольдса может быть положительным, отрицательным или даже может менять знак при некотором t (см. рис. 7.16). Последнее связано с эффектом перемены знака потока энергии в задаче Рэлея.

Как видно из рис. 7.16, значения коэффициента аналогии Рейнольдса во всех рассмотренных случаях приблизительно находятся в диапазоне между ее свободномолекулярными значениями и ее значениями для несжимаемой жидкости.

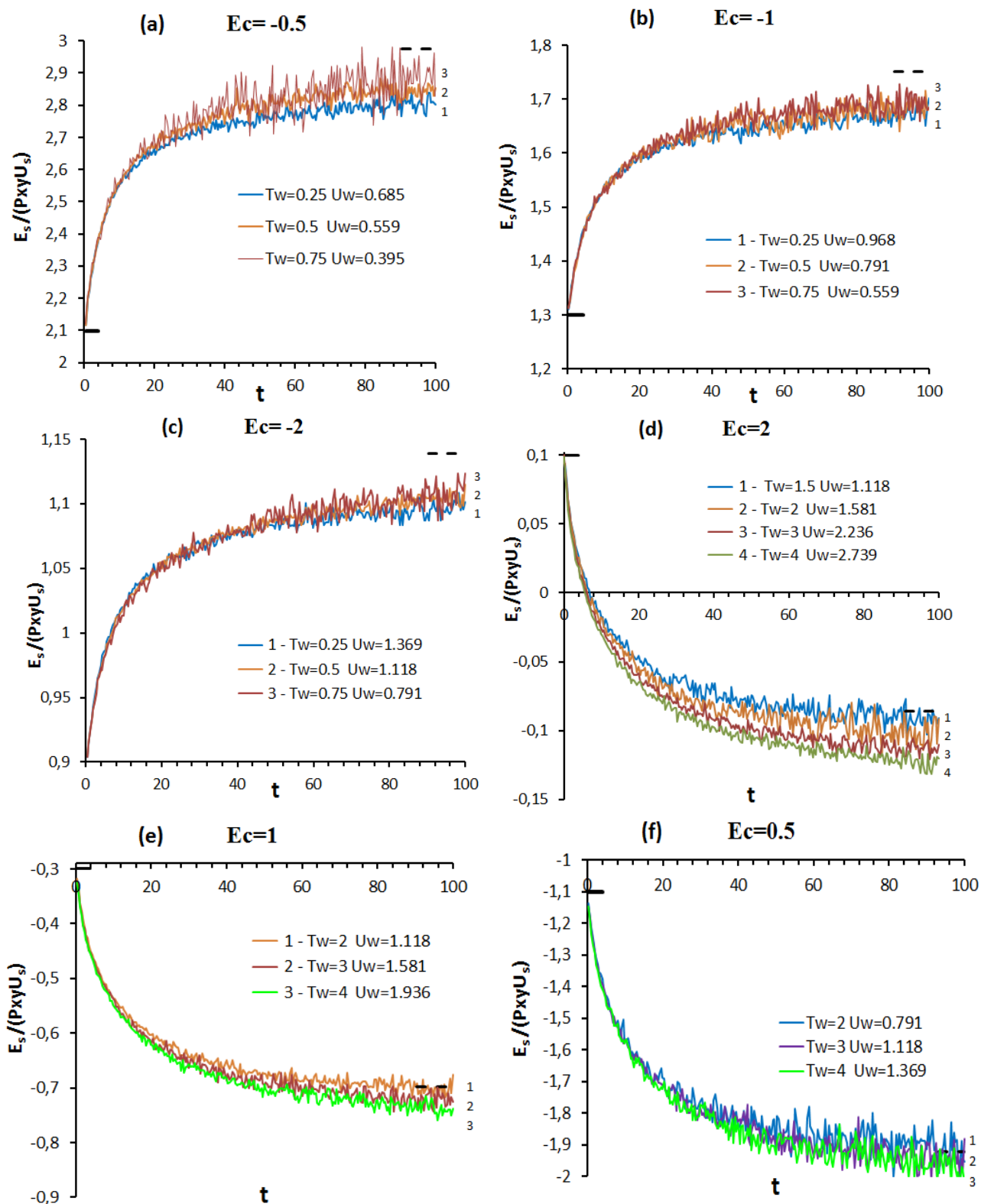


Рисунок 7.16. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса от времени при различных значениях числа Экерта.

$$\min \left[\left(0.5 - \frac{0.8}{Ec} \right), \left(0.5267 - \frac{1.225}{Ec} \right) \right] \lesssim \frac{E_s}{p_{xy}U_s} \lesssim \max \left[\left(0.5 - \frac{0.8}{Ec} \right), \left(0.5267 - \frac{1.225}{Ec} \right) \right] \quad (7.14)$$

Результаты, представленные на рис. 7.16 позволяют путем нормировки ввести модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса, а именно:

$$R_m = \left(\frac{E_s}{p_{xy} U_s} - 0.5 + \frac{0.8}{Ec} \right) \left(0.0628 - \frac{1}{Ec} \right)^{-1}$$

Зависимости R_m от t показаны на рис. 7.17 для различных $Ec \sim 1$ и $Ec \ll 1$ при $U_w < 2$. Как видно из рис. 7.17 при всех рассмотренных числах Эккерта модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса существенно зависит только от одного параметра t и от знака чисел Эккерта.

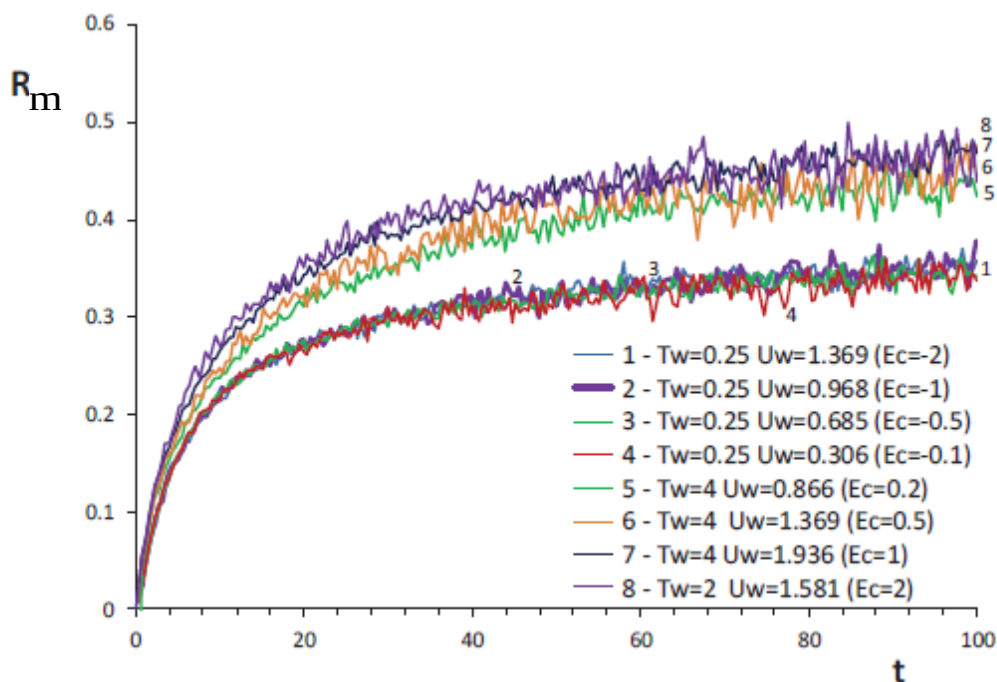


Рисунок 7.17. Зависимость коэффициента обобщенной аналогии Рейнольдса от времени при различных значениях числа Эккерта.

Таким образом, для всех рассмотренных U_w , T_w и t

$$\frac{E_s}{p_{xy} U_s} \approx \frac{1}{2} - \frac{\kappa+1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} - \overline{R_{m\pm}}(t) \left(\frac{1}{Ec} - 0.0628 \right),$$

где $\overline{R_{m+}}(t)$ и $\overline{R_{m-}}(t)$ — зависимости коэффициентов модифицированный аналогии Рейнольдса от времени, усреднённые по представленным на рис. 7.17 значениям для $Ec > 0$ и для $Ec < 0$ соответственно.

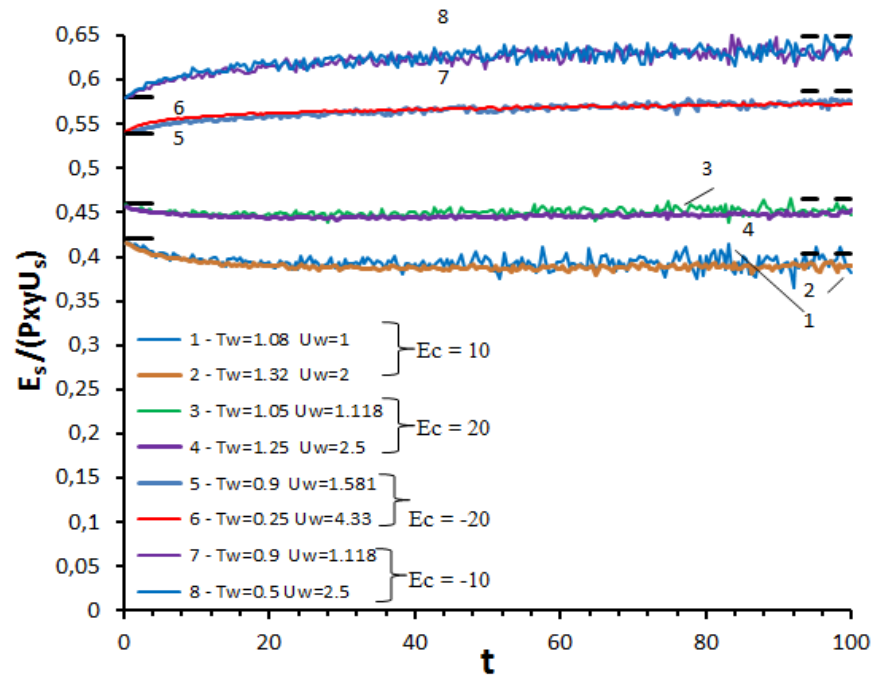


Рисунок 7.18. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса от времени при больших абсолютных значениях числа Эккерта.

Зависимости $E_s / p_{xy} U_s$ от t при $|Ec| \gg 1$ показаны рис. 7.18. Как видно из рис. 7.18, в этом случае коэффициент аналогии Рейнольдса также удовлетворяет (7.14) и может быть записан в виде

$$\frac{E_s}{p_{xy} U_s} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{Ec}. \quad (7.15)$$

Заметим, что в случае гиперзвуковых скоростей пластины при $|T_w - 1|$ порядка единицы и менее $|Ec| \gg 1$, следовательно, справедлива формула (7.15).

7.4 ЭФФЕКТ МАКСИМУМА КОЭФФИЦИЕНТА АНАЛОГИИ РЕЙНОЛЬДСА ПО ЧИСЛУ ПРАНДТЛЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНЫ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В этом разделе, сохраняя обозначения Гл. II и Гл. III, мы рассмотрим несжимаемый ламинарный пограничный слой с граничными условиями прилипания на пластине. В соответствии с [131]

$$\frac{E}{\tau U_{\infty}} \equiv R(\text{Pr}, \text{Ec}) = \frac{b(\text{Pr})}{2 \text{Pr}^{2/3}} - \frac{1}{\text{Ec} \text{Pr}^{2/3}}, \quad (7.16)$$

где

$$b(\text{Pr}) = 2 \text{Pr} \int_0^{\infty} [f''(\xi)]^{\text{Pr}} \left[\int_0^{\xi} [f''(\eta)]^{2-\text{Pr}} d\eta \right] d\xi, \quad (7.17)$$

$f(\xi)$ - решение задачи Коши для уравнения

$$f f''(\xi) + 2 f''' = 0 \text{ с начальными условиями} \quad (7.18)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0.33206 \quad (7.19)$$

Здесь τ - среднее по длине напряжение трения на пластине; E средний по длине поток энергии, передаваемый пластине (поток тепла); $\text{Pr} = \mu \cdot c_p / k$ - число Прандтля; $\text{Ec} = U_s^2 / c(T_s - T_{\infty})$ - число Эккерта. Рассматривается случай вязкой несжимаемой жидкости с постоянной динамической вязкостью μ , теплопроводностью k и удельной теплоемкостью при постоянном давлении C_p (для несжимаемой жидкости C_p совпадает с удельной теплоемкостью при постоянном объеме).

Выражение (7.17) для $\text{Pr} < 9$ аппроксимируется формулой [131]

$$b(\text{Pr}) = \sqrt{\text{Pr}} , \quad (7.20)$$

а для $\text{Pr} \geq 9$ выражением [166]

$$b(\text{Pr}) = 1.92 \text{Pr}^{1/3} - 1.34 \quad (7.21)$$

Если $\text{Ec} > 0$ (т.е. $T_s > T_\infty$) и число Прандтля достаточно мало, тогда поток энергии отрицателен (то есть направлен от пластины). Однако увеличение вязкости и / или уменьшение теплопроводности вызывает повышение температуры жидкости. Это приводит к изменению направления потока энергии при некотором значении числа Прандтля. С другой стороны, при ламинарном обтекании пластины отношение толщин температурного и динамического пограничных слоев при $\text{Pr} \rightarrow \infty$ стремится к нулю медленнее, чем $1/\text{Pr}$ и значит, $R \rightarrow 0$ при $\text{Pr} \rightarrow \infty$. Следовательно, для любого $\text{Ec} > 0$ коэффициент аналогии Рейнольдса достигает положительного максимума при определенном числе Прандтля.

Для нахождения экстремума используем условие

$$\frac{d}{d \text{Pr}} R(\text{Pr}, \text{Ec}) = 0$$

Оно приводит к уравнению

$$\text{Pr} \frac{d}{d \text{Pr}} b(\text{Pr}) - \frac{2}{3} b(\text{Pr}) + \frac{4}{3 \text{Ec}} = 0 ,$$

Для $\text{Pr} < 9$ используя (3.13), находим

$$\text{Pr}_{\max} \approx \frac{64}{\text{Ec}^2} , R_{\max} \approx \frac{3 \text{Ec}^{1/3}}{16} , \text{Ec} > 0 . \quad (7.22)$$

Для $\text{Pr} \geq 9$ используя (7.21), получаем

$$\text{Pr}_{\max} \approx \left(\frac{2.08}{\text{Ec}} + 1.40 \right)^3 , R_{\max} \approx \frac{0.344 \text{Ec}}{\text{Ec} + 1.49} , \text{Ec} > 0 . \quad (7.23)$$

Точные зависимости $R(\text{Pr}, \text{Ec})$, рассчитанные в соответствии с (7.16) - (7.19) при различных значениях числа Эккерта, показаны на рис. 7.19. Отметим, что в рассматриваемом случае коэффициент аналогии Рейнольдса не зависит от расстояния до передней кромки пластины и $R = 0.535$ для $\text{Pr} = 0.661$ (одноатомный газ) при $T_s = T_\infty$.

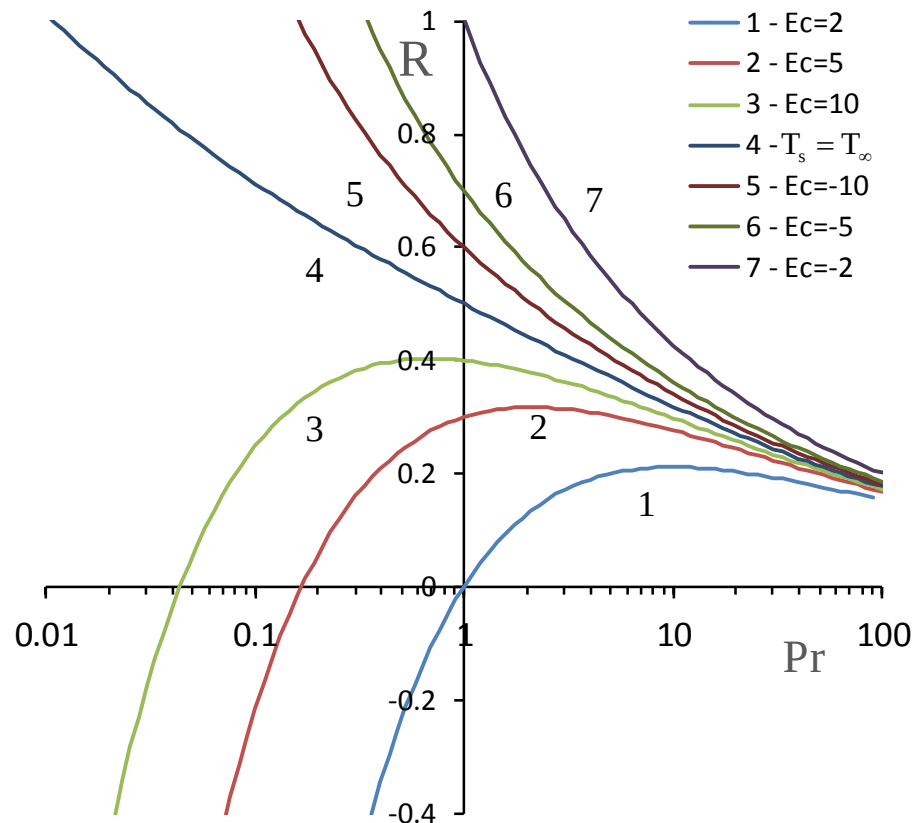


Рисунок 7.19. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Прандтля для несжимаемого пограничного слоя на плоской пластине при различных значениях числа Эккерта.

Значения $R_{\max}$, полученные по приближенным формулам (7.22) и (7.23), при $\text{Ec} = 2, 5, 10$ отличаются от точных максимальных значений на 6,7%, 1,1% и 0,2% соответственно.

Учитывая, что [166]

$$b(\text{Pr}) = 0.9254\sqrt{\text{Pr}} \quad (\text{Pr} \rightarrow 0),$$

находим выражение для асимптот

$$\text{Pr}_{\text{max}} = \frac{74.7}{E_c^2} \quad (E_c \rightarrow \infty) \quad ,$$

$$R_{\text{max}}(E_c) = 0.169 E_c^{1/3} \quad (E_c \rightarrow \infty).$$

Асимптоты $\text{Pr}_{\text{max}}(E_c)$ и $R_{\text{max}}(E_c)$ при $E_c \rightarrow 0$ имеют вид (7.23)

7.5 АНАЛОГИЯ РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНЫ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ.

Используя [71], легко получить выражение для коэффициента аналогии Рейнольдса при свободномолекулярном обтекании пластины:

$$\frac{E_y}{p_{xy} U_\infty} = \frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{E_s}$$

(7.24)

Здесь и ниже для переходного режима E_y и p_{xy} потоки энергии импульса, передаваемых пластине.

Таким образом, свободномолекулярный коэффициент аналогии Рейнольдса для многоатомного газа, также как и коэффициент аналогии Рейнольдса для вязкой несжимаемой жидкости зависит только от числа Прандтля (у газов с различными значениями κ различны и значения Pr) и от числа Эккерта и не зависит от расстояния от передней кромки пластины.

Рассмотрим теперь переходный режим. Оценка локального коэффициента аналогии Рейнольдса в начале переходной области при $Kn \ll 1$ и в ее конце при $Kn \gg 1$ имеет один и тот же вид

$$R_x = \frac{E_s}{p_{xy} U_\infty} \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{E_s},$$

Естественно предположить, что эта оценка будет справедлива и для всего переходного режима и

$$\frac{E_y}{p_{xy} U_\infty} \cong \varphi(Kn, E_s, X) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{E_s} \right),$$

где $\varphi(Kn, E_s, X)$ - функция чисел Кнудсена и Эккерта, а также расстояния до кромки пластины.

$$\frac{E_y}{p_{xy} U_\infty} \cong \varphi(Kn, E_s, X) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{E_s} \right), \quad (7.29)$$

где $\varphi(Kn, E_s, X)$ - функция чисел Кнудсена и Эккерта, а также расстояния до кромки пластины.

Естественно предположить, что эта оценка будет справедлива и для всего переходного режима. Для проверки этого предположения с помощью прямого статистического моделирования были проведены расчеты коэффициента аналогии Рейнольдса для сверхзвукового обтекания пластины разреженным газом. Ранее такие расчеты проводились только для гиперзвуковых чисел Маха [82].

Мы используем алгоритм [71]. Для моделирования физического пространства используется прямоугольную область. Размеры расчетной области выбираются так, чтобы возмущения от ее границ не доходили до пластины. Объем области делится на ячейки размерами $\Delta x, \Delta y$. Размер ячейки обычно варьируется в диапазоне от приблизительно $\lambda_{\infty} T_w / (3M)$, ($M > 1, T_w < 1$) до приблизительно $\lambda_{\infty} T_w / (3M)$, ($M > 1, T_w < 1$). В начальный момент времени моделируемые молекулы располагаются в объеме физического пространства в соответствии с максвелловской функцией распределения в набегающем потоке. Количество молекул в клетке равно 100. Шаг по времени обычно варьируется в диапазоне от приблизительно $\lambda_{\infty} T_w / (3c_{\infty} M)$ в случае $M > 1, T_w < 1$ до приблизительно $\lambda_{\infty} / (3c_{\infty})$ в случае $M \leq 1, T_w \geq 1$.

Увеличение времени моделирует эволюцию во времени данной динамической системы. Повторяя эту процедуру, удастся уменьшить статистическую неопределенность полученных результатов. Точность определяется величиной статистических колебаний и обычно варьируется от примерно 0,5% до 1,5%. Типичное число столкновений молекул с поверхностью в наших расчетах колеблется в диапазоне от 10^6 до $4 \cdot 10^6$. Расчеты проводились на персональном компьютере Intel Core i7, 3.5 ГГц. Типичное время расчета зависело от числа Кнудсена и варьировалось от часа до двух недель.

Экспериментальное исследование силы, действующей на пластину, расположенную под нулевым углом атаки в сверхзвуковом потоке

разреженного газа, проведено в [126]. В таблице 7.1 сравниваются значения среднего по длине пластины напряжения трения

$$F = \int_0^L \frac{p_{yy}}{\rho_{\infty} c_{\infty}^2 L} dx,$$

полученные DSMC, с результатами экспериментальных исследований [126] для пластины с удлинениями $AR = 3$ и $AR = 2,5$. В таблице 7.1 также приведены значения отношения среднего напряжения трения к соответствующим экспериментальным значениям F_{rel} . Там также приведены средние значения $\bar{F}_{rel}$ и стандартное отклонение σ .

AR	M	Kn	F				F_{rel}	$\bar{F}_{rel}$	σ
			Experiment [126]	DSMC	NS $\kappa=5/3$	NS $\kappa=7/5$			
2.5	2.51	0.0643	0.451	0.403	0.469	0.421	0.894	0.909	0.012
3	2.51	0.0319	0.344	0.313	0.364	0.324	0.912		
2.5	2.55	0.112	0.549	0.506	0.575	0.520	0.922		
2.5	2.73	0.0446	0.479	0.397	0.463	0.413	0.828	0.857	0.029
3	2.73	0.0219	0.344	0.305	0.354	0.314	0.886		
2.5	2.92	0.0312	0.466	0.374	0.445	0.396	0.803	0.827	0.024
3	2.92	0.0153	0.326	0.277	0.337	0.298	0.851		

Таблица 7.1 Напряжение трения на пластине: Сравнение экспериментальных и расчетных данных.

Разница (10%-17%) между экспериментальными данными и расчетами DSMC может является результатом ряда следующих обстоятельств:

1) Экспериментальные коэффициенты поверхностного трения, полученные в [126] без учета эффектов толщины, получены с точностью $\pm 5\%$.

2) Простые оценки с использованием экспериментальных значений ударного давления и толщины пластины из [126] показывают, что неучтенные эффекты толщины могут составлять около 10% и выше в силе трения, измеренной в [126]. Они усиливаются с увеличением числа Маха, что соответствует результатам, приведенным в таблице 1 и, скорее всего, и являются главной причиной наблюдаемых различий.

3) Соотношение сторон в эксперименте конечное и не очень большое: $AR = 2,5$ и $AR = 3$.

4) Молекулярная модель идеализирована.

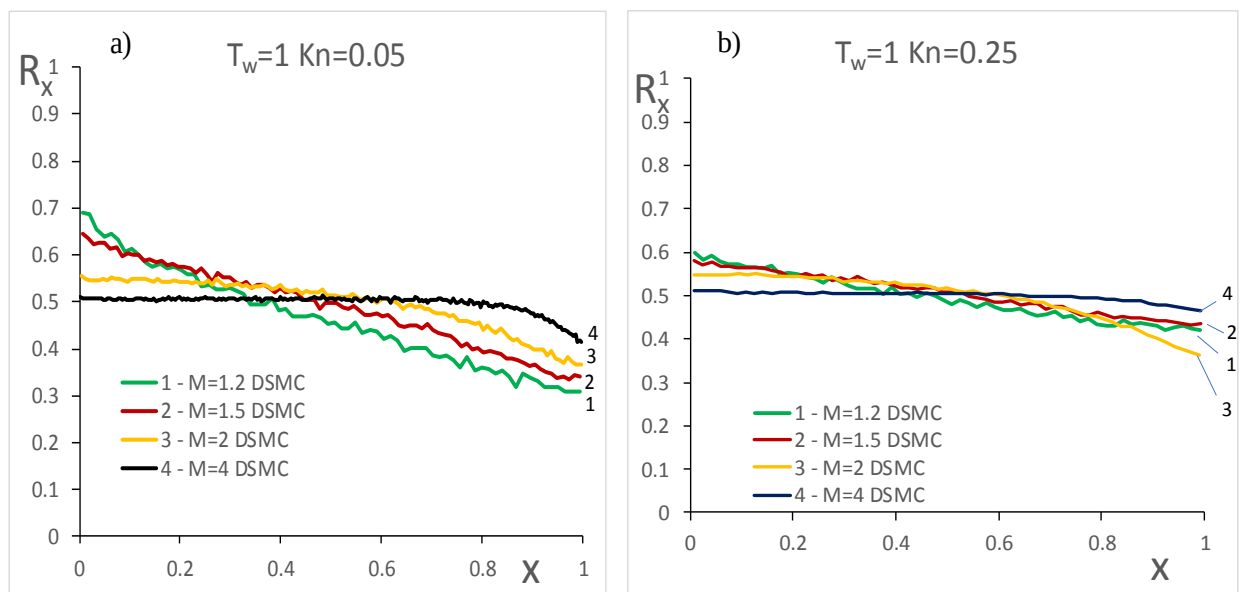


Рисунок 7.20. Зависимость локального коэффициента аналогии Рейнольдса от расстояния до передней кромки при температуре пластины, равной температуре набегающего потока.

Зависимости локального коэффициента аналогии Рейнольдса от расстояния до передней кромки пластины для сверхзвукового потока при $T_w = 1$ показаны на рис. 7.20 для различных чисел Маха и Кнудсена. Здесь $R_x = E_y / (p_{xy} U_\infty)$. Зависимости $R_x(X)$ для разных значений температурного отношения T_w и числа Маха, но при одинаковых значениях чисел Эккерта показаны на рис. 7.21. Как видно из рис. 7.20 и рис. 7.21 значение коэффициента локальной аналогии Рейнольдса определяется в первую очередь значением числа Эккерта. Прямое статистическое моделирование

подтверждает приведенные выше оценки $R_x(X)$ для сверхзвукового диапазона чисел Маха.

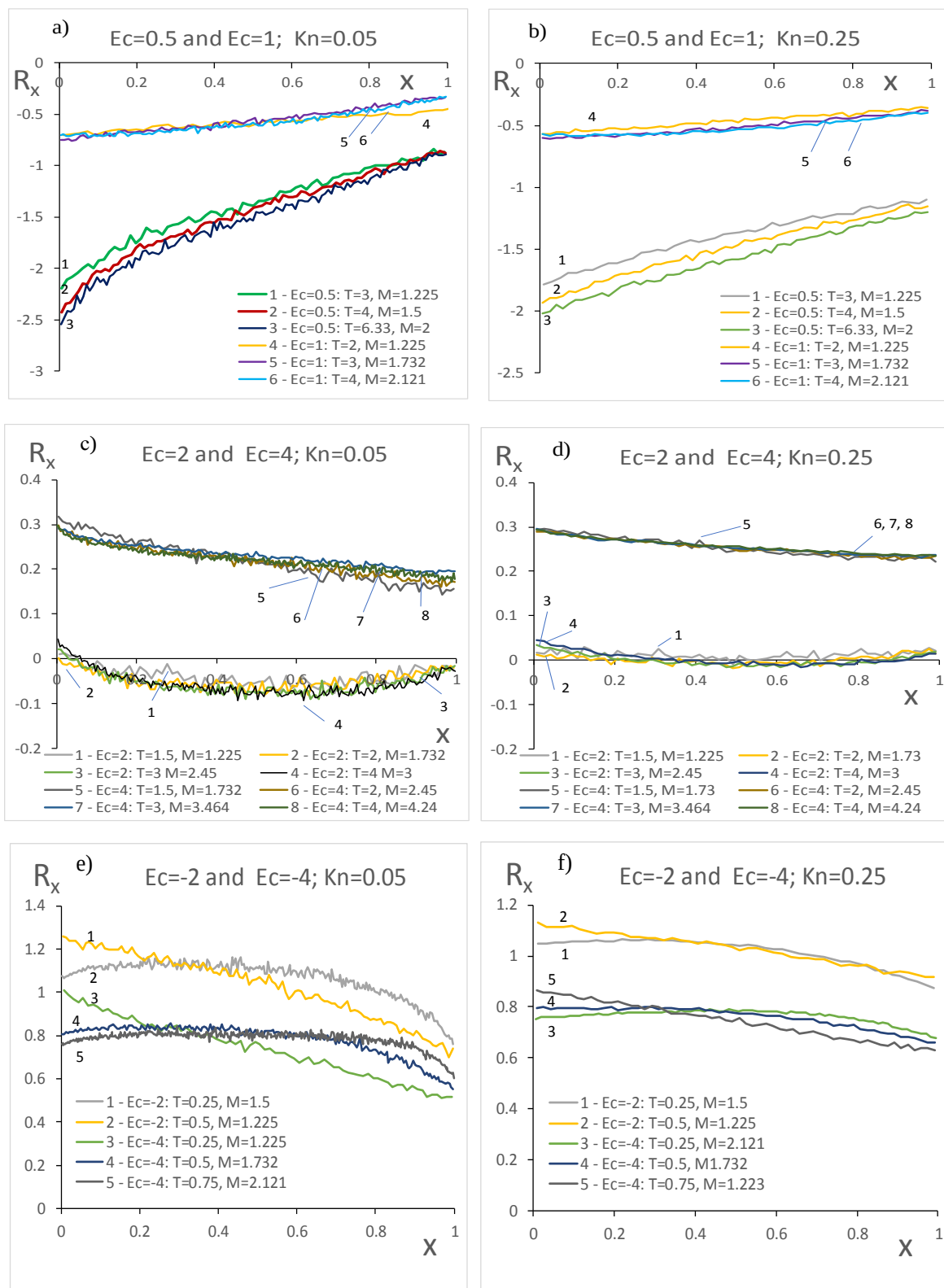


Рисунок 7.21. Распределение коэффициента аналогии Рейнольдса вдоль пластины.

Отметим, что различия в значениях R_x при неизменных Kn, Ec, X , но различных M и T_w увеличиваются по мере приближения к трансзвуковому диапазону чисел Маха. Результаты расчетов коэффициента интегральной аналогии Рейнольдса изображены на рис. 7.22.

Здесь

$$R = \frac{\int_0^L E_y dx}{\int_0^L p_{xy} dx U_\infty}$$

Мы видим, что вплоть до $M = 1,2$ коэффициент интегральный аналогии Рейнольдса при сверхзвуковом обтекания пластины в основном зависит от числа Эккерта и числа Кнудсена. Как видно из сравнения рис. 7.20, рис. 7.21 и рис. 7.22, в некоторых случаях это для коэффициента интегральной аналогии справедливо даже в большей степени, чем для коэффициента локальной. Последнее объясняется тем, что вклады областей вблизи передней и задней кромок имеют противоположные знаки.

Отнормируем коэффициент аналогии Рейнольдса, используя (7.16) и (7.24), и введем модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса.

$$R_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} - R \right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} - Ra(0.661, Ec) \right)^{-1},$$

где $Ra(0.661, Ec)$ – коэффициент аналогии Рейнольдса для несжимаемой жидкости, см. Раздел 7.4.

Зависимости модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена при различных числах Эккерта для переходного режима показаны на рис. 7.23.

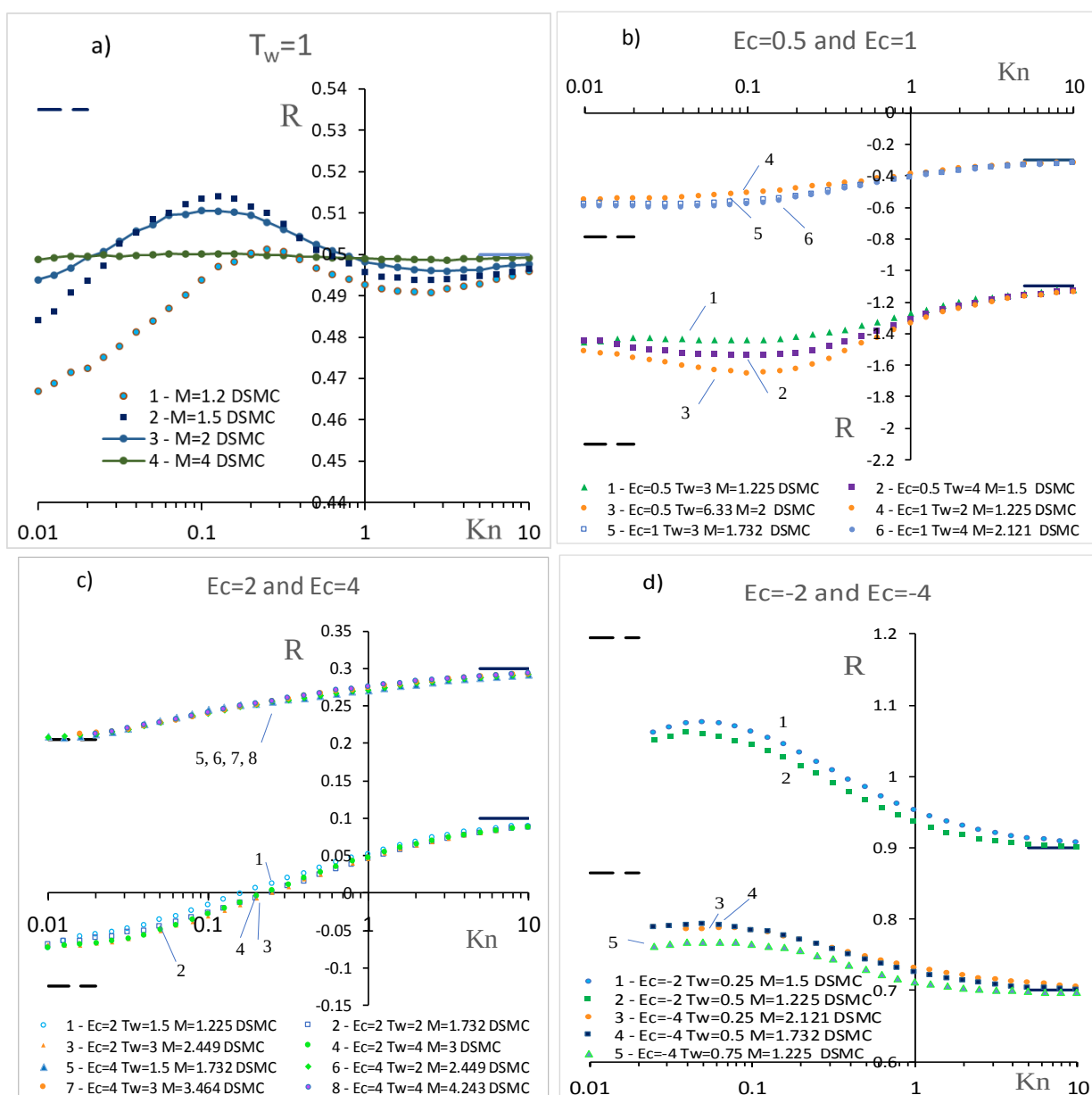


Рисунок 7.22. Коэффициент интегральной аналогии Рейнольдса при различных значениях чисел Маха и отношений температуры пластины к температуре невозмущенного газа.

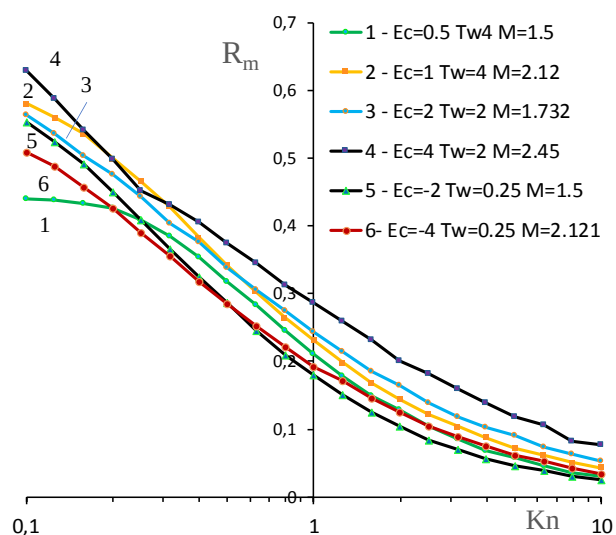


Рисунок 7.23. Модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса при различных числах Кнудсена и Эккерта.

Как видно из рис. 7.23, модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса зависит от числа Кнудсена гораздо сильнее, чем от числа Эккерта.

7.6 АНАЛОГИЯ РЕЙНОЛЬДСА И ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

В данном разделе анализируются различные режимы течения продольного цилиндрического течения Куэтта. В ней исследуются свойства аналогии Рейнольдса и свойства отношений величин погонных потоков энергий, передаваемых граничным поверхностям.

7.6.1 Постановка задачи

Рассматривается установившееся течение Куэтта разреженного одноатомного газа между двумя соосными цилиндрами. Внутренний цилиндр радиуса r_1 и температуры T_1 находится в покое. Внешний цилиндр радиуса r_2 и температуры T_2 движется со скоростью u_{rel} параллельной оси z . Средняя плотность газа и средняя числовая плотность газа равны соответственно ρ_{av} и n_{av} .

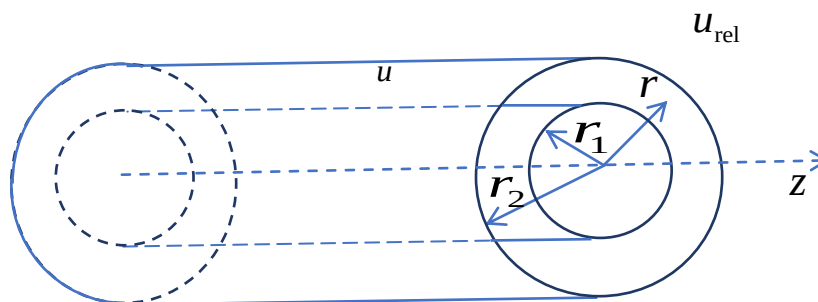


Рисунок 7.24. Схема продольного цилиндрического течения Куэтта.

Для рассматриваемой конфигурации, течение газа описывается уравнением Больцмана для функции распределения молекул по скоростям f , записанным в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = J(f, f'), \quad (7.30)$$

где r - расстояние от оси z , φ - азимутальная координата, а z -ось цилиндрической системы координат совпадает с общей осью цилиндров.

Молекулы отражаются от поверхностей диффузно с температурой, равной температуре поверхности:

$$f = f_1 = n_1 (2\pi R_{\text{gas}} T_1)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}{2R_{\text{gas}} T_1} \right], v_r > 0, r = r_1, \quad (7.31)$$

$$f = f_2 = n_2 (2\pi R_{\text{gas}} T_2)^{-3/2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + v_\varphi^2 + (v_z - u_{\text{rel}})^2}{2R_{\text{gas}} T_2} \right], v_r < 0, r = r_2, \quad (7.32)$$

Здесь $J(f, f')$ - интеграл столкновений молекул [38]; v_r , v_φ , и v_z - компоненты скоростей молекул в цилиндрической системе координат; R_{gas} - газовая постоянная, параметры функции распределения n_1 и n_2 находятся из условия баланса между падающими и отраженными молекулами. Используется молекулярная модель «твердые сферы». Для этой модели средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = (\sqrt{2} n_{\text{av}} \sigma_{\text{sp}})^{-1}$, где σ_{sp} - сечение столкновения. Изучается поведение напряжения трения и потока энергии $P_{rz}(r), E(r)$:

$$P_{rz}(r) = \int m v_z v_r f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v}, \quad E(r) = \int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r) d\mathbf{v},$$

где $d\mathbf{v} = dv_r dv_\varphi dv_z$, m - масса молекулы.

7.6.2 Взаимосвязь между гидродинамическими переменными.

Напряжения сдвига $P_{zn1}(r)$, $P_{zn2}(r)$ и потоки энергии, передаваемые цилиндрам E_1 , E_2 равны:

$$P_{zn1} = -P_{zr}(r_1), \quad P_{zn2} = P_{zr}(r_2), \quad (7.33)$$

$$E_1 = -E(r_1), \quad E_2 = \int v_r \frac{m[v_r^2 + v_\varphi^2 + (v_z - u_{\text{rel}})^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v}. \quad (7.34)$$

Величина потока энергии зависит от выбора системы координат. Здесь и выше под «потоком энергии, передаваемой цилиндру», как и в [71], понимается поток энергии в системе координат, связанной с цилиндром. Это значение совпадает со скоростью изменения внутренней энергии цилиндра на единицу площади, если другая сторона поверхности цилиндра термически изолирована.

Взяв моменты в уравнении Больцмана, можно получить уравнения баланса для продольного импульса и энергии:

$$\frac{d}{dr}(rP_{rz}(r)) = 0, \quad (7.35)$$

$$\frac{d}{dr}(rE) = 0. \quad (7.36)$$

Интегрируя (7.35), находим с учетом (7.33), что напряжение сдвига на внешнем цилиндре пропорционально напряжению сдвига на внутреннем цилиндре:

$$P_{zn2} = -P_{zn1} / \beta, \quad (7.37)$$

где $\beta = r_2 / r_1$.

Используя условие непроницаемости, легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \int v_r \frac{m[v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} &= \int v_r \frac{m[v_r^2 + v_\varphi^2 + (v_z - u_{\text{rel}})^2]}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} + \\ &+ u_{\text{rel}} \int m v_r v_z f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} - m u_{\text{rel}}^2 \int v_r f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v} = E_2 + P_{nz2} u_{\text{rel}}. \end{aligned}$$

Интегрируя (7.36), находим, что

$$\int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_1) d\mathbf{v} = \beta \int v_r \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)}{2} f(\mathbf{v}, r_2) d\mathbf{v}.$$

Таким образом, с учетом (7.34) получаем

$$E_2 = -\frac{E_1}{\beta} + \frac{P_{zn1}}{\beta} u_{\text{rel}}. \quad (7.38)$$

Далее исследуется коэффициент аналогии Рейнольдса для внутреннего цилиндра, определяемый по формуле:

$$R = \frac{E_1}{P_{zn1} u_{\text{rel}}}.$$

Используя соотношения (7.37) и (7.38), можно легко выразить через R аналогичный коэффициент аналогии Рейнольдса для внешнего цилиндра.

7.6.3 Режим сплошной среды и свободномолекулярный режим.

В режиме сплошной среды ($Kn \rightarrow 0$) краевая задача для уравнения Больцмана (7.30) - (7.32) сводится к краевой задаче для уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{dp}{dr} = 0, \quad (7.39)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r\mu \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad (7.40)$$

$$\frac{d}{dr} \left(rk \frac{dT}{dr} + r\mu \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad (7.41)$$

с граничными условиями прилипания на цилиндрах

$$u(r_1) = 0; \quad u(r_2) = u_{\text{rel}}. \quad (7.42)$$

Здесь u , p и T – скорость, давление и температура газа соответственно; μ – коэффициент динамической вязкости, k – коэффициент теплопроводности.

Коэффициент аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта получен в [119,120]. После несложных преобразований соответствующее соотношение из [119,120] принимает вид

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{Pr Ec}$$

Здесь $Pr = \mu \cdot c_p / k$ – число Прандтля; c_p – теплоемкость при постоянном давлении. Для одноатомного газа $c_p = 5R/2$, $Pr = 0.661$;

$Ec = u_{\text{rel}}^2 / [c_p (T_1 - T_2)]$ – число Эккерта

Результаты [119,120] обобщаются на случай продольного цилиндрического течения Куэтта. Действительно, из (7.41), (7.42) следует, что

$$k \frac{dT}{dr} + \mu u \frac{du}{dr} = \frac{r_1 E_1}{r}. \quad (7.43)$$

Так как число Прандтля постоянно, из (7.43) следует, что

$$k \frac{dT}{dr} + \mu u \frac{du}{dr} = \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{c_p T}{\text{Pr}} + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{r_1 E_1}{r} . \quad (7.44)$$

Интегрируя (7.44) по радиусу от r_1 до r_2 , получаем

$$c_p (T_2 - T_1) + \frac{\text{Pr} u_{\text{rel}}^2}{2} = \text{Pr} r_1 E_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\mu(T(r))r} .$$

Принимая во внимание, что

$$u_{\text{rel}} = r_1 P_{zn1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\mu(T(r))r} ,$$

находим

$$c_p (T_2 - T_1) + \frac{\text{Pr} u_{\text{rel}}^2}{2} = \frac{\text{Pr} u_{\text{rel}} E_1}{P_{zn1}} .$$

В результате получаем, что:

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Ec}} . \quad (7.45)$$

Свободномолекулярное продольное цилиндрическое течение Куэтта изучалось в [100]. Из результатов [100], для коэффициента аналогии Рейнольдса следует формула:

$$R = \frac{1}{2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1}{\text{Ec}} , \quad (7.46)$$

где κ - показатель адиабаты. Для одноатомного газа $\kappa = 5/3$.

Таким образом, для продольного цилиндрического течения Куэтта коэффициент аналогии Рейнольдса, как в режиме сплошной среды, так и в свободномолекулярном режиме, не зависит от величины отношения радиусов цилиндров β и совпадает с соответствующим значением коэффициента аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта.

7.6.4 Переходный режим

Из анализа размерностей следует, что коэффициент аналогии Рейнольдса зависит не более чем от трех безразмерных переменных:

$$t = \frac{T_1}{T_2}, U = \frac{u_{\text{rel}}}{c}, \text{Kn} = \frac{\lambda}{L}, \text{ где } c = \sqrt{2R_{\text{gas}} T_2}.$$

Как показано в Разд.7.6.3, в режиме сплошной среды и свободномолекулярном режиме T_1 , T_2 и u_{rel} влияют на коэффициент аналогии Рейнольдса только через число Эккерта. В Разд.7.1 численно показано, что это же свойство с хорошей точностью справедливо и для переходного режима плоского течения Куэтта. Выясним, в какой мере обладает таким свойством продольное цилиндрическое течение Куэтта.

Для этого численно методом прямого статистического моделирования [71] решим задачу Куэтта (7.30) - (7.32) при разных значениях T_1 , T_2 , u_{rel} , но при одних и тех же числах Эккерта. Мы используем схему Берда [71,72]. Пространство между цилиндрическими поверхностями разбивается на ячейки. Размер ячеек варьируется от $\lambda t / (6U)$ для $U > 1, t < 1$ до $\lambda / 6$ при $U \leq 1, t \geq 1$. Число моделирующих молекул в ячейке варьируется от 100 до 1000. Шаг по времени варьируется от $\lambda t / (6Uc)$ для $U > 1, t < 1$ до $\lambda / (6c)$ при $U \leq 1, t \geq 1$. Количество отражений молекул от внутреннего цилиндра составляет 64 000 000. Погрешность вычислений в основном менее 1%. Расчеты проводились на персональном компьютере Intel Core i7, 3.5 ГГц. Время расчета зависит от местного числа Кнудсена вблизи внешнего цилиндра и обычно варьируется от получаса до суток.

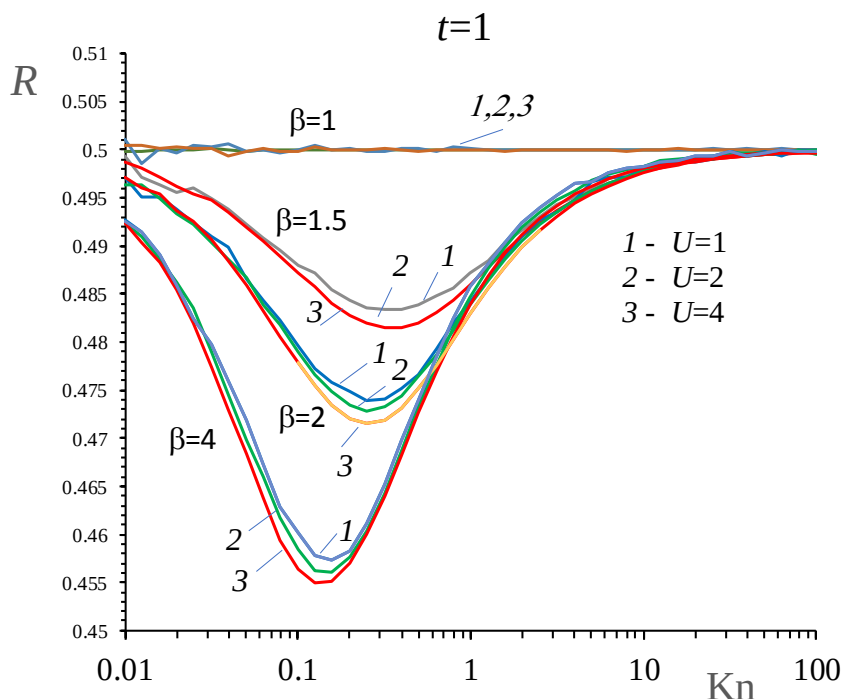


Рисунок 7.25. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена в случае одинаковых температур цилиндрических поверхностей для различных значений скорости U и отношения радиусов β .

Рассмотрим вначале важный случай равных температур, т.е. $T_1 = T_2$. Как видно из (7.45) и (7.46), в свободномолекулярном пределе, также как и в навье-стоксовом $R = 1/2$, при любом β . Зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Кнудсена в диапазоне от 0,01 до 100 для $t = 1$ и различных U и β приведены на рис. 7.25. Аналогия Рейнольдса близка к $1/2$ для всех рассмотренных β , но, в отличие от плоского случая ($\beta = 1$), она не равна $1/2$. По мере увеличения β значение R уменьшается.

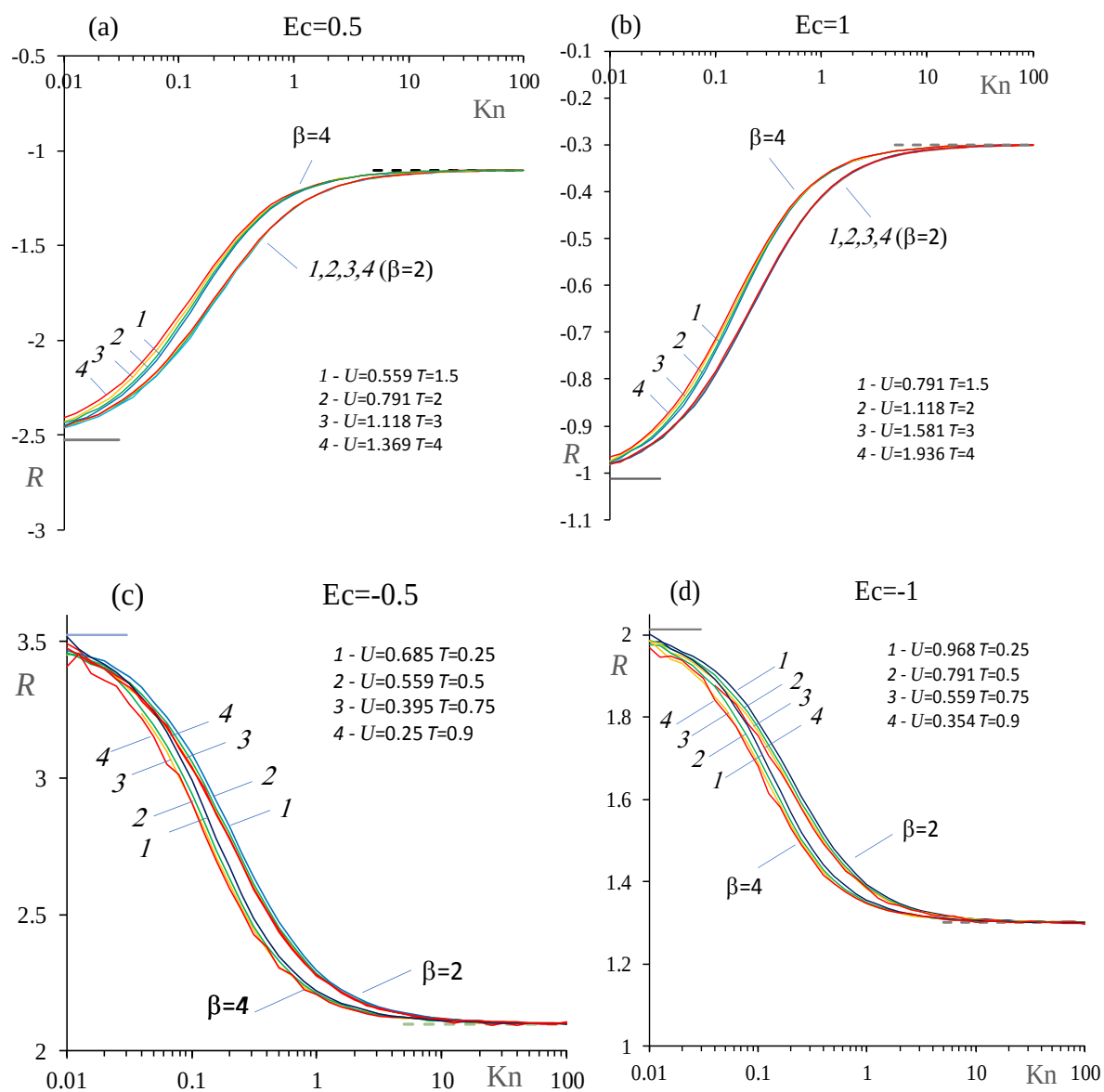


Рисунок 7.26. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена при различных температурах и скоростях для $|Ec| = 0.5$ и $|Ec| = 1$.

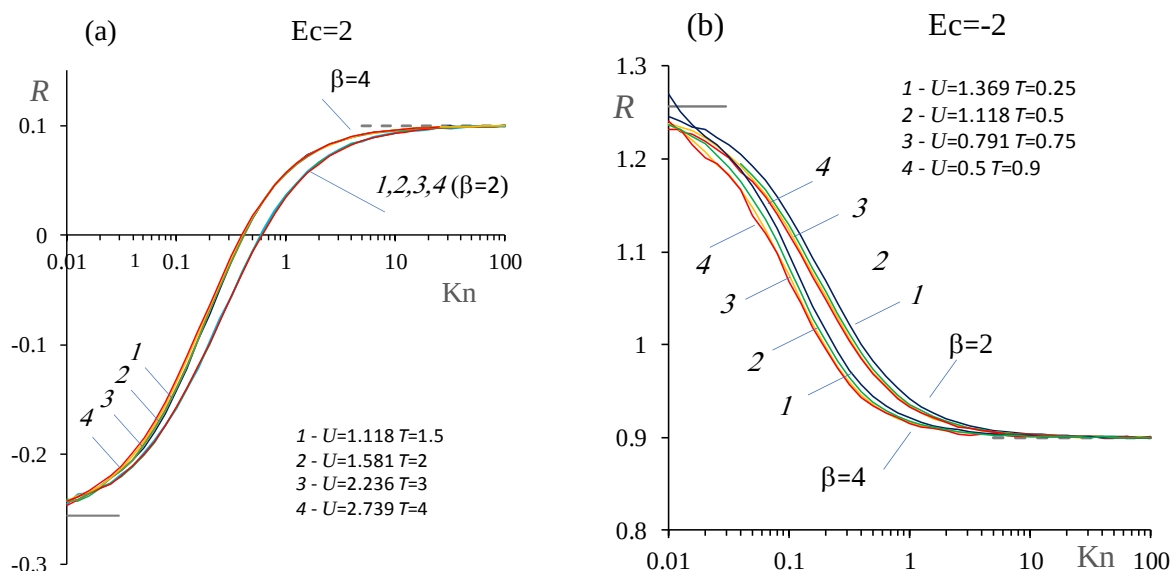


Рисунок 7.27. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса R от числа Кнудсена при различных температурах и скоростях для $|Ec| = 2$.

Зависимости R от Kn показаны на рис. 7.26, и рис. 7.27 для различных значений U и t . Величины R для одноатомного газа описываемого уравнениями Навье-Стокса показаны отрезками сплошной линии. Штриховые отрезки соответствуют значениям R для свободномолекулярного течения. Коэффициент аналогии Рейнольдса R может быть положительным при всех Kn , отрицательным при всех Kn , или даже, как функция Kn , может менять знак при некоторых значениях Kn (см. рис. 7.27а). Последнее обусловлено эффектом перемены знака потока энергии в течении Куэтта разреженного газа (см. Разд. 1.5).

Из рис. 7.25-7.27 видно, что во всех рассмотренных случаях относительная скорость и температуры поверхностей влияют на коэффициент аналогии Рейнольдса в основном через число Эккерта. Поэтому естественно сделать предположение, что коэффициент аналогии Рейнольдса является функцией, главным образом, трех независимых параметров (β , Kn , Ec), а не четырех (β , Kn , t , U). Таким образом, исходя из результатов расчетов, представленных на рис. 7.25-7.27, можно заключить, что отношение радиусов цилиндров, число Эккерта и число Кнудсена являются

основными независимыми параметрами подобия для коэффициента аналогии Рейнольдса в продольной цилиндрической задаче Куэтта.

Из зависимостей, приведенных на рис. 7.36 и рис. 7.27 видно, что для всех рассмотренных параметров коэффициент аналогии Рейнольдса находится между его свободномолекулярным и его навье-стоксовым значением:

$$\min \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Ec}} \right), \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa+1}{2\kappa} \frac{1}{\text{Ec}} \right) \right] < R < \max \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Ec}} \right), \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa+1}{2\kappa} \frac{1}{\text{Ec}} \right) \right]$$

Это позволяет, как и в плоском случае (см. Разделы 7.1, 7.3 и 7.5) модифицировать коэффициент аналогии Рейнольдса R путем его нормализации, введя модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса

$$R_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa+1}{2\kappa} \frac{1}{\text{Ec}} - \frac{E_1}{p_{xy} u_{\text{rel}}} \right) \text{Ec}.$$

Зависимости R_m от Kn для различных значений Ec и β показаны на рис. 7.28.

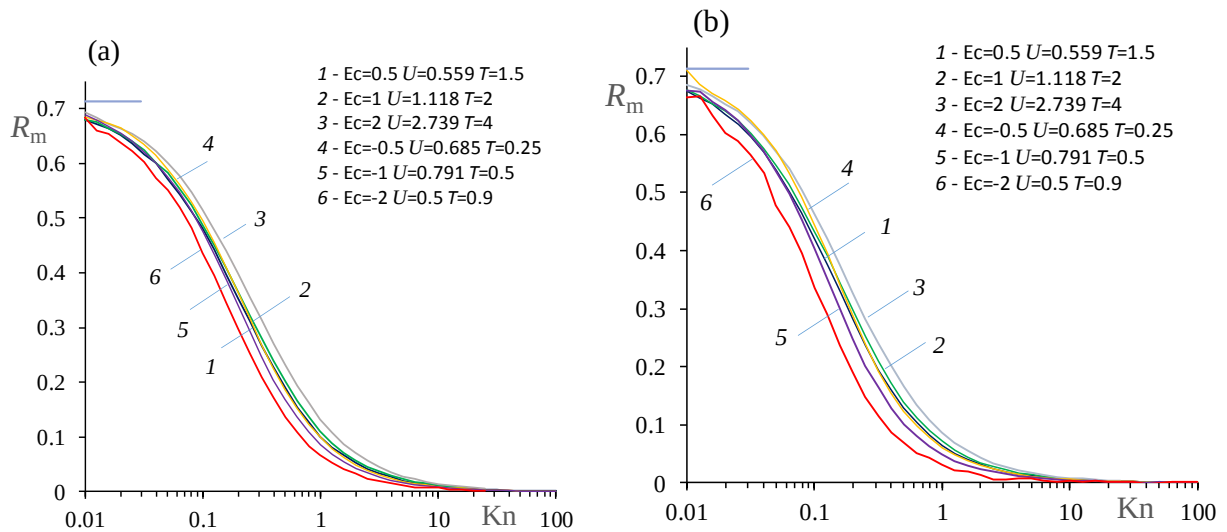


Рисунок 7.28. Зависимость модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса R_m от числа Кнудсена при различных значениях числа Эккерта и различных отношениях радиусов: а - для $\beta = 2$; б - для $\beta = 4$.

Как видно из рис. 7.28, модифицированный коэффициент аналогии Рейнольдса зависит в основном от величин β и Kn для всех рассмотренных чисел Эккерта. Естественно предположить, что отношение радиусов и число

Кнудсена являются основными параметрами подобия для модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса для продольной цилиндрической задачи Куэтта. В силу вышесказанного, для всех рассмотренных значений U , t и Kn

$$\frac{E_1}{p_{xy} U_r} \approx \frac{1}{2} - \frac{\kappa+1}{2\kappa} \frac{1}{Ec} - \frac{R_m(Kn, \beta)}{Ec}. \quad (7.47)$$

Таким образом, введение модифицированного коэффициента аналогии Рейнольдса позволяет разделить влияние числа Эккерта и числа Кнудсена на коэффициент аналогии Рейнольдса при заданном отношении радиусов цилиндров.

Из (7.47) получаем еще одно свойство коэффициента аналогии Рейнольдса для течения Куэтта:

$$R(Ec, Kn, \beta) + R(-Ec, Kn, \beta) \approx 1. \quad (7.48)$$

7.6.5 Отношение погонных потоков энергий.

Отношение значений погонных потоков энергий, передаваемых поверхностям, дается выражением $Q = E_2 \beta / E_1$. Погонный поток энергии, это количество энергии, подводимой к поверхности цилиндра в единицу времени на единицу длины в продольном направлении.

Легко убедиться, что в свободномолекулярном режиме

$$Q(E_c) = -1 + \frac{2E_c}{1 + \kappa^{-1} + E_c}, \quad (7.49)$$

а в режиме сплошной среды имеем

$$Q(E_c) = -1 + \frac{2E_c}{2Pr^{-1} + E_c}. \quad (7.50)$$

Таким образом, отношение погонных потоков энергий, передаваемых поверхностям, как в режиме сплошной среды, так и в свободномолекулярном режиме продольного цилиндрического течения Куэтта зависит только от числа Эккерта (Pr и κ фиксированы) и совпадает с отношением потоков энергии, передаваемых пластинам в соответствующей плоской задаче Куэтта. По мере увеличения числа $E_c \geq 0$, отношения (7.49) и (7.50) монотонно изменяются от -1 ($E_c=0$ (случай неподвижных цилиндров)) до 1 ($E_c \rightarrow \infty$ (случай равных температур)), см. рис. 7.29.

Из (7.38) следует, что

$$Q(E_c, Kn, \beta) = \frac{1 - R(E_c, Kn, \beta)}{R(E_c, Kn, \beta)}.$$

Принимая во внимание (7.49), находим, что

$$Q(-E_c, Kn, \beta) \approx \frac{R(E_c, Kn, \beta)}{1 - R(E_c, Kn, \beta)}.$$

Отсюда за исключением случаев $R \ll 1$ и $R \approx 1$ получаем

$$Q(E_c, Kn, \beta)Q(-E_c, Kn, \beta) \approx 1. \quad (7.51)$$

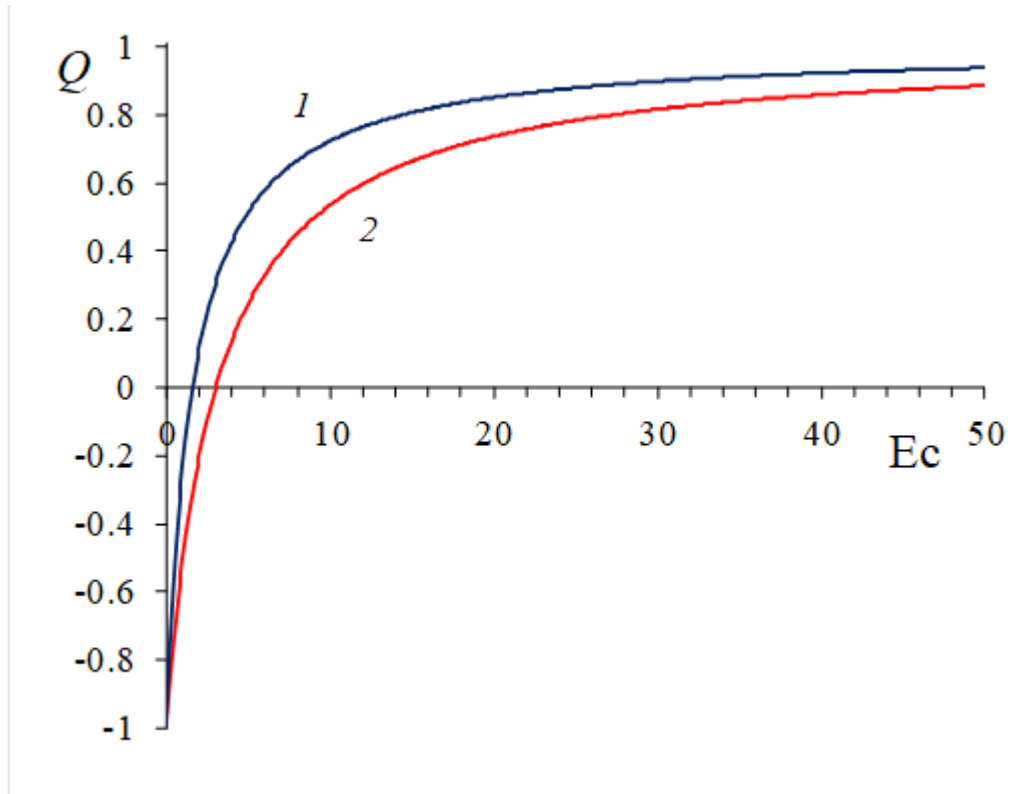


Рисунок 7.29. Зависимость отношения величин погонных потоков энергий, передаваемых цилиндрическим поверхностям, Q от числа Эккерта $Ec > 0$ для свободномолекулярного течения (1) и течения сплошной среды (2).

Для режима сплошной среды и свободномолекулярного режима, соотношение (7.51) выполняются точно ($R \neq 1$ и $R \neq 0$). Для переходного режима при $\beta = 1$ и любых Kn они выполняются точно в случае, если u_{rel} одно и то же ($R \neq 1$ и $R \neq 0$), а также в случае $T_1 = T_2$. Функция $\bar{Q}(|Ec|, Kn, \beta) = Q(Ec, Kn, \beta)Q(-Ec, Kn, \beta)$ для различных значений Ec и β изображена на рис. 7.30. Как видно из приведенных данных, соотношение (7.51) выполняется с точностью до 4% для $|Ec| = 0.5$ и до 6% для $|Ec| = 1$. Однако, для $|Ec| = 2$, соотношение (7.51) нарушается для чисел Кнудсена, соответствующих переходному режиму, потому что в этом случае мы имеем $R \ll 1$ или $R \approx 1$, см. рис. 7.30.

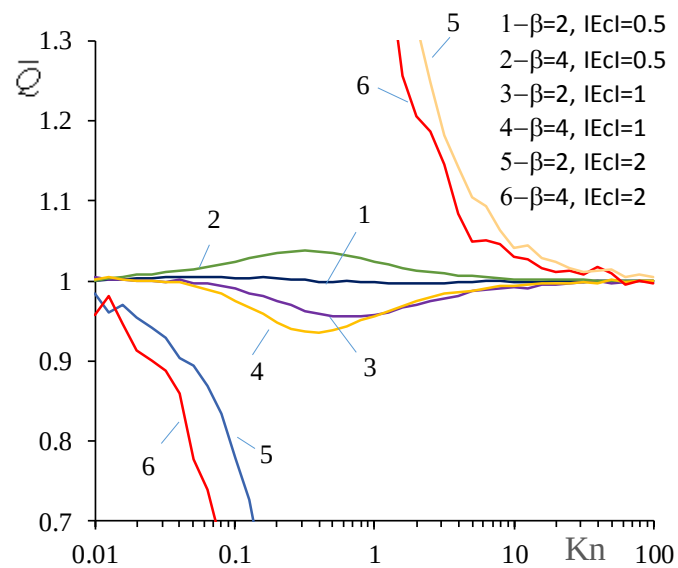


Рисунок 7.30. Произведение относительных потоков энергии в зависимости от числа Кнудсена при различных абсолютных значениях числа Эккерта $|Ec|$ и различных отношений радиусов β .

Таким образом, в Гл. VII исследована аналогия Рейнольдса для различных режимов плоского и продольного цилиндрического течений Куэтта, течения Рэлея и течения, возникающего при обтекании пластины под нулевым углом атаки, и получены следующие результаты:

1. Прямым статистическим моделированием течения одноатомного газа показано, что коэффициент аналогии Рейнольдса в переходном режиме в плоской и продольной цилиндрической задачах Куэтта и в задаче о сверхзвуковом обтекании пластины под нулевым углом атаки зависит, главным образом, только от двух параметров подобия: числа Эккерта и числа Кнудсена. На основе результатов прямого статистического моделирования получена приближенная формула для коэффициента аналогии Рейнольдса, в которую входит число Эккерта и найденная численно функция от числа Кнудсена, а в случае продольного цилиндрического течения Куэтта и от отношения радиусов цилиндров.
2. Для режима сплошной среды и свободномолекулярного режима коэффициент аналогии Рейнольдса в продольном цилиндрическом течении Куэтта не зависит от отношения радиусов цилиндров, а зависит только от числа Эккерта. Таким образом, коэффициент аналогии Рейнольдса для продольного цилиндрического течения Куэтта совпадает в этих случаях с коэффициентом аналогии Рейнольдса для плоского течения Куэтта
3. Показано, что в плоской и продольной цилиндрической задачах Куэтта отношение потоков энергий, передаваемых пластинам, в переходном режиме зависит в основном только от двух параметров подобия: числа Эккерта и числа Кнудсена.
4. Коэффициент аналогии Рейнольдса задачи Рэлея в переходном режиме, как показывают численные расчёты, проведённые в широком диапазоне значений безразмерных скоростей и температур пластины, зависит в основном от двух параметров: безразмерного времени и числа Эккерта. На основе результатов прямого статистического

моделирования получена приближенная формула для коэффициента аналогии Рейнольдса, в которую входит число Эккерта и найденная численно функция от безразмерного времени.

5. При температуре пластины равной температуре невозмущенного газа коэффициент аналогии Рейнольдса в задаче Рэлея и в задаче об обтекании пластины сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки, а также в продольной цилиндрической задаче Куэтта близок в переходном режиме к 0.5, т.е. к соответствующим значениям для свободномолекулярного режима и для несжимаемой жидкости.
6. В задаче Рэлея для несжимаемой жидкости коэффициент аналогии Рейнольдса, как функция числа Прандтля имеет максимум, если число Эккерта положительно.
7. Коэффициент аналогии Рейнольдса для пластины, расположенной под нулевым углом атаки, при наличии ламинарного несжимаемого пограничного слоя как функция числа Прандтля имеет максимум, если число Эккерта положительно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе в широком диапазоне чисел Кнудсена и температур пластин проведено исследование шести классических задач динамики разреженных газов: задач о плоском и цилиндрическом течениях Куэтта, задачи о течении Рэлея, задачи об обтекании пластины под нулевым углом атаки, задач о теплопередаче между цилиндрическими и между сферическими поверхностями. Кроме того, в работе исследована аналогия Рейнольдса для несжимаемом пограничного слоя и течения Рэлея несжимаемой жидкости, и для вязкого сжимаемого продольного цилиндрического течения Куэтта. В результате проведенных исследований впервые было обнаружено, что

1. Плоское течение Куэтта разреженного газа при соответствующих значениях параметров обладает следующими свойствами:
 - а) Поток нормального импульса, немонотонен и достигает максимума при изменении числа Кнудсена.
 - б) Знак потока энергии, передаваемой пластине, при изменении числа Кнудсена меняется.
 - с) Поток энергии, отдаваемой пластиной, при изменении числа Кнудсена достигает максимума.
2. Течение Рэлея разреженного газа при соответствующих значениях параметров обладает следующими свойствами:
 - а) Потоки энергии и нормального импульса, *передаваемых* пластине, а также напряжение трения на пластине достигают в определенные моменты времени максимума.
 - б) Поток энергии, *отдаваемой* пластиной достигает в определенный момент времени максимума.
 - с) Знака потока энергии, передаваемой пластине, через некоторое время после начала движения пластины меняется

3. Течение разреженного газа, возникающее при обтекании пластины, расположенной под нулевым углом атаки, при соответствующих значениях параметров обладает следующими свойствами:

- а) При любом числе Маха набегающего потока в случае, когда температура пластины равна температуре невозмущенного газа среднее по длине пластины значение потока нормального импульса, передаваемого пластине, имеет, как функция числа Кнудсена, один или несколько экстремумов. Причем при сверхзвуковом обтекании пластины всегда существует, по крайней мере, один максимум. При дозвуковом обтекании пластины такая зависимость имеет минимум, а при околосзвуковом дозвуковом может иметь и минимум, и максимум.
- б) В широком диапазоне температур при дозвуковых и умеренных сверхзвуковых числах Маха в переходном режиме температура пластины очень слабо влияет на среднюю силу трения, действующую на пластину.
- в) Средний поток энергии, *отдаваемой* пластиной, при определенных параметрах течения имеет максимум по числу Кнудсена.
- г) Существуют определенные интервалы значений отношений температур пластин и чисел Маха, при которых средний поток энергии, передаваемый пластине, меняет знак при изменении числа Кнудсена

4. Цилиндрическое течение Куэтта разреженного газа с неподвижным внутренним цилиндром при соответствующих значениях параметров, обладает следующими свойствами:

- а) Напряжение трения на поверхности цилиндра и поток энергии, передаваемой поверхности цилиндра, немонотонны и достигают максимума при определенных значениях скорости вращения внешнего цилиндра.

- b) Абсолютная величина потока нормального импульса, передаваемого поверхности внутреннего цилиндра при изменении скорости вращения внешнего цилиндра достигает максимума в случае, когда отношение радиусов цилиндров близко к единице.
 - c) Напряжение трения и потоки энергии, передаваемой цилиндрам, при малых числах Кнудсена и больших скоростях вращения внешнего цилиндра резко уменьшаются при достижении определенной скорости вращения внешнего цилиндра
 - d) Поток энергии, передаваемой цилиндрической поверхности, в свободномолекулярном течении Куэтта при изменении отношения радиусов цилиндров меняет знак.
- 5. Цилиндрическое течение Куэтта разреженного газа с неподвижным внешним цилиндром при соответствующих значениях параметров, обладает следующими свойствами:
 - a) Абсолютная величина потока нормального импульса, передаваемого внутреннему цилиндру, имеет в переходном режиме минимум как функция скорости внешнего цилиндра.
 - b) В свободномолекулярном режиме напряжение трения и потоки энергии, передаваемые цилиндрам, имеют максимум, как функции отношения радиусов цилиндров
- 6. В задачах о теплопередаче в газе с цилиндрической и сферической симметрией, а также в плоской и продольной цилиндрической задачах Куэтта существуют локальные максимумы потока энергии, передаваемой одной из поверхностей при изменении ее температуры при фиксированной температуре другой поверхности. Для свободномолекулярного режима максимумы найдены и исследованы аналитически, а для переходного численно методом DSMC.
- 7. Аналогия Рейнольдса для различных режимов плоского и продольного цилиндрического течений Куэтта, течения Рэлея и течения, возникающего

при обтекании пластины под нулевым углом атаки при соответствующих значениях параметров, обладает следующими свойствами:

- а) Температуры и скорости граничных поверхностей влияют на коэффициент аналогии Рейнольдса в основном через число Эккерта.
- б) Коэффициент аналогии Рейнольдса в задаче Рэлея для несжимаемой жидкости имеет максимум как функция числа Прандтля, если число Эккерта положительно.
- с) Коэффициент аналогии Рейнольдса для пластины, расположенной под нулевым углом атаки, при наличии ламинарного несжимаемого пограничного слоя имеет максимум как функция числа Прандтля, если число Эккерта положительно.
- д) Коэффициент аналогии Рейнольдса в продольном цилиндрическом течении Куэтта вязкого сжимаемого газа зависит только от числа Эккерта и не зависят от отношения радиусов. Таким образом, в предположении постоянства числа Прандтля в результате интегрирования уравнений Навье-Стокса получено точное соотношение между потоком энергии, передаваемой поверхности, и напряжением трения на поверхности в продольном цилиндрическом течении Куэтта вязкого сжимаемого газа.

Область применения результатов. Полученные в данной работе результаты могут быть использованы:

- в теоретических и экспериментальных исследованиях явлений переноса в разреженных газах;
- в вакуумной технике;
- в учебном процессе в вузах при подготовке студентов и аспирантов по специальности «Молекулярная газовая динамика» и «Вакуумная техника».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Паттерсон Г.Н., *Молекулярное течение газов*. М.: Гос. изд. физ-мат. лит., 1960, 272 с.
2. Prandtl L, and Tietjens O.G., *Applied Hydro- and Aeromechanics*, Dover Publications, Inc., New York, NY, 1957.
3. Karr G.R., and S.M. Yen, "Aerodynamic Properties of Spinning Convex Bodies in a Free Molecule Flow, in *Proceedings of the Seventh International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, Vol. 1, ed. by Dino Dini, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, Italy, p. 339, 1970.
4. J.C. Maxwell, III. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature, *Proc. R. Soc. London* **27**, 185–189, 304–308 (1878).
5. O. Reynolds, XVIII. on certain dimensional properties of matter in the gaseous state.-Part I. Experimental researches on thermal transpiration of gases through porous plates and on the laws of transpiration and impulsion, including an experimental proof that gas is not a continuous plenum.-Part II. on an extension of the dynamical theory of gas, which includes the stresses, tangential and normal, caused by a varying condition of gas, and affords an explanation of the phenomena of transpiration and impulsion, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* (170) 727–845 (1879).
6. A. Mohammadzadeh, A.S. Rana, H. Struchtrup, Thermal stress vs. thermal transpiration: A competition in thermally driven cavity flows, *Phys. Fluids* **27**(11) 112001 (2015).
7. H. Akhlaghi, E. Roohi, M. Balaj, S.K. Dadzie, Wall heat transfer effects on the hydro/thermal behavior of Poiseuille flow in micro/nanochannels, *Phys. Fluids* **26**(9), 092002 (2014).
8. H. Akhlaghi, E. Roohi, Mass flow rate prediction of pressure–temperature-driven gas flows through micro/nanoscale channels, *Contin. Mech. Thermodyn.* **26**(1), 67–78 (2014).

9. H. Akhlaghi, E. Roohi, M. Balaj, A thorough study on thermal mass flux of rarefied flow through micro/nanochannels, *Appl. Phys. Lett.* **104**(7), 073109 (2014).
10. T. Ohwada, Y. Sone, K. Aoki, Numerical analysis of the shear and thermal creep flows of a rarefied gas over a plane wall on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A* **1**(9), 1588–1599 (1989).
11. H. Akhlaghi, M. Balaj, E. Roohi, Hydrodynamic behavior of micro/nanoscale Poiseuille flow under thermal creep condition, *Appl. Phys. Lett.* **103**(7), 073108 (2013).
12. Y. Sone, Flow induced by thermal stress in rarefied gas, *Phys. Fluids* **15**(8), 1418–1423 (1972).
13. Y.L. Han, Thermal-creep-driven flows in Knudsen compressors and related nano/microscale gas transport channels, *J. Microelectromech. Syst.* **17**(4), 984–997 (2008).
14. Y.L. Han, Working gas temperature and pressure changes for microscale thermal creep-driven flow caused by discontinuous wall temperatures, *Fluid Dyn. Res.* **42**(4), 045505 (2010).
15. S. An, N.K. Gupta, Y.B. Gianchandani, A Si-micromachined 162-stage two-part Knudsen pump for on-chip vacuum, *J. Microelectromech. Syst.* **23**(2), 406–416 (2013).
16. Y. Qin, S. An, Y.B. Gianchandani, Arrayed architectures for multi-stage Si-micromachined high-flow Knudsen pumps, *J. Micromech. Microeng.* **25**(11), 115026 (2015).
17. Y. Sone, Flow induced by thermal stress in rarefied gas, *Phys. Fluids* **15**(8) (1972) 1418–1423.
18. Y. Sone, Rarefied gas flow induced between nonparallel plane walls with different temperatures, in: *Rarefied Gas Dynamics*, Vol. 2, 1974, pp. D–23.

19. Y. Sone, S. Tanaka, Thermal Stress Slip Flow Induced in Rarefied Gas between Noncoaxial Circular Cylinders. *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, **43**(3), 344-363 (1981).
20. K. Aoki, Y. Sone, Y. Waniguchi, A rarefied gas flow induced by a temperature field: Numerical analysis of the flow between two coaxial elliptic cylinders with different uniform temperatures, *Comput. Math. Appl.* **35**(1–2), 15–28 (1998).
21. Y. Sone, Y. Waniguchi, K. Aoki, One-way flow of a rarefied gas induced in a channel with a periodic temperature distribution, *Phys. Fluids* **8**(8), 2227–2235 (1996).
22. K. Aoki, Y. Sone, Y. Waniguchi, A rarefied gas flow induced by a temperature field: Numerical analysis of the flow between two coaxial elliptic cylinders with different uniform temperatures, *Comput. Math. Appl.* **35**(1–2), 15–28 (1998).
23. K. Aoki, S. Takata, H. Aikawa, F. Golse, A rarefied gas flow caused by a discontinuous wall temperature, *Phys. Fluids* **13**(9), 2645–2661 (2001).
24. Y.C. Chang, H.J. Keh, Effects of thermal stress slip on thermophoresis and photophoresis, *J. Aerosol Sci.* **50**, 1–10 (2012).
25. Горелов С.Л., Термофорез и фотофорез в разреженном газе// Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. №6. С. 178.
26. Knudsen M., Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren eibungsströmung der Gase durch Röhren //Ann. der Physik. V. **333**(1), p. 75 (1909).
27. M. Hadj Nacer, I. Graur, P. Perrier, J.G. Méolans, M. Wuest, Gas flow through microtubes with different internal surface coatings, *J. Vac. Sci. Technol. A* **32**(2), 021601 (2014).
28. L. Marino, Experiments on rarefied gas flows through tubes, *Microfluid. Nanofluid.* **6** (1), 109–119 (2009).

29. P. Perrier, I.A. Graur, T. Ewart, J.G. Méolans, Mass flow rate measurements in microtubes: From hydrodynamic to near free molecular regime, *Phys. Fluids* **23** (4), 042004 (2011).
30. S. Varoutis, S. Naris, V. Hauer, C. Day, D. Valougeorgis, Computational and experimental study of gas flows through long channels of various cross sections in the whole range of the Knudsen number, *J. Vac. Sci. Technol. A* **27** (1), 89–100 (2009).
31. V. Hemadri, V.V. Varade, A. Agrawal, U.V. Bhandarkar, Investigation of rarefied gas flow in microchannels of non-uniform cross section, *Phys. Fluids* **28** (2), 022007 (2016).
32. M.A. Gallis, J.R. Torczynski, Direct simulation Monte Carlo-based expressions for the gas mass flow rate and pressure profile in a microscale tube, *Phys. Fluids* **24** (1), 012005 (2012).
33. B.C. Eu, Generalized hydrodynamics approach to the Knudsen problem, *Phys. Rev. A* **40** (11), 6395 (1989).
34. S.K. Dadzie, H. Brenner, Predicting enhanced mass flow rates in gas microchannels using nonkinetic models, *Phys. Rev. E* **86** (3), 036318 (2012).
35. D. Valougeorgis, J.R. Thomas Jr., Exact numerical results for poiseuille and thermal creep flow in a cylindrical tube, *Phys. Fluids* **29** (2), 423–429 (1986).
36. Q. Lv, X. Liu, E. Wang, S. Wang, Analytical solution to predicting gaseous mass flow rates of microchannels in a wide range of Knudsen numbers, *Phys. Rev. E* **88** (1), 013007 (2013).
37. N. Dongari, A. Sharma, F. Durst, Pressure-driven diffusive gas flows in micro-channels: from the knudsen to the continuum regimes, *Microfluid. Nanofluid.* **6** (5), 679–692 (2009).
38. Коган М.Н., *Динамика разреженного газа*. М.: Наука, 1967.440 с.
39. В.Н. Гусев, А.И. Ерофеев, Т.В. Климова, В.А. Перепухов, В.В. Рябов, А.И. Толстых, Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Труды ЦАГИ. Вып. 1855. 1977. С.43

40. Шахов Е.М., Задача Куэтта для обобщенного уравнения Крука. Эффект максимума напряжения// Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. №5. С.16.
41. K. Rebrov, P. A. Skovorodko, "An Improved Sampling Procedure in DSMC Method," in *Rarefied Gas Dynamics-1996, 20th International Symposium Proceedings*, edited by C. Shen (Peking University Press, Beijing, China, 1997), p. 215.
42. P.A. Skovorodko, "Some Features of the Plane Couette Flow," in *Rarefied Gas Dynamics-2000, 22nd International Symposium*, edited by T. J. Bartel and M. A. Gallis (American Institute of Physics, Melville, NY, 2001), p. 182.
43. Фридлиндер О.Г., Теплопередача в сильно разреженном газе// Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. №1. С.195.
44. В.В. Аристов, С.А Забелок, А.А. Фролова, Неклассический перенос в неравновесных течениях разреженного газа, УФН, **195** (3), 276 (2025).
45. E.P. Gross, E.A. Jackson, Kinetic theory of the impulsive motion of an infinite plane, *Phys. Fluids*, **1**, 318 (1958).
46. J.E. Broadwell, Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method, *J. Fluid Mech.*, **19**, 401 (1964).
47. L. Trilling, Asymptotic Solution of the Boltzmann Krook Equation for the Rayleigh Shear Flow Problem, *Phys. Fluids* **7**, 1681 (1964).
48. D.P. Giddens and A.B. Huang, Rayleigh's problem at low Mach numbers based on kinetic theory. *AIAA Journal*, Vol. **5**, No. 7, 1354 (1967).
49. C.K. Chu, "The high Mach number Rayleigh problem according to the Krook model," in *Proceedings of 5th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by C.L. Brundin (Academic Press, New York, 1967), p. 589.
50. J. Fan, C. Shen, Statistical Simulation of Low-Speed Rarefied Gas Flows, *Journal of Computational Physics*, **167**, 393 (2001).
51. C. Shen, Z. Yi, Direct Numerical Test of the B-G-K model Equation by the DSMC Method, *Acta Mechanica Sinica (English Series)*, **16**, No.2, 133 (2000).
52. Gross E.P., Ziering S., Kinetic Theory of Linear Shear Flow. *Phys. Fluids* **1**, 215 (1958).

53. E.P. Gross, E.A. Jackson, S., Ziering, Boundary value problems in kinetic theory of gases. *Ann. of Phys.* **1**, №2, 141 (1957) (русский перевод в сб. «Механика» №5 (1958).
54. D. G. Anderson, Numerical solutions of the Krook kinetic equation, *J. Fluid Mech.*, vol. **25**, pt 2, pp. 271-287 (1966).
55. D. R. Willis, Heat transfer in a rarefied gas between parallel plates at large temperature ratios, *Rarefied Gas Dynamics*, Acad. Press, New York-London, Vol. 1, 1963.
56. D.R. Willis, "Theoretical solutions of some nearly free molecular problems," collection: *Rarefied Gas Dynamics*, Pergamon Press, New York-London, 1960.
57. D.R. Willis, Comparison of kinetic theory analysis of linearized Couette flow, *Phys. Fluids*, vol. **5**, no. 8, 127-135 (1962).
58. C. Cercignani, S. Cortese, Validation of a Monte Carlo simulation of the plane Couette flow of a rarefied gas, *J. Stat. Phys.* **75**, 817 (1994).
59. Gross E.P., Ziering S., *Phys. Fluids* **2**, Heat flow between parallel plate, No 6, 701 (1959).
60. M. Perlmuter, "Analysis of Couette flow and heat transfer between parallel plates enclosing rarefied gas by Monte Carlo," in *Proceedings of 5th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by C.L. Brundin (Academic Press, New York, 1967), v. 1, p. 455.
61. Ziering S., Shear and heat flow for Maxwellian molecules, *Phys. Fluids* **3**, 503 (1960).
62. C-Y. Liu, L. Lees, "Kinetic Theory Description of Plane Compressible Couette Flow", in *Rarefied Gas Dynamics (Advanced in Applied Mechanics, Supplement 1)*, ed. L. Talbot (Academic Press, New York, 1961), p. 391.
63. A.B. Huang and D. L. Hartley, "Nonlinear rarefied Couette flow with heat transfer," *Phys. Fluids*, **11**, 1321 (1968).
64. M. P. Srivastava, and J. R. Jagdish, Non-linear Couette flow with heat transfer using the B-G-K model, *ZAMP*, **22**, No. 3, 542 (1971).
65. P.S. Manocha, Heat transfer in plane Couette flow of a rarefied gas, *Journal*

- of Engineering Mathematics 7, No. 1, 7 (1973).
66. S. Stefanov, P. Gospodinov, C. Cercignani, Monte Carlo simulation and Navier–Stokes finite difference calculation of unsteady-state rarefied gas flows, *Phys. Fluids* **10**, 289, (1998).
 67. J.H. Park, P. Bahukudumbi, and A. Beskok, Rarefaction effects on shear driven oscillatory gas flows: A direct simulation Monte Carlo study in the entire Knudsen regime, *Phys. Fluids*, **16**, 317 (2004).
 68. N.G. Hadjiconstantinou, Oscillatory shear-driven gas flows in the transition and free-molecular flow regimes, *Phys. Fluids* **17**, 100611 (2005).
 69. F. Sharipov, D. Kalempa, Oscillatory Couette flow at arbitrary oscillation frequency over the whole range of the Knudsen number, *Microfluid Nanofluid*, **4**, 363 (2008).
 70. Aristov V.V., Frolova A.A., Zabelok S.A., Kolobov V.I., “Kinetic Effects for Couette Flows with Oscillating Walls,” in *Rarefied Gas Dynamics-2008*, 26th International Symposium, edited by T. Abe (American Institute of Physics, Melville, NY, 2009), p. 1117.
 71. Берд Г., *Молекулярная газовая динамика*. М.: Мир. 1981. 320 с.
 72. G.A. Bird, *Molecular Gas Dynamics and Direct Simulation of Gas Flows* (Oxford University Press, Oxford, 1994).
 73. C. Cercignani, *Rarefied Gas Dynamics. Cambridge Texts in Applied Mathematics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
 74. C. Shen, *Rarefied Gas Dynamics. Fundamentals, Simulations and Micro Flows* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005).
 75. G.A. Bird, Aerodynamic properties of some simple bodies in the hypersonic transition regime, *AIAA J.* **4**, 55 (1966).
 76. M. Becker, F. Robben, R. Cattolica, Velocity distribution functions near the leading edge of a flat plate, *AIAA J.* **12**(9), 1247 (1974).
 77. C. Cercignani, A. Frezzotti, “Numerical Simulation of Supersonic Rarefied Gas Flows Past a Flat Plate: Effects of the Gas-Surface Interaction Model on the Flow Field” in *Rarefied Gas Dynamics: Theoretical and Computational*

- Techniques*, edited by E.P. Muntz, D.P. Weaver, and D.H. Campbell (AIAA, Washington, DC), pp.552-556, (1989).
78. T.G. Elizarova, I.A. Graur, A. Chpoun, J.C. Lengrand, “Comparison of Continuum and Molecular Approaches for Rarefied Gas Flows,” in *Proceedings of 19th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by J. Harvey and G. Lord (Oxford Univ. Press, Oxford, New York, Tokyo), pp. 780-785, (1995).
 79. K. Aoki, K. Kanba, and S. Takata, Numerical analysis of a supersonic rarefied gas flow past a flat plate, *Phys. Fluids* **9**, 1144 (1997).
 80. N. Tsuboi, H. Yamaguchi, and Y. Matsumoto, Direct Simulation Monte Carlo Method on Rarefied Hypersonic Gas Flow Around Flat Plates, *Journal of Spacecraft and Rockets*, **41**, No. 3, 397 (2004).
 81. M. Ivanov, D. Khotyanovsky, A. Kudryavtsev, A. Shershnev, Y. Bondar, and S. Yonemura, “Rarefaction and Non-equilibrium Effects in Hypersonic Flows about Leading Edges of Small Bluntness”, in *Proceedings of 27th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, AIP Conference Proceedings **1333**, 1295 (2011).
 82. Y. Hu, S. Chen, and Q. Sun, “Hypersonic Aerodynamics of a Flat Plate: Bridging Formula and Wall Temperature Effects”, in *Proceedings of 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by M. Mareschal and A. Santos (American Institute of Physics, Melville, NY, 2012), AIP Conf. Proc. **1501**, pp. 1499-1499 (2012).
 83. X. X. Chen, Z. H. Wang and Y. L. Yu, Nonlinear Shear and Heat Transfer in Hypersonic Rarefied Flows Past Flat Plates, *AIAA Journal*, **53** (2), 413, (2015).
 84. H. Gijare, A. Bhagat, and N. Dongari, The effect of Knudsen layer on rarefied hypersonic gas flows, *AIP Conf. Proc.* **2132**, 100015-1–100015-8 (2019).
 85. A.B. Huang, D.A. Hartley, Kinetic theory of sharp leading-edge problem in supersonic flow, *Phys. Fluids* **12**, 96 (1969).
 86. Shaowu Pan, Zhenxun Gao and Chunhian Lee “Numerical Investigation of Rarefaction Effects in the Vicinity of a Sharp Leading Edge”, in *Proceedings of*

- the 29th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, AIP Conf. Proc. **1628**, pp. 185-191 (2014).
87. A.N. Kudryavtsev, A.A. Shershnev, and Y.A. Bondar, A study of the finite flat plate problem using various kinetic and continuum models, AIP Conf. Proc. **1333**, 934 (2011).
 88. Q. Sun and J.D. Boyd, Drag on a Flat Plate in Low-Reynolds-Number Gas Flows, AIAA Journal, **42**, 1066 (2004).
 89. Ö.H. Turgut and M.C. Çelenligil, “Streamline Extrapolation Technique for Subsonic Outflow Boundary Conditions in DSMC Simulations”, in *Proceedings of 25th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by M.S. Ivanov and A.K. Rebrov. pp. 373-378 (2007).
 90. M. Cevdet Çelenligil, “Rarefaction effects on the Outflow Boundary Conditions for External Subsonic Flows”, in *Proceedings of 26th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by T. Abe pp. 317-322 (2009).
 91. M. Cevdet Çelenligil, “On the Outflow Boundary Conditions for Subsonic Rarefied External Flows”, in *Proceedings of 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by M. Mareschal and A. Santos (American Institute of Physics, Melville, NY, 2012),, AIP Conf. Proc. **1501**, pp. 549-556 (2012).
 92. N.A. Gatsonis, R.E. Chamberlin, S.N. Averkin, An unstructured direct simulation Monte Carlo methodology with kinetic-moment inflow and outflow boundary conditions, Journal of Computational Physics **233** (1), 148 (2013).
 93. E. Farbar, I. Boyd, Subsonic flow boundary conditions for the direct simulation Monte Carlo method, Computers & Fluids, **102**, 99 (2014).
 94. А.А. Абрамов, А.В. Бутковский, Эффекты немонотонности и изменения знака потока энергии в переходном режиме в задаче Куэтта с теплопередачей // Изв. РАН. МЖГ. 2010. №1. с.67.

95. А.А. Абрамов, А.В. Бутковский, Эффекты немонотонности потока энергии и нормального импульса в переходном режиме в задаче Куэтта при больших числах Маха // ТВТ, **48**, №2, 274 (2010).
96. А.А. Абрамов, А.В. Бутковский, Режимы течения Куэтта с теплопередачей в разреженном газе, ЖЭТФ, т. **143**, в. 6, 1202 (2013).
97. A.A. Abramov and A.V. Butkovskii, On the Rayleigh problem in the transitional regime: The sign change effect of the energy flux and other effects, Phys. Fluids **26**, 077101 (2014).
98. A.A. Abramov and A.V. Butkovskii, Reynolds analogy for the Rayleigh problem at various flow modes, Physical Review E, **94**, 013110 (2016)
99. A.A. Abramov, A.V. Butkovskii, Conditional maximums of heat fluxes in cylindrically and spherically symmetric problems of heat transfer in rarefied gas for the free molecular and transitional regimes, Int. J. Heat Mass Transfer **106**, 1174–1177 (2017).
100. A.A. Abramov, V.Yu. Alexandrov, A.V. Butkovskii, The longitudinal cylindrical Couette problem for rarefied gas: Energy fluxes maximums, Int. J. Heat and Mass Transfer **111**, 608–613 (2017).
101. A.A. Abramov, A.V. Butkovskii, The extended Reynolds analogy for the Couette problem: Similarity parameters, International Journal of Heat and Mass Transfer **117**, 313–318 (2018).
102. A.A. Abramov, V.Yu. Alexandrov, A.V. Butkovskii, Rarefied cylindrical Couette flow: Shear stress and energy flux maxima. International Journal of Heat and Mass Transfer **123**, 192-200 (2018).
103. A.A. Abramov, V.Yu. Alexandrov, A.V. Butkovskii, Cylindrical Couette problem with different surface temperatures: Rarefied effects, European Journal of Mechanics / B Fluids **76**, 145–152 (2019).

104. A.A. Abramov, A.V. Butkovskii and O.G. Buzykin, Rarefied gas flow past a flat plate at zero angle of attack, *Phys. Fluids* **32**, 087108 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0014629>
105. A.A. Abramov and A.V. Butkovskii, Reynolds analogy for the fluid flow past a flat plate at different regimes, *Phys. Fluids* **33**, 017101 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0032143>
106. A.A. Abramov, V.Yu. Alexandrov, A.V. Butkovskii, O.G. Buzykin, Cylindrical Couette flow with fixed outer cylinder: Rarefied effects, *Phys. Fluids* **33**, 097111 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0064143>
107. A.A. Abramov, A.V. Butkovskii and O.G. Buzykin, Rarefied cylindrical Couette problem: Effect of a very sharp transition from weakly rarefied flow near the inner cylinder to free molecular flow at very low average Knudsen numbers, *Phys. Fluids* **36**, 077122 (2024); <https://doi.org/10.1063/5.0213737>
108. А.А. Абрамов, В.Ю. Александров, А.В. Бутковский, Коэффициент аналогии Рейнольдса в продольной цилиндрической задаче Куэтта: от режима сплошной среды до свободномолекулярного, *ЖВМ и МФ*, **63**, № 2, 317-326 (2023).
109. A.A. Abramov and A. V. Butkovsky, “The sign change effect of the energy flux and other effects in the transitional regime for the Couette problem,” in *Proceedings of 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by M. Mareschal and A. Santos (American Institute of Physics, Melville, NY, 2012), p. 123, *AIP Conf. Proc.* **1501**, 123 (2012).
110. Alexander Abramov and Alexander Butkovskii, Extended Reynolds analogy for the rarefied Rayleigh problem: Similarity parameters, *31st International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, *AIP Conf. Proc.* **2132**, 180013-1–180013-7, (2019);; <https://doi.org/10.1063/1.5119671>
111. Alexander Abramov and Alexander Butkovskii, Similarity parameters in the rarefied Couette problem, *AIP Conference Proceedings* **2132**, 180006 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5119664>

112. Alexander Abramov, Victor Alexandrov, and Alexander Butkovskii, Conditional maxima of energy fluxes in the longitudinal cylindrical Couette problem and in the heat transfer problem for the rarefied gas, AIP Conference Proceedings **2132**, 180005 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5119663>
113. A.A. Abramov, V.Yu. Alexandrov, and A.V. Butkovskii, Similarity Parameters in the Longitudinal Cylindrical Couette problem: from the Continuous to Free Molecular, 32st International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, AIP Conf. Proc. 2996, 050001 (2024); <https://doi.org/10.1063/5.0188163>
114. О.М. Белоцерковский, В.Е. Яницкий ЖВМ и МФ, Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа ч.1,2. // ЖВМ и МФ, Т.15. №5. С.1195. №6. С.1553 (1975).
115. А.А. Абрамов, О вычислении макропараметров в методе прямого статистического моделирования Монте-Карло. //Докл. АН СССР. Т.271. №2. С.315-318 (1983).
116. Шидловский В.П., *Введение в динамику разреженного газа*. М.: Наука, 1965. 218с.
117. И. Н. Ларина, В.А. Рыков, Численное исследование течения Куэтта на основе нелинейно-неравновесной кинетической модели уравнения Больцмана для одноатомного газа. ЖВМ и МФ, **54**, №4. С. 686 (2014).
118. А.А. Абрамов, Н.К. Макашев, О совместном влиянии гетерогенных и газофазных реакций на величину потока тепла к поверхности //Уч. зап. ЦАГИ. Т.10. №5. С.35-42. (1979).
119. Г. В. Липман, А. Рошко, *Элементы газовой динамики*, М., ИЛ,1960.
120. C.R. Illingworth, Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,**46**, pp. 469 – 478, (1950).
121. G.G. Stokes, Sir, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, Trans. Cambridge Phil. Soc. **9**, Part II, 8 (1851).

122. Lord Rayleigh, On the Motion of Solid Bodies through a Viscous, Phil. Mag. **21**, Ser. 6, 697 (1911).
123. L.H. Howarth, Some aspects of Rayleigh's problem for a compressible fluid, Quart. J. Mech. Appl. Math. **4**, Part 2, 157 (1951).
124. M.D. Van Dyke, Impulsive motion of a flat plate in a viscous compressible fluid, Z. Angew. Math. Phys. **III**, 343 (1952).
125. K.N. Stewartson, On the impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid, Quart. J. Mech. Appl. Math. **4**, Part 2, 182 (1951).
126. S.A. Schaaf and F. S. Sherman, Skin friction in slip flow, J. Aeron. Sci. **21**, 85 (1954); <https://doi.org/10.2514/8.2936>.
127. С. Чепмен, Т. Каулинг, *Математическая теория неоднородных газов*. Перевод с английского. М. Иностранная литература, 1960, 510с.
128. J.T. Lin and D.R. Willis, Kinetic theory analysis of temperature jump in polyatomic gas, Phys. Fluids, **15**(1), 31 (1972).
129. Ф.Г. Черемисин, Решение уравнения Больцмана в режиме сплошной среды, ЖВМ и МФ **61**, 336 (2023).
130. Г. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*. Издательство: Наука, 1974.
131. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей*, М: Мир, 1967, 296 с.
132. C. Cercignani and F. Sernagiotto, Cylindrical Couette Flow of Rarefied Gas, Phys. Fluids, **10**, 1200-1204 (1967).
133. D. J. Alofs, G. S. Springer, Cylindrical Couette Flow Experiments in the Transition Regime. Physics of Fluids, **14**(2), 298 (1971).
134. T. Soga H. Oguchi, A numerical analysis of nonlinear cylindrical Couette flow. In Rarefied Gas Dynamics, Proc. 9th Int. Symp. (DFVLR Press, Porz-Wahn, Germany, 1974), Paper No. A.17.
135. K. Nanbu, Analysis of cylindrical Couette flows by use of the direction simulation method, Phys. Fluids, **27**, 2632-2635 (1984).
136. D. Einzel, P. Panzer, and M. Liu, Boundary condition for fluid flow: curved or rough surfaces, Phys. Rev. Letters **64**, 2269-2272 (1990).

137. K.W. Tibbs, F. Baras, and A.L. Garcia, Anomalous flow profile due to the curvature effect on slip length, *Phys. Rev. E* **56**, 2282 (1997).
138. F.M. Sharipov and G.M. Kremer, Non-isothermal Couette flow of a rarefied gas between two rotating cylinders, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **18**, (I), 121-130 (1999).
139. L.M. de Socio, N. Ianiro, and L. Marino, Effects of the Centrifugal Forces on a Gas Between Rotating Cylinders, *J. Thermophysics and Heat Transfer*, **14**, No.2, 269-275 (2000).
140. K. Aoki, H. Yoshida, T. Nakanishi, and A. L. Garcia, Inverted velocity profile in the cylindrical Couette flow of a rarefied gas, *Phys. Rev. E* **68**, 016302 (2003).
141. S. Yuhong, R. W. Barber, and D.R. Emerson, Inverted velocity profiles in rarefied cylindrical Couette gas flow and the impact of the accommodation coefficient, *Phys. Fluids* **17**, 047102 (2005).
142. Y. Sun, R.W. Barber and D.R. Emerson, “The Impact of Accommodation Coefficient on Concentric Couette Flow,” in *Proceedings of 24th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, edited by M. Capitelli (American Institute of Physics, NY, 2005), 707-712 (2005).
143. H. Yoshida, K. Aoki, “Linear stability of the cylindrical Couette flow of a rarefied gas, *Phys. Review E* **73**, 021201 (2006).
144. S.K. Stefanov, R.W. Barber, D.R. Emerson, and J.M. Reese, The critical accommodation coefficient for velocity inversion in rarefied cylindrical Couette flow in the slip and near free-molecular regimes, in *Rarefied Gas Dynamics: 25th International Symposium*, edited by M. S. Ivanov and A. K. Rebrov (Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 2007), 1146–1151.
145. Dankov D., Roussinov V., Modeling and Applications of the Cylindrical Couette Flow of a Rarefied Gas. AIP Conference Proceedings. *Applications of Mathematics in Engineering and Economics '34—AMEE '08*, edited by M. D. Todorov (2008), 239-243; <https://doi10.10631.3030791>

146. E.M. Shakhov, V.A. Titarev, Numerical study of the generalized cylindrical Couette flow of rarefied gas, *European Journal of Mechanics B/Fluids* **28**,152–169 (2009).
147. P. Taheri and H. Struchtrup, Effects of rarefaction in microflows between coaxial cylinders, *Phys. Rev. E* **80**, 066317 (2009).
148. P. Gospodinov, D. Dankov, V. Roussinov and S. Stefanov Modeling of Cylindrical Couette Flow of Rarefied Gas. The Case of Rotating Outer Cylinder AIP Conference Proceedings **1186**, 200 (2009); [https://doi: 10.1063/1.3265330](https://doi.org/10.1063/1.3265330)
149. P. Gospodinov, D. Dankov, V. Roussinov, S. Stefanov, Modeling of cylindrical Couette flow of rarefied gas between rotating cylinders, in *Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians* Albena, April 6–10, 2010, Mathematics and education in mathematics, 184-189 (2010).
150. P. Gospodinov, D. Dankov, V. Roussinov and S. Stefanov, Cylindrical Couette Flow of Rarefied Gas: Comparison between Navier-Stokes and DSMC Computations, AIP Conference Proceedings. *Applications of Mathematics in Engineering and Economics '34—AMEE '08*, edited by M. D. Todorov and C. I. Christov (2010), 505-510.
151. P. Gospodinov, D. Dankov, V. Roussinov, and S. Stefanov, Stationary Cylindrical Couette Flow at Different Temperature of Cylinders: the Local Knudsen Number Effect. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*, AIP Conf. Proc. **1404**, 451-456 (2011); [https://doi:10.1063/1.3659947](https://doi.org/10.1063/1.3659947)
152. Gospodinov P., Dankov D., Roussinov V., Markelov G., Viscous drag in steady state gas flow between rotating cylinders. AIP Conference Proceedings **1487**, 329 (2012); [https://doi: 10.1063/1.4758975](https://doi.org/10.1063/1.4758975)
153. N. Dongari, C. White, T.J. Scanlon, Y. Zhang and J. M. Reese, Rarefaction Effects in Gas Flows Over Curved Surfaces, *28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics 2012*, AIP Conf. Proc. **1501**, 778-785 (2012); [https://doi:10.1063/1.4769621](https://doi.org/10.1063/1.4769621)

154. Xiao-Jun Gu, David R. Emerson, Cylindrical Couette Flows in the Transition Regime by the Method of Moments, 4th Micro and Nano Flows Conference UCL, London, UK, 7-10 September 2014.
155. S. Kosuge, Cylindrical Couette flow of a rarefied gas: Effect of a boundary condition on the inverted velocity profile, *Phys. Rev. E* **92**, 013013 (2015).
156. S. Stefanov and C. Cercignani, Monte Carlo simulation of the Taylor–Couette flow of a rarefied gas, *J. Fluid Mech.* **256**, 199 (1993).
157. D. Reichelmann and K. Nanbu, Monte Carlo direct simulation of the Taylor instability in rarefied gas, *Phys. Fluids A* **5**, 2585 (1993).
158. D. M. Usami, “Direct simulation Monte Carlo on Taylor vortex flow,” in *Rarefied Gas Dynamics 19*, edited by J. Harvey and G. Lord (Oxford University Press, 1995), Vol. 1, p. 389.
159. Q. He, S. Tao, X. Yang, W. Lu, and Z. He, Discrete unified gas kinetic scheme simulation of microflows with complex geometries in Cartesian grid, *Phys. Fluids* **33**, 042005 (2021).
160. В. Ю. Александров, О немонотонной зависимости теплопередачи от перепадов температур, *ТВТ*, том **22**, выпуск 2, 363–371 (1984).
161. Y. Wu, Kinetic theory of thermal molecular flow between coaxial cylinders and concentric spheres, *J. Chem. Phys.* **52** (3), 1494–1498 (1970).
162. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. *Прикладная динамика разреженного газа*: – М.: Машиностроение, 1977. – 184 с.
163. S. Roy, S. Chakraborty, Near-wall effects in micro scale Couette flow and heat transfer in the Maxwell-slip regimes, *Microfluidics and Nanofluidics*, **3**, 437–449 (2007).
164. W. A. Zahid Y. Yin KQ. Zhu, Couette–Poiseuille flow of a gas in long microchannels, *Microfluidics and Nanofluidics*, **3**, 55–64, (2007).
165. Z. Deng, Y. Chen, and C. Shao, Gas flow through rough microchannels in the transition flow regime, *Phys. Rev. E* **93**, 013128 1–10 (2016).
166. R. Narasimha & S.S. Vasantha, Laminar boundary layer on a flat plate at high Prandtl number. *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)*, **17**, 585–592 (1966).