

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

УДК 534.2;

На правах рукописи



Башкатов Виталий Вадимович

**ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПРОЦЕССА
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В КАНАЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ
ОДНОРОДНОГО ПОТОКА И НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
ИМПЕДАНСА СТЕНОК ОТ УРОВНЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДАВЛЕНИЯ**

Специальность: 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

Остриков Николай Николаевич

Москва – 2026

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Нелинейная зависимость импеданса сотовых ЗПК от уровня звукового давления и постановка задачи.....	22
1.1 Гидродинамическая природа нелинейной зависимости импеданса сотовых ЗПК от уровня звукового давления	22
1.2 Постановка задачи о распространении линейных волн в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК.....	32
1.3 Выводы к главе 1	35
Глава 2. Реализация полуаналитического метода описания процесса распространения линейных волн в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок на основе метода поперечных сечений.....	36
2.1 Основные уравнения.....	36
2.2 Применение метода поперечных сечений для решения основных уравнений и получение основных соотношений в общем виде	37
2.3 Построение итерационного метода прогонки для практической реализации полученного решения задачи.....	46
2.4 Характеристическое уравнение	49
2.5 Выводы к главе 2	55
Глава 3. Применение и верификация полуаналитического метода описания процесса распространения звука в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок.....	56
3.1 Цилиндрический канал	56
3.2 Прямоугольный канал	78
3.3 Выводы к главе 3	93

Глава 4. Разработка итерационного полуаналитического метода расчета процесса распространения линейных волн в цилиндрическом и прямоугольном каналах с однородным потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК	94
4.1 Разработка итерационной процедуры	94
4.2 Применение разработанной процедуры в случае цилиндрического канала ..	97
4.3 Применение разработанной процедуры в случае прямоугольного канала...	109
4.4 Сравнение с экспериментом.....	112
4.5 Выводы к главе 4.....	117
Заключение	119
Список литературы	122

Введение

Актуальность темы исследования. Одним из наиболее интенсивных источников шума современного магистрального самолета является вентилятор авиадвигателя. Шум вентилятора доминирует на всех взлетно-посадочных режимах полета самолета, разделяя первое место на режиме посадки с шумом обтекания планера. Международная организация гражданской авиации (ИКАО), отвечающая перед ООН за мировой гражданский воздушный транспорт, проводит твердую политику на повышение его экологической безопасности, что находит отражение в постоянном ужесточении нормативных требований к шуму на местности вновь создаваемых и эксплуатируемых воздушных судов. Гражданское воздушное судно, не удовлетворяющее требованиям ИКАО по шуму на местности, не может получить разрешение на эксплуатацию, и поэтому акустические характеристики пассажирских самолетов являются одним из ключевых инструментов конкурентной борьбы между авиастроительными компаниями. Особую актуальность тема снижения шума имеет для отечественных импортозамещенных самолетов.

Одним из наиболее эффективных способов снижения шума вентилятора авиадвигателя является облицовка его каналов звукопоглощающими конструкциями (ЗПК), параметры которых подбираются таким образом, чтобы обеспечить максимальное снижение шума на местности на различных режимах работы двигателя в течение взлетно-посадочного цикла полета самолета. Пример схемы расположения ЗПК в двигателе представлен на рисунке 1.

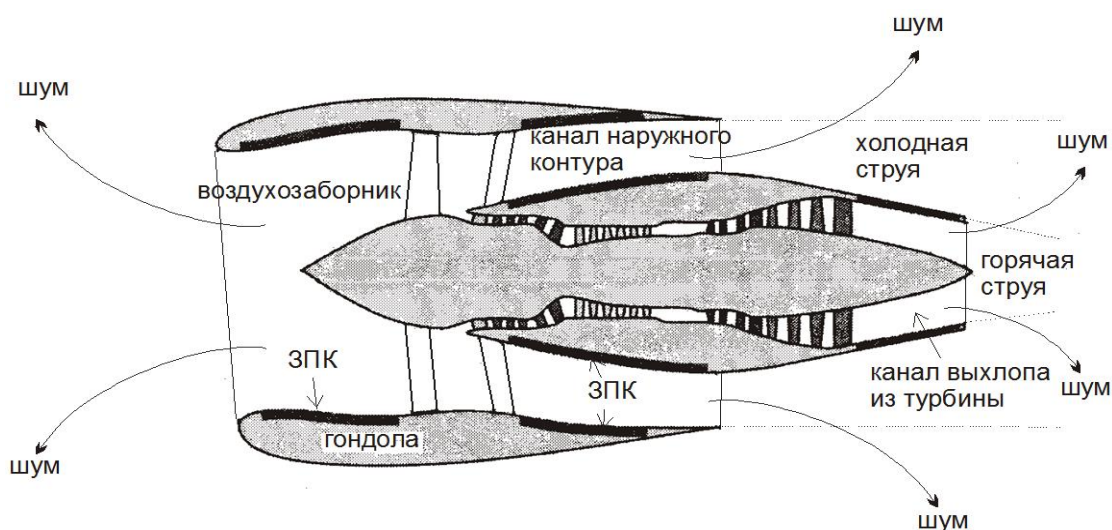


Рисунок 1 – Схема расположения ЗПК в ТРДД

В настоящее время в каналах турбореактивных двухконтурных двигателей (ТРДД) используются в основном одно – двух и даже трехслойные сотовые ЗПК, принципиальная схема которых представлена на рисунке 2.

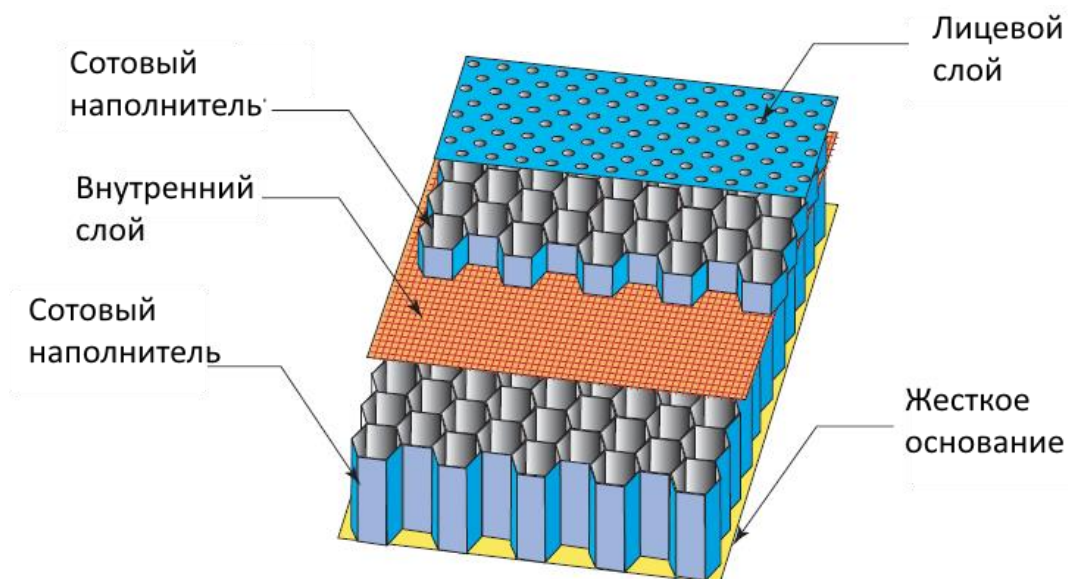


Рисунок 2 – Схема двухслойной ЗПК резонансного типа

ЗПК состоит из входного перфорированного листа, расположенного за ним первого слоя сотового заполнителя с шестигранной ячейкой, внутреннего перфорированного листа, второго слоя сотового заполнителя и жесткого основания. С акустической точки зрения многослойные сотовые ЗПК с большой степенью точности относятся к локально реагирующим конструкциям [1, 2].

Задача увеличения затухания звука, распространяющегося в неоднородном потоке вдоль стенок канала авиадвигателя, не эквивалентна задаче увеличения коэффициента звукопоглощения облицовок стенок канала [1], что обычно реализуют в приложениях строительной акустики применительно к акустике помещений. Звук распространяется по каналам авиадвигателя в виде суперпозиции так называемых вращающихся азимутальных мод [2]. Если стенки канала облицованы ЗПК, характеризующимися некоторым комплексным значением импеданса, то на каждой частоте каждая распространяющаяся звуковая мода приобретает индивидуальное затухание. Варьируя импеданс ЗПК, можно добиться заметного увеличения затухания для одной фиксированной звуковой моды, однако затухание других мод может при этом снизиться. Суммарное затухание звукового поля в канале определяется модальным составом звукового поля, т.е. распределением амплитуд между различными звуковыми модами, генерируемыми источниками звука, коим в случае авиадвигателей является вентилятор. Если значение импеданса ЗПК подобрано таким образом, что ослабляется звуковая мода, имеющая малую амплитуду, а звуковые моды, имеющие большие амплитуды, обладают малым затуханием, то суммарное затухание звука практически не изменится. Таким образом, задача настройки ЗПК путем выбора значения импеданса на каждой частоте состоит в обеспечении сильного затухания наиболее «вредных» звуковых мод в модальном составе звукового поля, генерируемого вентилятором авиадвигателя.

В целом, задача настройки импеданса ЗПК на максимальное снижение шума на местности оказывается достаточно трудной, поскольку требует решения сразу нескольких задач, одной из которой является экспериментальное определение модального состава звукового поля, генерируемого вентилятором в каналах авиадвигателя, на основе которого должны определяться наиболее «вредные» звуковые моды [3-9].

Задача определения звуковых мод, на глушение которых необходимо настраивать импеданс ЗПК, оказывается достаточно нетривиальной. Здесь необходимо обратить внимание на то, что каждая звуковая мода излучается из

открытого конца канала в окружающее пространство с индивидуальной амплитудой и диаграммой направленности [10]. При этом для некоторых звуковых мод имеет место сильный эффект отражения от открытого конца обратно внутрь канала, в результате которого такие моды значительно теряют свою амплитуду в дальнем звуковом поле. Тем самым настраивать параметры ЗПК на обеспечение сильного затухания таких звуковых мод не требуется, так как они обладают достаточно низкой эффективностью излучения из канала.

При излучении звука из канала воздухозаборника, в который всасывается поток, реализуются дополнительные эффекты. Так, в работе [11] был экспериментально подтвержден результат, полученный изначально численно в работе [12]: на диаграмму направленности звука в дальнем поле существенное влияние оказывает эффект рефракции звука в неоднородном потоке, имеющем место вблизи среза воздухозаборника.

Следующим фактором, усложняющим настройку импеданса ЗПК на максимальное снижение шума на местности, является зависимость импеданса сотовых ЗПК от всех геометрических параметров ЗПК, а также от уровня и спектрального состава падающего на поверхность ЗПК звукового поля и характеристик потока в канале.

Уровень звукового давления на поверхности ЗПК вблизи вентилятора современного авиадвигателя может достигать 150 дБ и более на максимальных режимах работы. В этих условиях сотовые ЗПК, устанавливаемые на стенках каналов двигателя для снижения шума, работают на нелинейном режиме, который проявляется в зависимости импеданса от уровня звукового давления. Данный эффект возникает на высоких уровнях звукового давления, при которых внутри отверстий перфорированных листов сотовых ЗПК реализуется достаточно высокая скорость колебательного движения среды, в результате чего из-за условий прилипания на стенках имеет место рождение интенсивной завихренности, которая отрывается на острых кромках отверстий и вбрасывается как внутрь ячеек ЗПК, так и внутрь потока из ячеек. При этом чем выше уровень звукового давления, тем более интенсивные рождаются вихри. Это существенно нелинейный процесс,

имеющий свою собственную динамику и влияющий на динамику всего потока в пограничных слоях. Данный процесс обуславливает зависимость импеданса сотовых ЗПК не только от уровня звукового давления, но и от спектрального состава звука на лицевой поверхности ЗПК. Для характерных геометрических параметров сотовых ЗПК, устанавливаемых в авиадвигатели, данный эффект начинает оказывать заметное влияние на импеданс уже при уровнях звукового давления более 110 дБ. Это означает, что практически на всех режимах работы двигателя звук, генерируемый вентилятором, распространяется и затухает в канале при реализации нелинейного режима работы ЗПК, установленных на его стенках. Если на некоторой частоте уровень звукового давления не превышает 150 дБ, то задача о распространении звука в относительно коротком канале с неоднородным потоком может быть рассмотрена с высокой степенью точности в рамках решения линейных уравнений. Однако если стенки канала облицованы сотовыми ЗПК и уровень звукового давления достаточно высок для реализации нелинейного режима их работы, то при решении этих уравнений вместо конкретного значения импеданса в граничном условии на заданной частоте теперь необходимо использовать зависимость импеданса от уровня звукового давления и скорости потока, которая описывается тем или иным полуэмпирическим соотношением. Тем самым указанная задача становится нелинейной, и данная нелинейность содержится в граничном условии.

Таким образом процесс разработки ЗПК состоит из трех основных этапов. Первый этап – определение модального состава звукового поля, генерируемого вентилятором двигателя в каналах. Второй этап – определение оптимальных значений импеданса облицовки стенок канала, при которых достигается наибольшее снижение шума в дальнем поле при заданном модальном составе, на основе решения прямых и обратных задач о распространении акустических возмущений в канале с неоднородным потоком при наличии импедансных граничных условий на стенках канала, включая дифракционную задачу излучения звука из открытого конца канала. Третий этап – определение геометрических параметров ЗПК, при которых достигаются оптимальные значения импеданса. К

настоящему времени развиты теоретические и численные подходы к решению всех указанных задач, которые основаны на решении линейных уравнений с линейными граничными условиями импедансного типа. Это же относится и к методам определения импеданса ЗПК в зависимости от скорости потока по результатам измерений на установках типа «Интерферометр с потоком». В то же время зависимость импеданса ЗПК от уровня звукового давления приводит к необходимости постановки нелинейных граничных условий. Если к настоящему времени зависимость импеданса ЗПК от уровня звукового давления хорошо изучена при отсутствии потока на установках типа «Импедансная труба» или «Интерферометр нормального падения», то процесс распространения звука при условии зависимости импеданса стенок канала от уровня звукового давления практически не исследовался из-за отсутствия математических моделей, позволяющих получать решение задачи за приемлемое время. Так как вентилятор современного авиадвигателя создает в местах установки ЗПК в каналах уровень звукового давления порядка 150 дБ, при котором имеет место ярко выраженный нелинейный режим работы ЗПК, то проблема учета влияния нелинейного режима работы ЗПК была в 2021 году сформулирована как одна из пяти ключевых проблем в области исследования ЗПК в рамках рабочей группы «Liners» форума ведущих авиационных центров IFAR – консорциума, состоящего из специалистов NASA, ONERA, DLR, NLR и ЦАГИ.

Степень разработанности темы. К настоящему моменту времени количество опубликованных полуэмпирических моделей импеданса ЗПК исчисляется десятками [13-35]. Эти модели в разной степени учитывают различные физические эффекты, реализующиеся в ячейках ЗПК под действием периодического по времени звукового давления высокого уровня, так как в основном они базируются на достаточно грубых предположениях о характере течения внутри ячеек. В частности, ни в одной полуэмпирической модели не рассматривается образование и эволюция вихрей в ячейках ЗПК под действием падающего возмущения, во многом определяющее нелинейный эффект. Как следствие, эти модели могут лишь качественно предсказывать зависимость

импеданса ЗПК от определяющих параметров, имея при этом существенную погрешность в действительной части импеданса, отвечающую за диссипативные свойства ЗПК. В связи с обозначенными трудностями в последнее время была существенно расширена номенклатура методов для исследования течения внутри ячеек ЗПК. Для экспериментального исследования поля скорости в ячейках ЗПК и вблизи их внешней поверхности используются лазер-доплеровские и PIV методы [36-39], а для вычисления импеданса ЗПК используется прямое численное моделирование падения волн высокой интенсивности на поверхность панелей ЗПК разной конструкции [39-48]. Результаты этих исследований демонстрируют сложный характер течения внутри ячеек ЗПК при высоком уровне звукового давления. Таким образом задача описания нелинейных свойств импеданса ЗПК при высоких уровнях звукового давления падающего возмущения является достаточно трудной и в полной мере не решена до сих пор.

Что касается направления решения волноводных задач распространения звука в каналах, уравнения, описывающие распространение звука в покоящейся среде, были сформулированы Рэлеем ещё в 1877 г [13]. Начало рассмотрения задач распространения и затухания звука в каналах с импедансными стенками было положено в работе [49] для случая отсутствия потока. Однако направление разработки математических моделей распространения звука в каналах начало активно развиваться с вывода Д.И. Блохинцевым в 1946 году уравнения распространения звука в неоднородном потенциальном потоке [50]. В свою очередь задача оптимизации импеданса ЗПК изначально решалась на основе модельных задач о распространении звука в однородных цилиндрических и кольцевых каналах с импедансными стенками. Существенный вклад в решение задач по оптимизации затухания отдельных звуковых мод в каналах с однородным потоком внесли работы Тестера [51, 52], Кремера [53] и Раиса [54-59]. При исследовании акустического поля в плоском канале с одной облицованной стенкой Тестер установил важную роль двойных точек для повышения затухания звука в канале. В двойных точках происходит слияние отдельных мод и образование двойных мод. Затухание двойной моды является оптимальным в том смысле, что

оно всегда больше, чем затухание наименее ослабляемой из двух исходных мод. Главной заслугой Раиса является введение критического параметра, названного им “mode cut-off ratio” – дословно «коэффициент или степень запираания моды», и успешная попытка представить выражения для затухания через этот критический параметр. В то же время были получены уравнения распространения звука для случая неоднородных завихренных течений [60-61], в частном случае потенциального потока переходящие в уравнение Блохинцева. Одновременно были получены уравнения для модельных случаев распространения звука в неоднородных потоках, среди которых необходимо упомянуть уравнение Придмора-Брауна [62], описывающее распространение акустических и гидродинамических возмущений в плоскопараллельном потоке с произвольным профилем скорости. Параллельно были выведены импедансные граничные условия для уравнений распространения звука в потоках: условие Ингарда [63] для распространения звука в однородном потоке и условие Майерса [64] для распространения звука в неоднородном потенциальном потоке. В настоящее время они известны как граничные условия Ингарда-Майерса. Решение задачи об излучении звука из открытого конца канала при отсутствии потока впервые было представлено в работе [65]. В целом в период 40-50-х годов были разработаны основные методы математической физики решения волноводных дифракционных задач в различных каналах без потока, представленные в монографиях [10, 66-67]. Для случая наличия потока систематические исследования процесса распространения звука в каналах при наличии импедансных границ и его излучения из открытого конца канала началось в 1950-1960-е годы. А. Найфе в работах [68-71] положил начало исследованиям процессов распространения звука в плавно-неоднородных каналах с потоком при наличии импедансных границ с использованием асимптотических методов. В этих работах в общем виде были развиты асимптотические подходы к решениям линеаризованных уравнений Эйлера или Навье-Стокса, которые систематически изложены в его широко известной монографии [72]. В дальнейшем был опубликован целый ряд работ, посвященных исследованию особенностей распространения звука в плавно-

неоднородных каналах с потоком с использованием асимптотических методов, в целом основанных на ВКБ-приближениях [73-81]. Однако с точки зрения практического применения в задачах оптимизации параметров ЗПК эти методы имеют ряд недостатков. Во-первых, в важных с практической точки зрения случаях слияния волновых чисел различных звуковых мод в некотором сечении канала с импедансными стенками, или же возникновения условия отсечки для какой-либо моды в случае канала с жесткими стенками, решение в окрестности этого сечения должно строиться с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений [68, 74, 80]. Тем самым в этих случаях отсутствует равномерно пригодное решение задачи. Во-вторых, сравнение результатов численных расчетов с помощью метода конечных элементов с асимптотическим решением, полученным с помощью адиабатического инварианта, предложенного в работе [81], показывает, что асимптотическое решение предсказывает процесс распространения звука в плавно-неоднородном канале с приемлемой точностью только в тех случаях, когда длина волны звука много меньше характерного масштаба неоднородности канала. В свою очередь предположение о малости длины волны по сравнению с характерным масштабом неоднородности, в рамках которого сформулированы вышеупомянутые модели, не выполняется для практических значимых частот шума, излучаемого вентилятором двигателя. Это связано с тем, что асимптотическое решение не описывает процесс отражения и трансформации звуковых мод при прохождении неоднородных участков канала [82-83]. Однако указанных недостатков лишен метод поперечных сечений, развитый в теории нерегулярных волноводов в электродинамике, представленный в работах [84-93]. Этот метод в последнее время нашел применение в квантовой оптике под названием «метод связанных волн» [94-95], но он до сих пор не применялся в аэроакустике. С идеологической точки зрения этот метод связан с методом сшивки мод, который применяется в математической постановке задачи о прохождении звуковых волн через сильный разрыв значения импеданса на стенке канала [61, 96-101]. Разрыв импедансных граничных условий приводит к неединственности решения уравнений, описывающих распространение звука в канале с

импедансными стенками, в связи с чем требуется ставить стандартное для дифракционных задач дополнительное условие конечности акустической энергии в окрестности точки разрыва. До последнего времени в указанных работах не содержалось обоснования правильности выбора решения при использовании метода сшивки мод. В работе [102] с помощью метода Винера-Хопфа было получено решение о прохождении звуковых мод через разрыв импеданса на стенках канала, которое удовлетворяет условию конечности энергии. Это решение позволило верифицировать способ выбора правильного решения в методе сшивки мод и сформулировать надежный метод описания процесса прохождения звука через множественные разрывы импеданса [103], который был адаптирован к применению метода поперечных сечений для описания процесса прохождения звука через канал с потоком с неоднородным вдоль оси импедансом стенки [104]. Именно этот метод был использован в настоящей работе для разработки полуаналитического метода расчета процесса распространения звука в каналах с учетом нелинейного режима работы ЗПК.

До настоящего момента времени очень малое число исследований было посвящено построению математических моделей распространения звука в каналах с потоком при условии нелинейного режима работы ЗПК. В основном это работы, в которых в качестве модели распространения звука используются численные методы: разрывный метод Галеркина [105, 106], метод конечных элементов [107, 108] или же DNS [109]. К примеру, возможность расчета нелинейного эффекта ЗПК реализована в вычислительной системе корпорации ECHA [110-112], однако она базируется на микроскопическом подходе к описанию акустики сотовых ЗПК, т.е. описанию аэроакустических процессов для каждого отверстия сотовых ЗПК. Поскольку в канале воздухозаборника сотовые ЗПК содержат десятки тысяч отверстий, то такой подход требует существенных вычислительных затрат и не может быть использован для практических приложений, в которых требуется решать обратную задачу по поиску оптимальных параметров ЗПК, обеспечивающих максимальное снижение шума в дальнем поле.

Единственной работой, в которой построена аналитическая модель распространения звука с учетом нелинейного режима работы ЗПК, является работа [113], в которой используются асимптотические решения, построенные на основе ВКБ-приближений, для описания процесса распространения звука при плавно-неоднородном импедансе стенок канала.

В настоящей работе методы, развитые в работе [113], обобщены в направлении расширения области применимости математической модели: вместо асимптотических решений, описывающих процесс распространения звука в плавно-неоднородных каналах с потоком и имеющих недостаточную общность для практических применений к каналам двигателя, был развит новый подход на основе метода поперечных сечений, который позволил дополнительно описать эффекты отражения звука при сильных вариациях импеданса стенки канала.

Цели и задачи работы. Целью настоящей работы является разработка полуаналитической модели описания процесса распространения линейных волн в геометрически однородных каналах с потоком с учетом нелинейной зависимости импеданса стенок от уровня возмущений давления на основе метода поперечных сечений.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Изучить и проанализировать научные публикации, в которых рассматриваются задачи о распространении как электромагнитных, так и механических волн в волноводах при наличии неоднородных граничных условий.

2. Реализовать полуаналитическую модель описания процесса распространения линейных волн в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок с учетом эффекта отражения и трансформации мод в каждом поперечном сечении участков канала с неоднородным импедансом на основе обобщения метода поперечных сечений.

3. Применить реализованный метод описания процесса распространения звука в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок в

частных случаях цилиндрического и прямоугольного каналов, провести верификацию полученных решений с использованием численного метода конечных элементов (МКЭ).

4. Разработать и реализовать итерационный метод расчета процесса распространения линейных волн в цилиндрическом и прямоугольном каналах с однородным потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК на основе реализованной в задаче 2 полуаналитической модели.

5. Провести параметрическое исследование влияния нелинейного режима работы ЗПК на эффективность затухания звука в каналах с различной геометрией поперечного сечения (цилиндрическая, прямоугольная) при наличии однородного потока.

6. Разработать метод анализа возможности экспериментального исследования нелинейной зависимости импеданса панелей сотовых ЗПК от уровня звукового давления с использованием установки «Интерферометр с потоком».

Научная новизна состоит в следующем:

1. Реализована математическая модель описания процесса распространения линейных волн в каналах с однородным потоком и произвольно неоднородным импедансом стенок, учитывающая эффект отражения и трансформации мод в каждом поперечном сечении участков канала с неоднородным импедансом, на основе метода поперечных сечений.

2. В частных случаях каналов цилиндрической и прямоугольной геометрии разработанная математическая модель описания процесса распространения линейных волн в каналах с однородным потоком и произвольно неоднородным импедансом стенок верифицирована с использованием численного метода конечных элементов.

3. Впервые представлена полуаналитическая математическая модель описания процесса распространения линейных волн в цилиндрическом и прямоугольном каналах с однородным потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что разработанная полуаналитическая математическая модель описания процесса распространения линейных волн в цилиндрическом и прямоугольном каналах с однородным потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК в силу того, что она сформулирована в терминах волноводных мод, позволяет понять причину проявления различных физических эффектов в итоговом решении конкретной задачи путем анализа поведения амплитуд мод и корней характеристического уравнения по мере распространения исходного возмущения по каналу.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанная математическая модель позволяет повысить уровень математического моделирования при решении задачи оптимизации параметров ЗПК при высоких уровнях звукового давления на внутренних стенках канала. Еще одним важным практическим преимуществом разработанного метода является его быстроедействие и сравнительно невысокая потребность в вычислительных ресурсах по сравнению с численными методами.

Методология и методы исследования. Для решения задачи о распространении линейных волн в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок была реализована полуаналитическая математическая модель на основе метода поперечных сечений.

Верификация реализованной математической модели описания процесса распространения линейных волн в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок проводилась с использованием численного метода конечных элементов.

Результаты расчетов с использованием полуаналитического итерационного алгоритма расчета процесса распространения линейных волн в канале сравнивались с результатами эксперимента на установке «Интерферометр с потоком» ФАУ «ЦАГИ».

Положения, выносимые на защиту:

1. Реализация и верификация полуаналитической математической модели описания процесса распространения линейных волн в однородном цилиндрическом канале с потоком и произвольно неоднородным импедансом стенок, описывающей эффекты непрерывного отражения и трансформации мод в процессе распространения линейных волн на основе метода поперечных сечений.

2. Разработка итерационного полуаналитического метода расчета процесса распространения линейных волн в цилиндрическом канале с однородным потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК с использованием полуаналитической модели описания процесса распространения линейных волн в однородном цилиндрическом канале с потоком и неоднородным импедансом стенок.

3. Реализация и верификация полуаналитической математической модели описания процесса распространения линейных волн в однородном прямоугольном канале с потоком и произвольно неоднородным импедансом стенок, описывающей эффекты непрерывного отражения и трансформации мод в процессе распространения линейных волн на основе метода поперечных сечений.

4. Разработка итерационного полуаналитического метода расчета процесса распространения линейных волн в прямоугольном канале с однородным потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК с использованием полуаналитической модели описания процесса распространения линейных волн в однородном прямоугольном канале с потоком и неоднородным импедансом стенок.

Все результаты диссертации получены лично соискателем или при его непосредственном участии при научном руководстве кандидата физико-математических наук, доцента Острикова Н.Н.

Степень достоверности. Достоверность изложенных в настоящей работе результатов обосновывается тем, что на каждом этапе построения представленных математических моделей проводились многопараметрические верификационные расчеты с целью сравнения как с известными аналитическими решениями типовых

задач, так и с решениями, полученными с использованием численного метода, верифицированного для решения подобного рода задач.

Результаты работы физически непротиворечивы, качественно согласуются с имеющимися представлениями о физической сути рассматриваемых явлений, апробированы на большом количестве профильных научных конференций и опубликованы в нескольких рецензируемых научных журналах.

Соответствие паспорту специальности. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.9 — Механика жидкости, газа и плазмы, в частности, пункту 15 — Линейные и нелинейные волны в жидкостях и газах.

Апробация работы:

Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

1. Акустика среды обитания (АСО-2026): XI Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов, Москва, 29-30 мая 2026 г.
2. 68-я всероссийская научная конференции МФТИ, Москва-Долгопрудный-Жуковский, 30 марта – 4 апреля 2026 г.
3. XXI научно-техническая конференция по аэроакустике, Суздаль, 21-26 сентября 2025 г.
4. 67-я всероссийская научная конференция МФТИ, Москва-Долгопрудный-Жуковский, 31 марта – 5 апреля 2025 г.
5. Акустика среды обитания (АСО-2025): X Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов, Москва, 30-31 мая 2025 г.
6. Акустика среды обитания (АСО-2024): IX Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов, Москва, 23-24 мая 2024 г.
7. XXXVI сессия Российского акустического общества, Москва, 21-25 октября 2024 г.
8. 66-я всероссийская научная конференция МФТИ, Москва-Долгопрудный-Жуковский, 1 – 6 апреля 2024 г.
9. XX научно-техническая конференция по аэроакустике. Суздаль, 24-29 сентября 2023 г.

10. XXXV сессия Российского акустического общества, Москва, 13-17 февраля 2023 г.
11. 65-я всероссийская научная конференция МФТИ, Москва-Долгопрудный-Жуковский, 3 – 8 апреля 2023 г.
12. Акустика среды обитания (АСО-2023): VIII Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов, Москва, 25-26 мая 2023 г.
13. 21-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва, 21-25 ноября 2022 года.
14. Акустика среды обитания (АСО-2022): VII Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов, Москва, 26-27 мая 2022 г.
15. XXXIV сессия Российского акустического общества, Москва, 14-18 февраля 2022 г.
16. 64-я всероссийская научная конференция МФТИ, Москва-Долгопрудный-Жуковский, 29 ноября – 3 декабря 2021 г.
17. Акустика среды обитания (АСО-2021): Шестая Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов, Москва, 21 мая 2021 г.

Публикации:

1. *Баикатов В.В., Остриков Н.Н.* Исследование влияния нелинейного режима работы сотовых ЗПК при высоких уровнях звукового давления на распространение звуковых волн в цилиндрическом канале с потоком // Акустический журнал, 2024. Т. 70. № 1. С. 11–20.
2. *Баикатов В.В., Остриков Н.Н.* Численное исследование процесса отражения звука при прохождении зон неоднородности в канале с потоком // Ученые записки ЦАГИ, 2026. Т. LVII. № 1. С. 20–33.
3. *Остриков Н.Н., Баикатов В.В., Яковец М.А.* Полуаналитический метод расчета звукового поля в цилиндрическом канале с неоднородным импедансом стенок при наличии однородного потока // Акустический журнал, 2026. Т. 72. № 3. С. 374–392.

Объем и структура работы: работа состоит из введения, 4 глав основной части, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 132 страницы, включая 62 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 133 наименования.

Во введении представлен обзор литературы по теме диссертации, сформулированы цель работы и её актуальность, указаны решённые задачи, обоснована научная новизна, обозначена теоретическая и практическая значимость работы, аргументирована достоверность результатов, отмечено соответствие содержания работы паспорту специальности, перечислены основные мероприятия, на которых результаты работы прошли апробацию, а также публикации, в которых основные результаты диссертационной работы были изложены.

В главе 1 проведен анализ гидродинамической природы нелинейной зависимости импеданса сотовых ЗПК от уровня звукового давления и сформулирована задача о распространении линейных волн в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК.

В главе 2 реализован метод описания процесса распространения линейных волн в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок на основе метода поперечных сечений в общем виде, реализована итерационная процедура для практического применения метода, сформулирован принцип решения характеристического уравнения.

В главе 3 реализованный метод описания процесса распространения звука в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок применен в частных случаях цилиндрической и прямоугольной геометрии каналов, произведена верификация реализованного метода на основании сравнения с результатами численного моделирования с использованием МКЭ, представлен анализ полученных в расчетах результатов с использованием возможностей полуаналитической модели.

В главе 4 разработан итерационный метод расчета процесса распространения звука в геометрически однородных каналах с однородным потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК на основе реализованной

полуаналитической модели, разработанный метод применен в частных случаях цилиндрической и прямоугольной геометрии поперечного сечения. Произведено сравнение результатов расчетов с использованием разработанного итерационного метода с результатами эксперимента в случае прямоугольного канала при отсутствии потока.

В заключении изложены основные результаты работы.

Глава 1. Нелинейная зависимость импеданса сотовых ЗПК от уровня звукового давления и постановка задачи

1.1 Гидродинамическая природа нелинейной зависимости импеданса сотовых ЗПК от уровня звукового давления

Проблема генерации шума вентилятором авиадвигателя и общая задача его снижения с помощью ЗПК относится к сложным нестационарным задачам механики сплошных сред. Действительно, вращающиеся с высокой угловой скоростью лопасти вентилятора, с одной стороны, создают всасывающийся высокоскоростной поток в каналы двигателя, а, с другой стороны, в ближнем поле вентилятора возникает существенно нестационарное течение, причем вниз по потоку за вентилятором образуется мощный турбулентный след, содержащий интенсивные концевые вихри, сходящие с лопаток. При наличии сотовых ЗПК, установленных на стенках каналов двигателя, возникают дополнительный вид движения сплошной среды – интенсивные осцилляции потока воздуха через отверстия перфорированных панелей совместно с нестационарным течением внутри каждой ячейки ЗПК.

Описание в общем виде указанных нестационарных течений требует привлечения полной системы уравнений движения сплошной среды – полной системы уравнений Навье-Стокса, решение которой при отсутствии ЗПК возможно только с помощью численного моделирования на высокопроизводительной вычислительной технике [114-119] (рисунок 1.1). Однако при наличии ЗПК такое численное моделирование фактически невозможно из-за большого числа отверстий, исчисляемого десятками тысяч. Поэтому полная задача должна быть упрощена, для чего необходимо провести анализ нестационарных процессов применительно к значениям параметров, реализуемым в натурных авиадвигателях.

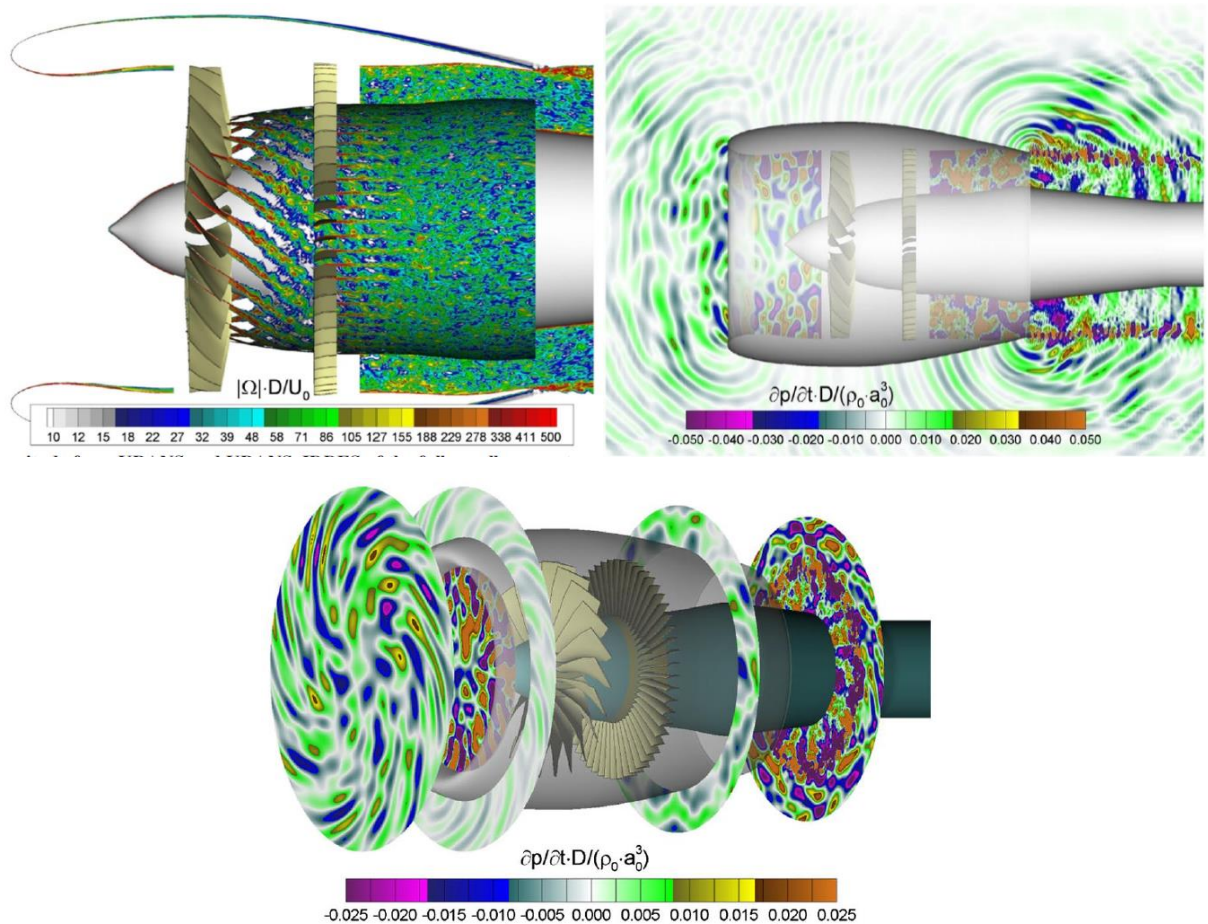


Рисунок 1.1 – Примеры результатов численного моделирования течения в двигателе, представленные в [117]

К настоящему моменту времени сложилось фундаментальное физическое представление о том, что всякое нестационарное движение газа есть суперпозиция трех особых видов движения: вихревого, теплового и акустического движений [120, 121]. Их часто называют вихревой, энтропийной и акустической компонентами (модами) движений. При этом вихревая компонента движения рассматривается как несжимаемое течение, которое включает в себя и потенциальный несжимаемый поток, создаваемый движущимися телами [120]. В силу явления нелинейности данные компоненты движений взаимодействуют между собой, приводя к взаимопревращению движений. Превращение вихревой и энтропийной компонент движения в акустическую моду составляет существо процесса аэродинамической генерации звука.

В задачах, в которых целевой функцией является исследование только процессов распространения различных возмущений по каналам двигателя при

наличии ЗПК, делается допущение о том, что эти возмущения не оказывают влияния на процесс их генерации вентилятором двигателя. Тем самым задачи о генерации и распространении возмущений разделяются и решаются по отдельности. При этом вначале решается задача о генерации возмущений вентилятором двигателя, а далее эти возмущения являются входными граничными данными в задаче об их эволюции в канале двигателя.

Сами возмущения в каналах рассматриваются в таких задачах на фоне стационарного среднего потока, состоящего из потенциального потока и пограничного слоя. Эти возмущения также включают в себя вихревую, энтропийную и акустическую компоненты, которые взаимодействуют между собой, порождая друг друга. Акустические возмущения в каналах двигателя можно рассматривать с высокой степенью точности в линейной постановке задачи. Это утверждение справедливо в значительной части канала воздухозаборника даже в случаях сверхзвуковой концевой скорости лопаток вентилятора, когда генерируются ударные волны. Действительно, непосредственно вблизи передних кромок лопаток вентилятора современных авиадвигателей перепад давления (амплитуда) в генерируемых ударных волнах может составлять величину порядка 175 дБ, хотя сами ударные волны относятся в данном случае к слабым разрывам. Однако из-за сильного нелинейного эффекта амплитуда периодической системы скачков сильно убывает на начальном участке распространения [122] и уже на расстоянии порядка 40 см от вентилятора вверх по потоку в воздухозаборнике их амплитуда падает на величину порядка 20 дБ, а скорость их распространения близка к местной скорости звука в потоке, т.е. эффект нелинейности становится относительно слабым.

С одной стороны, турбулентные вихревые и энтропийные возмущения в пограничном слое порождают акустические возмущения (волны). Однако при числах Маха потока $M \sim 0.6$ (это характерная скорость потока в каналах современного двигателя на взлетном режиме) и при уровнях звукового давления в канале двигателя более 110 дБ генерацией звука этими акустическими волнами можно уверенно пренебрегать в случаях гладкой поверхности стенок канала [123].

С другой стороны, линейные акустические волны взаимодействуют с пограничным слоем, порождая дополнительные вихревые и энтропийные возмущения, которые отчасти изменяют характеристики турбулентного пограничного слоя. Но этот эффект оказывает слабое влияние на процесс распространения акустических волн. Наиболее сильным здесь оказывается эффект рефракции акустических волн из-за переменной скорости потока в пограничном слое. Однако эффект рефракции может оказать заметное влияние только на акустические моды, близкие к условию отсечки [124], и в целом не сильно искажает акустическое поле, состоящее в канале двигателя из тысяч акустических мод. Кроме этого, эффектами вязкости и теплопроводности среды также можно пренебрегать при описании распространения акустических волн, рассматривая в качестве основных уравнений систему уравнений Эйлера.

Тем самым при теоретических исследованиях процесса распространения акустических волн в каналах используется математическая модель распространения линейных возмущений в потенциальном потоке, описываемая полной системой линеаризованных уравнений Эйлера, причем пограничный слой рассматривается бесконечно тонким, т.е. на границах канала имеет место тангенциальный разрыв скорости потока. Поскольку каналы авиадвигателей обладают плавно-неоднородной геометрией, то в случаях необходимости получения аналитических решений рассматриваются относительно небольшие участки канала, в которых с высокой степенью точности геометрию и поток можно считать однородными. Другими словами, в этих случаях рассматривается математическая модель однородного канала с однородным потоком. В этих случаях вихревые, энтропийные и акустические возмущения не взаимодействуют друг с другом и могут описываться независимо друг от друга. При этом динамика линейных вихревых и энтропийных возмущений оказывается тривиальной: эти возмущения оказываются подобны пассивной примеси, т.е. просто переносятся однородным потоком без изменений [2].

Перейдем теперь к анализу нестационарного течения в отверстиях перфорированных панелей и ячейках сотовых ЗПК. Эти течения в полной мере

характеризуются взаимодействием вихревой, энтропийной и акустической компонент, причем ни одной из этих компонент пренебрегать нельзя, поскольку они оказывают заметное влияние на реализуемые процессы. Действительно, для уровней звукового давления, достигающего на некоторых частотах величин более 160 дБ, амплитуда скорости потока в отверстиях может составлять десятки метров в секунду (число Рейнольдса, построенное на диаметре отверстия, составляет $Re > 1000$). Тем самым на стенках и острых кромках отверстий в силу граничного условия прилипания генерируется интенсивная завихренность, которая в силу нелинейной вихревой динамики попеременно выбрасывается в виде вихревых колец или внутрь соответствующей ячейки, или в пограничный слой течения в канале двигателя (рисунок 1.2). Чем больше уровень звукового давления, падающего на отверстия ЗПК, тем большая интенсивность образующихся в них вихревых колец. Тем самым акустическая энергия в падающей волне отчасти преобразуется в энергию вихревого движения. Кроме этого, вязкая диффузия завихренности в ячейках ЗПК и граничные условия прилипания на стенках ячеек приводит к диссипативным процессам потери энергии из-за вязкости и теплопроводности (последнее особенно важно при изготовлении сотоблоков ЗПК из металла). При этом среди указанных различных механизмов диссипации энергии доминирующим оказывается механизм рождения вихрей в отверстиях, т.е. механизм преобразования акустической энергии в гидродинамическую. Исследованию нестационарных течений в ячейках ЗПК посвящено значительное количество ранее упомянутых работ: это как численные исследования [39-48], так и экспериментальные на основе лазер-доплеровских и PIV методов [36-39], и эта задача является одной из основных в тематике исследования ЗПК. Пример визуализации вихревых структур в отверстии перфорированной панели ЗПК, полученный в [39], представлен на рисунке 1.2.

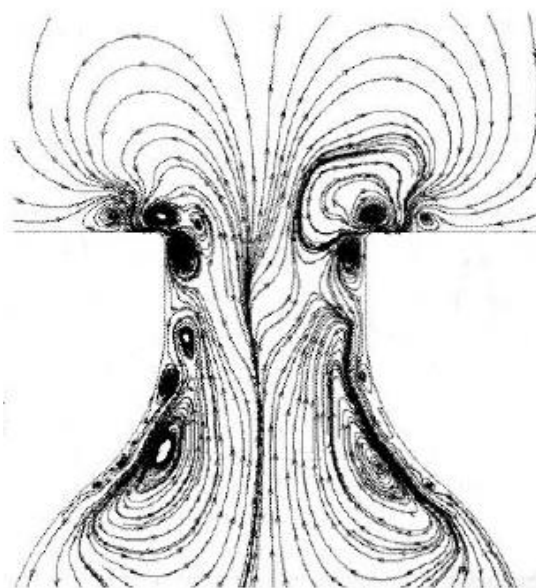


Рисунок 1.2 – Пример визуализации вихревых структур в районе горла резонатора, полученный в [39]

Описанная сложность нестационарного течения в ячейках ЗПК сильно затрудняет описание процесса взаимодействия акустических волн, распространяющихся в каналах двигателя, со стенками, на которых установлены сотовые ЗПК. Выход из этой ситуации был найден в 1940-1950-е годы и опирается на следующее утверждение. Теоремы разрешимости систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, которыми описываются волновые возмущения в среде на некоторой частоте, утверждают, что существует единственное решение, если известна передаточная функция между напряжениями, приложенными к границе среды, и скоростью колебательного движения самой границы [125]. Следствием этого является разделение общей рассматриваемой задачи на две независимые задачи. В первой задаче на каждой частоте определяется передаточная функция между приложенным акустическим давлением к поверхности ЗПК и скорости потока, выбрасываемого из отверстий перфорированных панелей внутрь канала. Во второй задаче эта передаточная функция используется в качестве граничного условия для однозначного описания процесса распространения линейных волн в канале на основе решения соответствующих уравнений.

Поскольку на лицевой панели ЗПК отверстия чередуются с жесткой стенкой, то сформулированная задача пока еще является достаточно сложной. В то же время отверстия перфорированных панелей ЗПК имеют достаточно малый диаметр (обычно не превышающий 2 мм), а расстояния между соседними отверстиями оказывается существенно меньшим характерных длин акустических волн, которые важны в задачах снижения шума вентилятора двигателя с помощью ЗПК, и поэтому сформулированная задача может быть дополнительно упрощена за счет «размазывания» по лицевой поверхности ЗПК скоростей потоков, исходящих из отверстий ЗПК, с сохранением расхода воздуха. Такой подход, в целом обоснованный в работе Фока [14], и фактическое отсутствие связи между соседними ячейками ЗПК вводят в действие математическую модель непрерывной локально-реагирующей податливой границы. В этой модели граница характеризуется на каждой частоте комплексным значением импеданса, связывающим в каждой точке границы звуковое давление и нормальную скорость границы согласно соотношению

$$Z = \frac{p'}{v'_n}, \quad (1.1)$$

где p' – звуковое давление, v'_n – нормальная скорость возмущения границы. При этом действительная часть импеданса характеризует потери акустической энергии в ЗПК, а мнимая часть – сдвиг фаз между возбуждающим границу звуковым давлением и откликом податливой границы в виде её нормальной скорости. Помимо этого, на практике также используется понятие удельного адмиттанса (проводимости) – обратной величине к удельному импедансу:

$$\beta = \rho_0 c \frac{v'_n}{p'}, \quad (1.2)$$

где ρ_0 и c – плотность и скорость звука соответственно.

Таким образом, вся сложность нестационарного течения внутри ячеек ЗПК в данном подходе описывается только одной величиной – импедансом. В общем

случае многослойных сотовых ЗПК величина импеданса зависит от частоты, геометрических параметров конструкции и характеристик потока вблизи стенки:

$$Z = Z(f, L, h_j, F_j, d_j, t_j, SPL, M, \delta), \quad (1.3)$$

где f – частота звука, L – длина звукопоглощающей облицовки, h_j – глубина воздушной полости, F_j – процент перфорации перфорированного листа, d_j – диаметр отверстий в листе, t_j – толщина листа, SPL – уровень звукового давления на поверхности облицовки, выраженный в децибелах, M – число Маха потока в канале, δ – толщина пограничного слоя, j – нумерация слоев многослойной ЗПК. Зависимость импеданса от уровня звукового давления обусловлена нелинейным процессом образования вихрей в отверстиях перфорированных панелей.

Большинство из упомянутых ранее моделей импеданса ЗПК опирается на полуэмпирическую модель импеданса жесткой стенки, имеющей толщину существенно меньшую длины волны, в которой вырезано одно круглое отверстие. Эти модели основаны на тех или иных приближенных решениях уравнений Навье-Стокса для описания нестационарного течения внутри отверстия. Кроме этого, в последнее время импеданс сотовых ЗПК стал рассчитываться в прямом численном моделировании процесса его измерения в так называемой импедансной трубе (интерферометр нормального падения) [126]. К настоящему моменту до сих пор нет удовлетворения в точности применяемых полуэмпирических моделей, но они продолжают совершенствоваться [127].

В настоящей работе для вычисления импеданса двухслойных сотовых ЗПК был использован метод А.Ф. Соболева, в основе которого лежит полуэмпирическая модель А.Ф. Соболева импеданса однослойных сотовых ЗПК [32]. В этой модели комплексное значение импеданса Z однослойной ЗПК определяется для каждой частоты $\omega = 2\pi f$ и уровня звукового давления L на основе решения следующего трансцендентного уравнения:

$$Z = \left(\frac{ikt}{Ff(\nu')} + \frac{ik\delta_{nl}\Phi(F)}{Ff(\nu)} \right) + \frac{Z_1}{F} + 0.424 \frac{2 \cdot 10^{L/20-5} (1 - F^2 C_D^2)}{\gamma P_{st} |Z| F C_D^2} + \frac{C_v M}{F C_D^2} + Z_h, \quad (1.4)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ – волновое число, t – толщина панели, F – процент перфорации панели, то есть отношение суммарной площади отверстий к общей площади панели, δ_l – концевая поправка, вводимая для учёта взаимодействия между отверстиями, $\Phi(F)$ – обратная функции Фока

$$\Phi(F) = 1 - 1.47\sqrt{F} + 0.47\sqrt{F^3}, \quad (1.5)$$

P_{st} – атмосферное давление, M – число Маха потока, скользящего вдоль ЗПК, $C_v = 0.12 \div 0.17$ – коэффициент, зависящий от параметров пограничного слоя, C_D – коэффициент расхода через отверстие,

$$f(\nu) = 1 - \frac{2}{\zeta a} \frac{J_1(\zeta a)}{J_0(\zeta a)}, \quad (1.6)$$

$\zeta = \sqrt{-i\omega/\nu}$ – волновое число Стокса, $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка, $J_1(z)$ – функция Бесселя первого порядка, ν – кинематическая вязкость,

$$Z_1 = 1 - \frac{2}{kd} J_1(kd), \quad (1.7)$$

$$\delta_{nl} = \delta_l \frac{1 + 5000M_0^2}{1 + 10000M_0^2} \frac{1}{1 + 305M^3} \quad (1.8)$$

– поправка для учета нелинейности при высоких уровнях звукового давления,

$$M_0 = \frac{2 \cdot 10^{L/20-5}}{\gamma P_{st} |Z| F} \quad (1.9)$$

– число Маха в отверстии перфорированной панели, L – уровень звукового давления, выраженный в дБ, $\nu' = \nu \left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}}\right)^2$ – эффективное значение кинематической вязкости (используется, если панель обладает достаточно хорошей теплопроводностью), Pr – число Прандтля, $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты,

$$Z_h = -i \cdot \text{ctg}(kh) \quad (1.10)$$

– импеданс расположенной за перфорированной панелью воздушной полости с жестким основанием, a и d – радиус и диаметр отверстия перфорированной панели. Концевая поправка δ_l вводится для учёта конечных размеров отверстия-трубки. В работе [32] обосновывается выбор значения $\delta_l = 0.65d$ именно для рассматриваемого класса ЗПК. Коэффициент расхода через отверстие C_D зависит от параметров перфорированной панели ЗПК (диаметра отверстия и толщины панели).

Вычисление импеданса двуслойной ЗПК с толщинами первого и второго слоя h_1 и h_2 соответственно при условии звукового поля на поверхности первого слоя p_1^+ проводится с помощью следующей формулы:

$$Z_1 = \tilde{Z}_1 + \frac{1}{\sin(kh_1)[Z_2 \sin(kh_1) - j \cos(kh_1)]}, \quad (1.11)$$

В этой формуле $\tilde{Z}_1$ рассчитывается с помощью формулы (1.4) по вышеописанной процедуре, однако для расчета Z_2 необходимо p_2^+ , которое в свою очередь определяется из решения следующего трансцендентного уравнения:

$$\begin{aligned} |p_2^+| &= |p_1^-| \cdot |Q_2|, \\ |p_1^-| &= |p_1^+| \cdot |Q_1|, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $j = -i$, $\tilde{Z}_1 = X_1(p_1^+) - j \operatorname{ctg}(kh_1)$ – импеданс однослойной ЗПК, состоящей из входного поглощающего слоя с импедансом $X_1(p_1^+)$, воздушного промежутка глубиной h_1 и жесткого основания,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{Z_1} \frac{Z_2(p_2^+) - itg(kh_1)}{1 - iZ_2(p_2^+)tg(kh_1)}, \\ Q_2 &= \frac{e^{ikh_1} \left(1 + \frac{Z_2 - 1}{Z_2 + 1} \right)}{1 + \frac{Z_2 - 1}{Z_2 + 1} e^{2ikh_1}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2 Постановка задачи о распространении линейных волн в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК

Уравнения, описывающие распространение малых возмущений в линейном приближении в однородной движущейся с постоянной скоростью среде в рамках модели идеальной жидкости, имеют следующий вид (см. например [121, 122]):

$$\begin{aligned}\frac{D_0}{Dt} \tilde{p} &= -\operatorname{div} \mathbf{u}' + (\tilde{m} + \tilde{Q}), \\ \frac{D_0}{Dt} \mathbf{u}' &= -c_0^2 \nabla \tilde{p} + \tilde{\mathbf{f}}, \\ \frac{D_0}{Dt} \tilde{s} &= \tilde{Q},\end{aligned}\tag{1.14}$$

где $\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla$ – оператор конвективной производной, $\mathbf{V}_0$ – постоянная

скорость движения невозмущенной среды, $\tilde{p} = \frac{p'}{\gamma p_0}$, $\tilde{s} = \frac{s'}{c_p}$ – безразмерные

возмущения давления и энтропии, $\mathbf{u}'$ – возмущение скорости, $\tilde{m} = \frac{m'}{\rho_0}$ – плотность

внешнего источника объема, $\tilde{Q} = \frac{Q'}{c_p \rho_0 T_0}$ – безразмерная плотность внешнего

источника тепла, $\tilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}'}{\rho_0}$ – удельная плотность объёмной силы, приложенной извне

к среде, c_0 – скорость звука в однородной неподвижной среде, выражаемая

следующим образом: $c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$, p_0, ρ_0, T_0 – постоянные значения

плотности, давления и температуры в невозмущенном состоянии, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ –

отношение теплоемкостей. Для представления малого возмущения в виде суперпозиции акустической, вихревой и энтропийной компонент в рамках модели идеальной жидкости первое и второе уравнение системы (1.14) необходимо

преобразовать. Получение уравнения, описывающего вихревую компоненту движения, осуществляется путем применения оператора rot ко второму уравнению системы (1.14). Уравнение, описывающее акустическую компоненту движения, получается путем применения к первому уравнению системы (1.14) оператора конвективной производной $\frac{D_0}{Dt}$, а ко второму – оператора ∇ , и последующего вычитания второго уравнения из первого. Возмущение энтропии $\tilde{s}$ входит только в третье уравнение системы (1.14), то есть это уравнение описывает энтропийную компоненту движения, которая не взаимодействует с остальными компонентами. В результате описанных преобразований получается следующая система уравнений, описывающая разделение движения соответственно на акустическую, вихревую и энтропийную моды:

$$\frac{D_0^2}{Dt^2} \tilde{p} - c_0^2 \Delta \tilde{p} = \frac{D_0}{Dt} (\tilde{m} + \tilde{Q}) - \text{div} \tilde{\mathbf{f}}, \quad (1.15)$$

$$\frac{D_0}{Dt} \boldsymbol{\Omega}' = \text{rot} \tilde{\mathbf{f}}, \quad (1.16)$$

$$\frac{D_0}{Dt} \tilde{s} = \tilde{Q}, \quad (1.17)$$

где $\boldsymbol{\Omega}' = \text{rot} \mathbf{u}'$ – завихренность возмущенного движения.

В системе (1.15)-(1.17) каждая из переменных $\tilde{p}, \boldsymbol{\Omega}', \tilde{s}$ входит только в одно соответствующее уравнение, что и отражает расщепление общего возмущенного движения на не взаимодействующие между собой компоненты: акустическую, вихревую и энтропийную моды. Как следствие, каждая из этих компонент может рассматриваться как в случае безграничной среды, так и при наличии границ, абсолютно обособлено от других компонент.

Важной особенностью рассматриваемого случая является тривиальность динамики вихревых и энтропийных возмущений: будучи каким-либо образом созданными ($\boldsymbol{\Omega}'_0(\mathbf{x}) \neq 0$ в начальный момент времени и/или полем внешней объемной силы, имеющей отличную от нуля соленоидальную компоненту в случае

вихревых возмущений и $\tilde{s}(\mathbf{x}) \neq 0$ в начальный момент времени и/или внешний источником тепла в случае энтропийных возмущений), далее они переносятся полем скорости $\mathbf{V}_0$ основного потока без изменений. Итого единственной нетривиальной компонентой движения в рассматриваемом случае является акустическая мода, описываемая неоднородным конвективным волновым уравнением (1.15).

Таким образом задача о распространении малых возмущений в линейном приближении в однородной движущейся с постоянной скоростью среде в рамках модели идеальной жидкости при условии отсутствия внешних источников тепла, внешних сил, источников массы и отличных от нуля возмущений энтропии и завихренности сводится к решению конвективного волнового уравнения (1.15) с определенными начальными данными и граничным условием. Для рассматриваемой в настоящей работе задачи о распространении линейных волн в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК заданным является падающее на рассматриваемый участок канала из бесконечности возмущение. Конвективное волновое уравнение (1.15) при этом примет следующий вид (здесь и далее “ $\sim$ ” над возмущением давления опущены):

$$\frac{D_0^2 p}{Dt^2} - c_0^2 \Delta p = 0. \quad (1.18)$$

На стенках геометрически однородных каналов возмущение давления при наличии разрыва тангенциальной скорости удовлетворяет граничному условию Ингарда-Майерса [63]:

$$\frac{D_0^2}{Dt^2} (\beta(L) \cdot p|_{wall}) = -c_0 \frac{\partial^2 p}{\partial \vec{n} \partial t} \Big|_{wall}, \quad (1.19)$$

где $\beta(L)$ – удельная проводимость (адмиттанс) стенки канала, зависящий от локального уровня звукового давления $L = 20 \lg \left(\frac{|p|}{2 \cdot 10^{-5}} \right)$, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к стенке канала.

Таким образом, задача о распространении линейных волн в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК состоит в решении конвективного волнового уравнения (1.18) с граничным условием (1.19), и именно зависимость адмиттанса от локального уровня звукового давления в граничном условии делает поставленную задачу нелинейной.

1.3 Выводы к главе 1

Описаны основные особенности постановки задачи о распространении возмущений в каналах авиадвигателей с учетом нелинейного режима работы ЗПК и гидродинамическая природа нелинейной зависимости импеданса сотовых ЗПК от уровня звукового давления. Эта зависимость обусловлена тем, что при высоких уровнях звукового давления вблизи поверхности перфорированных листов ЗПК в отверстиях реализуется достаточно высокая скорость колебательного движения среды, приводящая к сходу завихренности с острых кромок отверстий как внутрь ячеек ЗПК, так и в поток, при этом генерация завихренности тем более интенсивная, чем выше уровень звукового давления.

Поставлена задача о распространении линейных волн в однородных каналах с безвихревым изэнтропийным потоком идеального газа с учетом нелинейного режима работы ЗПК, которая в рамках сделанных предположений сводится к конвективному волновому уравнению с граничным условием Ингарда-Майерса, зависимость адмиттанса от локального уровня звукового давления в котором определяет нелинейность поставленной задачи.

Глава 2. Реализация полуаналитического метода описания процесса распространения линейных волн в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок на основе метода поперечных сечений

В настоящей главе представлена реализация процедуры построения полуаналитической математической модели, описывающей распространение линейных волн в каналах с однородным потоком и произвольно неоднородным импедансом стенок, в общем виде и ее последующее применение для частных случаев цилиндрического и прямоугольного каналов.

2.1 Основные уравнения

Рассмотрим распространение гармонических по времени возмущений в геометрически однородном канале с какой-либо определенной формой поперечного сечения при наличии однородного потока, направленного вдоль оси канала Oz со скоростью V . В настоящей работе рассмотрены цилиндрический и прямоугольный каналы. В таком случае при зависимости возмущения давления от времени вида $e^{-i\omega t}$ оператор субстанциальной производной будет иметь следующий вид: $\frac{D_0}{Dt} = -i\omega + V \frac{\partial}{\partial z}$. При этом конвективное волновое уравнение (1.18) преобразуется в конвективное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta p + \left(k + iM \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p = 0, \quad (2.1)$$

а граничное условие (1.19) при условии зависимости адмиттанса только от продольной координаты z примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \Big|_{\text{wall}} &= ik \left(1 + i \frac{M}{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \left(\beta(z) p|_{\text{wall}} \right) = ik \beta(z) \left(1 + i \frac{M}{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 p|_{\text{wall}} - \\ &- 2M \frac{\partial \beta(z)}{\partial z} \left(1 + i \frac{M}{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) p|_{\text{wall}} - i \frac{M^2}{k} \frac{\partial^2 \beta(z)}{\partial z^2} p|_{\text{wall}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $k = \omega/c_0$ – волновое число, $M = V/c_0$ – число Маха потока.

Для нахождения поля возмущения давления на конечном участке канала $0 \leq z \leq L$ с неоднородным вдоль оси адмиттансом стенок уравнение (2.1) с граничным условием (2.2) решается при условии заданной зависимости адмиттанса от продольной координаты и известного падающего поля возмущения на рассматриваемый участок с обоих концов $z = 0$ и $z = L$.

2.2 Применение метода поперечных сечений для решения основных уравнений и получение основных соотношений в общем виде

Для решения поставленной задачи путем построения полуаналитической процедуры на основе метода поперечных сечений исходный участок канала длины L с неоднородным адмиттансом стенок разбивается на $N - 1$ участок с длинами $\Delta z_i, i = \overline{1, N - 1}$, в каждом из которых значение адмиттанса и его первых двух производных по продольной координате, входящих в выражение (2.2), принимаются постоянными, равными среднему на этом участке:

$$\frac{\partial^\alpha \beta_i}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{\Delta z_i} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{\partial^\alpha \beta(z)}{\partial z^\alpha} dz, \alpha = \overline{0, 2}, \quad (2.3)$$

при этом разбиение производится таким образом, чтобы модули разностей адмиттанса и его первых двух производных на соседних участках не превышали некоторого наперед заданного значения:

$$\left| \frac{\partial^\alpha \beta_i}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \beta_{i-1}}{\partial z^\alpha} \right| \leq d \beta_\alpha, \alpha = \overline{0, 2}, \quad (2.4)$$

а если в какой-либо точке адмиттанс или одна из его первых двух производных по продольной координате претерпевают разрыв, то эта точка обязательно рассматривается как граничная точка между участками в данном разбиении. Участки с номерами 0 и N имеют по условию задачи заданный постоянный

адмиттанс и в них известно поле возмущения, падающее на неоднородный участок канала. Схема описанного разбиения представлена на рисунке 2.1.

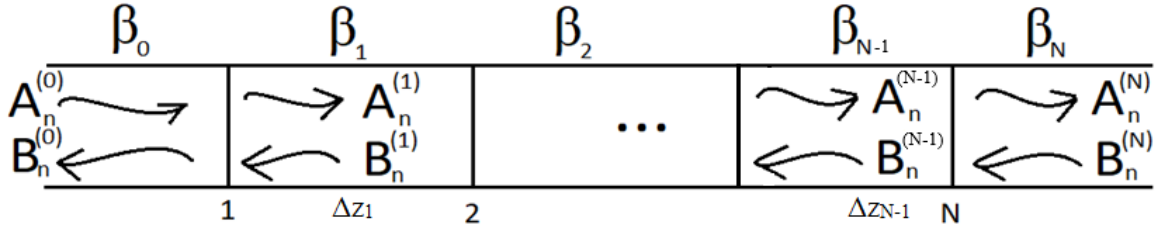


Рисунок 2.1 – Схема разбиения канала

Таким образом, исходный канал с неоднородным вдоль оси адмиттансом был заменен на канал с кусочно-постоянным адмиттансом, его первой и второй производной, и для каждого такого участка граничное условие (2.2) уже не содержит переменных коэффициентов. Тогда поле возмущений на каждом участке под номером i такого канала представляет собой бесконечную суперпозицию собственных мод однородного канала:

$$p_i(x_1, x_2, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_i^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i)+}(x_1, x_2) e^{ik_{z_i^+}^{j,n} z} + B_i^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i)-}(x_1, x_2) e^{ik_{z_i^-}^{j,n} z} \right), \quad (2.5)$$

где (x_1, x_2) – координаты (в цилиндрической системе координат в случае цилиндрического канала это (r, φ) и (x, y) в декартовой системе координат в случае прямоугольного канала), $A_i^{(j,n)}, B_i^{(j,n)}$ – амплитуды мод, распространяющихся, соответственно, вдоль и против оси канала, $\psi_{j,n}^{(i)\pm}(x_1, x_2)$ – собственные функции, зависящие от формы поперечного сечения, $k_{z_i^\pm}^{j,n}$ – осевые волновые числа. Знаки «+» и «-» в индексе здесь и далее обозначают, к какому направлению распространения возмущения относится величина: вдоль или против оси канала, а нумерация собственных мод в сумме определяется нумерацией корней характеристического уравнения, получаемого из граничного условия (2.2) с учетом (2.5) при конкретизации собственных функций $\psi_{j,n}^{(i)\pm}(x_1, x_2)$. Важно отметить, что в (2.5) определение мод, по которым осуществлено разложение, отличается от определения, рассматриваемого при применении метода ВКБ-

приближений к описанию звуковых полей в плавно-неоднородных каналах: в данном случае они не являются собственным решением уравнений во всей неоднородной области. Однако при увеличении подробности разбиения $N \rightarrow \infty$ каждое слагаемое разложения (2.5) удовлетворяет основным уравнениям в окрестности соответствующего сечения. В [104] такие моды названы «локальными модами», в настоящей работе далее будет идти речь только о них, в силу чего для облегчения текста слово «локальные» будет опущено.

В каждой точке разбиения, разделяющей между собой участки канала с однородными характеристиками, граничные условия претерпевают разрыв, что может привести к разрывам в итоговом решении, однако в исходной постановке поле p непрерывно дифференцируемо. В связи с этим в точках разбиения, разделяющих между собой участки, необходимо обеспечить непрерывность поля p и его производной по продольной координате. Как будет показано далее, в рассматриваемых в настоящей работе примерах цилиндрического и прямоугольного каналов поле возмущения давления (2.5) будет иметь следующий вид:

$$p_i(x_1, x_2, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x_2) p_i^j(x_1, z), \quad (2.6)$$

при этом граничное условие (2.2) не будет иметь явной зависимости от координаты x_2 , в связи с чем задачи определения полей $p_i^j(x_1, z)$ для каждого конкретного значения индекса j рассматриваются независимо друг от друга, а сам индекс j является параметром. Решение исходной задачи, согласно (2.6), является суперпозицией решений этих задач. Тогда условие непрерывности искомого поля и его первой производной может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_i^j(x_1, z) \Big|_{z=z_{i+1}-0} &= p_{i+1}^j(x_1, z) \Big|_{z=z_{i+1}+0}, \\ \frac{\partial p_i^j(x_1, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_{i+1}-0} &= \frac{\partial p_{i+1}^j(x_1, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_{i+1}+0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, исходная задача определения поля p , удовлетворяющего уравнению (2.1) и граничному условию (2.2), сводится к задаче определения амплитуд мод $\{A_i^{(j,n)}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{B_i^{(j,n)}\}_{n=0}^{\infty}$ для всевозможных j на каждом участке разбиения канала при $i = \overline{1, N-1}$ и амплитуд $\{B_0^{(j,n)}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{A_N^{(j,n)}\}_{n=0}^{\infty}$ на участках с номерами $i = 0$ и $i = N$ соответственно, удовлетворяющих условиям сшивки (2.7).

Для получения решения поставленной задачи, т.е. нахождения всех неизвестных амплитуд, необходимо сначала рассмотреть прохождение возмущения через сечение, разделяющее 2 соседних участка канала. Пусть на участке канала под номером i известны амплитуды распространяющихся вдоль оси канала возмущений $\{A_i^{(j,n)}\}_{n=0}^{\infty}$, а на участке канала под номером $i+1$ известны амплитуды распространяющихся в противоположном направлении возмущений $\{B_{i+1}^{(j,n)}\}_{n=0}^{\infty}$. Необходимо определить амплитуды $\{A_{i+1}^{(j,n)}\}_{n=0}^{\infty}$ прошедших стык между рассматриваемыми участками мод и амплитуды $\{B_i^{(j,n)}\}_{n=0}^{\infty}$ отраженных от стыка мод. Для этого запишем условия сшивки (2.7) при учете (2.5) и (2.6) для некоторого значения j (при условии $z_{i+1} = 0$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_i^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i)+}(x_1) + B_i^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i)-}(x_1) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{i+1}^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i+1)+}(x_1) + B_{i+1}^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i+1)-}(x_1) \right), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_{z_i+}^{j,n} A_i^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i)+}(x_1) + k_{z_i-}^{j,n} B_i^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i)-}(x_1) \right) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_{z_{i+1}+}^{j,n} A_{i+1}^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i+1)+}(x_1) + k_{z_{i+1}-}^{j,n} B_{i+1}^{(j,n)} \psi_{j,n}^{(i+1)-}(x_1) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Важно отметить, что амплитуды мод в разложениях (2.5) зависят от выбора начала координат, что может доставлять определенные неудобства в дальнейших операциях при больших значениях мнимых частей осевых волновых чисел, стоящих в степени экспоненты. В связи с этим для удобства здесь и далее амплитуды мод определяются относительно одной из двух точек разбиения, ограничивающих рассматриваемый участок канала. Так, амплитуда каждой моды

$A_i^{(j,n)}$ и $B_i^{(j,n)}$ определяется относительно сечения с номером i или $i+1$, в зависимости от конкретного случая. Очевидно, что связь между амплитудами, определенными относительно сечения i и $i+1$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} e^{ik_{z_{i+1}}^{j,n}(z_{i+1}-z_i)} A_i^{(j,n)} \Big|_{z_i=0} &= A_i^{(j,n)} \Big|_{z_{i+1}=0}, \\ e^{ik_{z_{i+1}}^{j,n}(z_{i+1}-z_i)} B_i^{(j,n)} \Big|_{z_i=0} &= B_i^{(j,n)} \Big|_{z_{i+1}=0}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Соответственно, в выражениях (2.8) и (2.9) сделан сдвиг координат, в результате которого $z_{i+1}=0$.

Далее, путем скалярного умножения соотношений (2.8) и (2.9) на функцию $\psi_{j,l}^{(i)+}, l \in \mathbb{Z}, l \geq 0$, приходим к бесконечной системе линейных уравнений относительно искомых амплитуд:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{jnl}^{(i)+(i)+} A_i^{(j,l)} + \hat{W}_{jnl}^{(i)+(i)-} B_i^{(j,l)} &= \hat{W}_{jnl}^{(i)+(i+1)+} A_{i+1}^{(j,l)} + \hat{W}_{jnl}^{(i)+(i+1)-} B_{i+1}^{(j,l)}, \\ \hat{W}k_{jnl}^{(i)+(i)+} A_i^{(j,l)} + \hat{W}k_{jnl}^{(i)+(i)-} B_i^{(j,l)} &= \hat{W}k_{jnl}^{(i)+(i+1)+} A_{i+1}^{(j,l)} + \hat{W}k_{jnl}^{(i)+(i+1)-} B_{i+1}^{(j,l)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где введены матрицы скалярных произведений следующего вида:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{jnl}^{(i)\pm(k)\pm} &= (\psi_{j,n}^{(i)\pm}, \psi_{j,l}^{(k)\pm}), \\ \hat{W}k_{jnl}^{(i)\pm(k)\pm} &= \hat{W}_{jnl}^{(i)\pm(k)\pm} k_{z_i \pm}^{j,l}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

которые в каждом рассматриваемом конкретном случае (цилиндрический и прямоугольный каналы) далее будут вычислены аналитически. Таким образом, в выражениях (2.11) проведено разложение входящих в (2.8) и (2.9) функций $\psi_{j,n}^{(i)+}, \psi_{j,n}^{(i)-}, \psi_{j,n}^{(i+1)+}, \psi_{j,n}^{(i+1)-}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, по полной системе функций $\psi_{j,l}^{(i)+}, l \in \mathbb{Z}, l \geq 0$.

Решение системы (2.11) относительно искомых амплитуд $A_{i+1}^{(j,n)}, B_i^{(j,n)}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
A_{i+1}^{(j,n)} &= \left(\hat{W}k_{jnk}^{(i)+(i)-} \left(\hat{W}_{jkt}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{jtl}^{(i)+(i+1)+} - \hat{W}k_{jnl}^{(i)+(i+1)+} \right)^{-1} \cdot \\
&\cdot \left[\left(\hat{W}k_{jfq}^{(i)+(i+1)-} - \hat{W}k_{jlf}^{(i)+(i)-} \left(\hat{W}_{jfs}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{jsq}^{(i)+(i+1)-} \right) B_{i+1}^{(j,q)} + \right. \\
&\left. + \left(\hat{W}k_{jld}^{(i)+(i)-} \left(\hat{W}_{jdr}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{jrq}^{(i)+(i)+} - \hat{W}k_{jfq}^{(i)+(i)+} \right) A_i^{(j,q)} \right], \\
B_i^{(j,n)} &= \left(\hat{W}_{jnl}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \left(\hat{W}_{jfq}^{(i)+(i+1)+} A_{i+1}^{(j,q)} + \hat{W}_{jfq}^{(i)+(i+1)-} B_{i+1}^{(j,q)} - \hat{W}_{jfq}^{(i)+(i)+} A_i^{(j,q)} \right).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Воспользоваться решением (2.13) возможно только в конечномерной реализации, то есть при учете лишь конечного числа учитываемых мод с амплитудами $A^{(j,n)}, B^{(j,n)}$ по числу n : N_A и N_B соответственно. В зависимости от выбора способа перехода $N_A \rightarrow \infty, N_B \rightarrow \infty$, которые могут быть произведены независимо друг от друга, в силу условной сходимости рядов зависит итоговое решение. При этом оно в любом случае будет удовлетворять условию непрерывности (2.7), однако единственным физически обоснованным способом перехода, удовлетворяющим условию конечности энергии на стыке (условию Мейкснера) [67, 128], является переход $N_A = N_B \rightarrow \infty$ [129], и только при таком переходе в окрестности разрыва граничных условий получают конечные звуковые поля. Такое правило конечномерной сшивки рядов было исследовано в работе [104] на основании сравнения амплитуд мод, полученных с использованием (2.13), с амплитудами, определяемыми из аналитического решения задачи, полученного методом Винера-Хопфа [102], когда звуковые поля не ищутся в виде разложения по собственным модам, а условие Мейкснера удовлетворяется явно в процедуре вывода аналитического решения. При этом величина невязки при сравнении результатов расчетов, проведенных в работе [104], не превышала 1%, что подтвердило, что правило перехода $N_A = N_B \rightarrow \infty$ обеспечивает выполнение условия Мейкснера.

Далее путем последовательного прохождения от одного участка исходного разбиения к другому с использованием решения для одного стыка (2.13) и с учетом трансформации амплитуд (2.10) при переходе к следующему стыку, можно

получить общее решение рассматриваемой задачи. Для этого удобно будет записать соотношения (2.13) в векторном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+1} \\ \mathbf{B}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}_i & \hat{\mathbf{V}}_i \\ (\hat{\mathbf{E}}_i \hat{\mathbf{D}}_i + \hat{\mathbf{J}}_i) & (\hat{\mathbf{E}}_i \hat{\mathbf{V}}_i + \hat{\mathbf{F}}_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{B}_{i+1} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где компоненты векторов $\mathbf{A}_{i+1}$ и $\mathbf{B}_i$ являются амплитудами соответствующих мод, то есть:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} A_i^{(j,1)} \\ A_i^{(j,2)} \\ \dots \\ A_i^{(j,t)} \\ \dots \end{pmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} B_i^{(j,1)} \\ B_i^{(j,2)} \\ \dots \\ B_i^{(j,t)} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

а элементы матриц $\hat{\mathbf{V}}_i, \hat{\mathbf{D}}_i, \hat{\mathbf{E}}_i, \hat{\mathbf{F}}_i, \hat{\mathbf{J}}_i$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_i^{n,q} &= \hat{\mathbf{Q}}_i^{l,q} \left(\hat{W}_{j l q}^{(i)+(i+1)-} - \hat{W}_{j l f}^{(i)+(i)-} \left(\hat{W}_{j f s}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{j s q}^{(i)+(i+1)-} \right), \\ \hat{\mathbf{D}}_i^{n,q} &= \hat{\mathbf{Q}}_i^{l,q} \left(\hat{W}_{j l d}^{(i)+(i)-} \left(\hat{W}_{j d r}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{j r q}^{(i)+(i)+} - \hat{W}_{j l q}^{(i)+(i)+} \right), \\ \hat{\mathbf{E}}_i^{n,q} &= \left(\hat{W}_{j n l}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{j l q}^{(i)+(i+1)+}, \\ \hat{\mathbf{F}}_i^{n,q} &= \left(\hat{W}_{j n l}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{j l q}^{(i)+(i+1)-}, \\ \hat{\mathbf{J}}_i^{n,q} &= \left(\hat{W}_{j n l}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{j l q}^{(i)+(i)+}, \\ \hat{\mathbf{Q}}_i^{l,q} &= \left(\hat{W}_{j n k}^{(i)+(i)-} \left(\hat{W}_{j k t}^{(i)+(i)-} \right)^{-1} \hat{W}_{j t l}^{(i)+(i+1)+} - \hat{W}_{j n l}^{(i)+(i+1)+} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Далее путем несложных алгебраических преобразований получим из (2.14) связь векторов амплитуд на участке под номером i с векторами амплитуд на участке $i+1$, которую удобно записать в виде блочных матриц:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+1} \\ \mathbf{B}_{i+1} \end{pmatrix}_{x_{i+1}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}_i & \hat{\mathbf{U}}_i \\ \hat{\mathbf{M}}_i & \hat{\mathbf{L}}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{B}_i \end{pmatrix}_{x_i}, \quad (2.17)$$

где для удобства введены следующие матрицы:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{T}}_i &= \hat{\mathbf{D}}_i + \hat{\mathbf{V}}_i \hat{\mathbf{M}}_i, \\
 \hat{\mathbf{U}}_i &= \hat{\mathbf{V}}_i \hat{\mathbf{L}}_i, \\
 \hat{\mathbf{L}}_i &= (\hat{\mathbf{E}}_i \hat{\mathbf{V}}_i + \hat{\mathbf{F}}_i)^{-1}, \\
 \hat{\mathbf{M}}_i &= -\hat{\mathbf{L}}_i (\hat{\mathbf{E}}_i \hat{\mathbf{D}}_i + \hat{\mathbf{J}}_i),
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

а индексом x_{i+1} обозначен стык, относительно которого определены соответствующие амплитуды. При этом соотношения (2.10), обеспечивающие связь между амплитудами, определенными относительно соседних стыков, будут иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+1} \\ \mathbf{B}_{i+1} \end{pmatrix}_{x_{i+2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_A^{(i+1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_B^{(i+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+1} \\ \mathbf{B}_{i+1} \end{pmatrix}_{x_{i+1}} = \hat{\mathbf{S}}^{i+1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+1} \\ \mathbf{B}_{i+1} \end{pmatrix}_{x_{i+1}}, \tag{2.19}$$

где введены диагональные матрицы смещения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_A^{(i)} &= \begin{pmatrix} e^{ik_{z_{i+1}+}^{j,1}(z_{i+1}-z_i)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & e^{ik_{z_{i+1}+}^{j,2}(z_{i+1}-z_i)} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e^{ik_{z_{i+1}+}^{j,t}(z_{i+1}-z_i)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{e}_B^{(i)} &= \begin{pmatrix} e^{ik_{z_{i+1}-}^{j,1}(z_{i+1}-z_i)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & e^{ik_{z_{i+1}-}^{j,2}(z_{i+1}-z_i)} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e^{ik_{z_{i+1}-}^{j,t}(z_{i+1}-z_i)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Таким образом, с использованием соотношений (2.17) и (2.19) можно, в частности, связать амплитуды на участках под номерами i и $i+2$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+2} \\ \mathbf{B}_{i+2} \end{pmatrix}_{x_{i+2}} &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{i+1} & \hat{\mathbf{U}}_{i+1} \\ \hat{\mathbf{M}}_{i+1} & \hat{\mathbf{L}}_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+1} \\ \mathbf{B}_{i+1} \end{pmatrix}_{x_{i+2}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{i+1} & \hat{\mathbf{U}}_{i+1} \\ \hat{\mathbf{M}}_{i+1} & \hat{\mathbf{L}}_{i+1} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{S}}^{i+1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+1} \\ \mathbf{B}_{i+1} \end{pmatrix}_{x_{i+1}} = \\
&= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{i+1} & \hat{\mathbf{U}}_{i+1} \\ \hat{\mathbf{M}}_{i+1} & \hat{\mathbf{L}}_{i+1} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{S}}^{i+1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}_i & \hat{\mathbf{U}}_i \\ \hat{\mathbf{M}}_i & \hat{\mathbf{L}}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{B}_i \end{pmatrix}_{x_{i+1}} = \hat{\mathbf{O}}_{i+1} \hat{\mathbf{S}}^{i+1} \hat{\mathbf{O}}_i \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{B}_i \end{pmatrix}_{x_{i+1}}, \quad (2.21)
\end{aligned}$$

где для блочной матрицы из (2.17), связывающей векторы амплитуд на участке под номером i с векторами амплитуд на участке $i+1$, введено обозначение $\hat{\mathbf{O}}_i$. Соотношение (2.21) легко обобщить на все рассматриваемое разбиение канала, связав амплитуды на начальном участке канала с амплитудами на последнем участке:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_N \\ \mathbf{B}_N \end{pmatrix}_{x_N} = \hat{\mathbf{O}}_{N-1} \hat{\mathbf{S}}^{N-1} \hat{\mathbf{O}}_{N-2} \hat{\mathbf{S}}^{N-2} \dots \hat{\mathbf{O}}_1 \hat{\mathbf{S}}^1 \hat{\mathbf{O}}_0 \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{pmatrix}_{x_1} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{11}^N & \hat{\mathbf{R}}_{12}^N \\ \hat{\mathbf{R}}_{21}^N & \hat{\mathbf{R}}_{22}^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{pmatrix}_{x_1}. \quad (2.22)$$

Соотношение (2.22), очевидно, может быть использовано для нахождения связи векторов амплитуд на первом участке канала с векторами амплитуд на любом другом участке канала под номером i при $0 < i < N$. Общее же решение для векторов амплитуд на каждом участке разбиения канала под номером i при $1 \leq i \leq N$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{A}_i)_{x_i} \\ (\mathbf{B}_0)_{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{11}^i - \hat{\mathbf{R}}_{12}^i (\hat{\mathbf{R}}_{22}^i)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{21}^i & \hat{\mathbf{R}}_{12}^i (\hat{\mathbf{R}}_{22}^i)^{-1} \\ (\hat{\mathbf{R}}_{22}^i)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{21}^i & (\hat{\mathbf{R}}_{22}^i)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_0)_{x_1} \\ (\mathbf{B}_i)_{x_i} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Последовательное применение соотношения (2.23) при прохождении по i от $i = N$ до $i = 1$ позволяет получить векторы амплитуд мод, распространяющихся как вдоль оси канала, так и против оси, на всех участках исходного разбиения канала, и тем самым получить итоговое решение поставленной задачи методом поперечных сечений.

Однако полученное решение обладает одним существенным недостатком с практической точки зрения. Соотношение (2.23) содержит диагональные матрицы (2.20), где в степенях экспонент содержатся осевые волновые числа $k_{z_{\pm}}^{j,l}$, мнимые

части которых для не распространяющихся звуковых мод, учет которых обязателен при сшивке решений (2.7), могут принимать достаточно большие значения. Это приводит к тому, что при длине исследуемого участка неоднородности порядка 0.4 метра и частоте 1 кГц одни элементы матриц (2.20) могут превосходить 10^{32} , в то время как другие, напротив, стать меньше 10^{-32} , и это, очевидно, далеко не предел, так как при проведении расчетов на близких к практически значимым значениям параметрах разница в порядках между наибольшими и наименьшими элементами матриц (2.20) может существенно превосходить приведенную в данном примере. Эта особенность при проведении практических расчетов с использованием ЭВМ может приводить к некорректному результату.

2.3 Построение итерационного метода прогонки для практической реализации полученного решения задачи

Так как в силу указанного недостатка построенной процедуры расчета амплитуд звуковых мод на каждом участке исходного разбиения воспользоваться соотношением (2.23) напрямую во многих случаях не представляется возможным, на основании соотношений (2.13) и (2.19) в [104] была сформулирована итерационная процедура прогонки, позволяющая получить искомые векторы амплитуд на каждом участке разбиения исходного канала с неоднородным вдоль оси адмиттансом стенки.

Метод прогонки состоит из последовательных итераций, в каждой из которых проводится поочередное прохождение стыков между участками исходного разбиения канала с неоднородным вдоль оси адмиттансом стенки от стыка с номером $i=1$ до стыка с номером $i=N$ и обратно и вычислением всех рассматриваемых амплитуд звуковых мод на каждом участке разбиения.

На первой итерации процедуры расчета исходное падающее на рассматриваемый участок канала с неоднородным вдоль оси адмиттансом стенки

поле, характеризующееся вектором амплитуд $\mathbf{A}_0|_{x_1}$, подставляется в соотношение (2.14) для определения амплитудных векторов $\mathbf{A}_1|_{x_1}^1$ и $\mathbf{B}_0|_{x_1}^1$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1|_{x_1}^1 \\ \mathbf{B}_0|_{x_1}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}_0 & \hat{\mathbf{V}}_0 \\ (\hat{\mathbf{E}}_0 \hat{\mathbf{D}}_0 + \hat{\mathbf{J}}_0) & (\hat{\mathbf{E}}_0 \hat{\mathbf{V}}_0 + \hat{\mathbf{F}}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0|_{x_1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Здесь, как и ранее, у векторов амплитуд нижним индексом за чертой обозначается, относительно какого сечения определен соответствующий вектор, а верхним – к какой по номеру итерации он относится. При этом вектора амплитуд $\mathbf{A}_0|_{x_1}$ и $\mathbf{B}_N|_{x_N}$ не имеют обозначения итерации в силу того, что падающее поле задано и неизменно. После этого полученный вектор амплитуд преобразуется с помощью (2.19) к $\mathbf{A}_1|_{x_2}^1$ и используется в (2.14) для получения амплитудных векторов $\mathbf{A}_2|_{x_2}^1$ и $\mathbf{B}_1|_{x_2}^1$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_j|_{x_j}^1 \\ \mathbf{B}_{j-1}|_{x_j}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{j-1} & \hat{\mathbf{V}}_{j-1} \\ (\hat{\mathbf{E}}_{j-1} \hat{\mathbf{D}}_{j-1} + \hat{\mathbf{J}}_{j-1}) & (\hat{\mathbf{E}}_{j-1} \hat{\mathbf{V}}_{j-1} + \hat{\mathbf{F}}_{j-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_A^{(j-1)} \mathbf{A}_{j-1}|_{x_{j-1}}^1 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \overline{2, N-1}. \quad (2.25)$$

Таким образом первый проход (назовем его условно «проход слева направо») по участкам разбиения продолжается до последнего стыка между участками, где вычисление амплитуд производится уже с учетом падающего с другой стороны на рассматриваемый участок канала с неоднородным вдоль оси адмиитансом стенки поля, характеризующегося вектором амплитуд $\mathbf{B}_N|_{x_N}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_N|_{x_N}^1 \\ \mathbf{B}_{N-1}|_{x_N}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{N-1} & \hat{\mathbf{V}}_{N-1} \\ (\hat{\mathbf{E}}_{N-1} \hat{\mathbf{D}}_{N-1} + \hat{\mathbf{J}}_{N-1}) & (\hat{\mathbf{E}}_{N-1} \hat{\mathbf{V}}_{N-1} + \hat{\mathbf{F}}_{N-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_A^{(N-1)} \mathbf{A}_{N-1}|_{x_{N-1}}^1 \\ \mathbf{B}_N|_{x_N} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Далее вычисление векторов амплитуд на каждом участке разбиения с использованием (2.14) и (2.19) производится в обратном порядке, начиная со стыка

под номером $N - 1$ (по аналогии, назовем его условно «проход справа налево»), при этом полученные на этом стыке векторы амплитуд $\mathbf{A}_{N-1}|_{x_{N-1}}^1$ и $\mathbf{B}_{N-2}|_{x_{N-1}}^1$ будут отличаться от тех, что были получены ранее в проходе слева направо, так как в этом случае учитывается падающее на стык поле, характеризующееся вектором амплитуд $\mathbf{B}_{N-1}|_{x_{N-1}}^1$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_j|_{x_j}^1 \\ \mathbf{B}_{j-1}|_{x_j}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{j-1} & \hat{\mathbf{V}}_{j-1} \\ (\hat{\mathbf{E}}_{j-1}\hat{\mathbf{D}}_{j-1} + \hat{\mathbf{J}}_{j-1}) & (\hat{\mathbf{E}}_{j-1}\hat{\mathbf{V}}_{j-1} + \hat{\mathbf{F}}_{j-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_A^{(j-1)}\mathbf{A}_{j-1}|_{x_{j-1}}^1 \\ \mathbf{e}_B^{(j)}\mathbf{B}_j|_{x_{j+1}}^1 \end{pmatrix}, j = \overline{N-1, 1}, \quad (2.27)$$

причем при $j=1$, как и ранее, $\mathbf{e}_A^{(j-1)}\mathbf{A}_{j-1}|_{x_{j-1}}^1 = \mathbf{A}_0|_{x_1}$. Продолжая таким образом до стыка под номером 1, в результате прохода справа налево получаем векторы амплитуд $\mathbf{A}_{i+1}|_{x_{i+1}}^1$ и $\mathbf{B}_i|_{x_{i+1}}^1 \forall i \in [0, N-1]$, каждый из которых в результате прохода справа налево был пересчитан уже с учетом падающего поля, характеризующееся вектором амплитуд $\mathbf{B}_N|_{x_N}$, тем самым заканчивая первую итерацию. Вторая и последующие итерации производятся тем же образом, что и первая, с той лишь разницей, что она начинается не со стыка под номером 1, а со стыка под номером 2, так как пересчет векторов амплитуд на первом стыке был произведен на последнем шаге предыдущей итерации. При этом исходный вектор амплитуд $\mathbf{A}_1|_{x_2}^2$ приравнивается вектору $\mathbf{A}_1|_{x_2}^1$. В результате последнего шага (расчета векторов амплитуд на стыке под номером 1) прохода справа налево первой итерации вектор амплитуд $\mathbf{A}_1|_{x_2}^1$ претерпел изменения, которые скажутся на вычислении векторов амплитуд $\mathbf{A}_2|_{x_2}^2$ и $\mathbf{B}_1|_{x_2}^2$, за чем, очевидно, последует необходимость пересчета векторов амплитуд на всех остальных участках разбиения. Таким образом, на второй итерации при последовательных проходах слева направо и справа налево вектора амплитуд $\mathbf{A}_{i+1}|_{x_{i+1}}^1$ и $\mathbf{B}_i|_{x_{i+1}}^1 \forall i \in [0, N-1]$ на всех участках разбиения будут

уточнены. Общие соотношения для проходов справа налево и слева направо итерации под номером q имеют, соответственно, для $j = 2, \dots, N, \dots, 1$ вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_j|_{x_j}^q \\ \mathbf{B}_{j-1}|_{x_j}^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{j-1} & \hat{\mathbf{V}}_{j-1} \\ (\hat{\mathbf{E}}_{j-1}\hat{\mathbf{D}}_{j-1} + \hat{\mathbf{J}}_{j-1}) & (\hat{\mathbf{E}}_{j-1}\hat{\mathbf{V}}_{j-1} + \hat{\mathbf{F}}_{j-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_A^{(j-1)}\mathbf{A}_{j-1}|_{x_{j-1}}^q \\ \mathbf{e}_B^{(j)}\mathbf{B}_j|_{x_{j+1}}^q \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

причем при $j = N$, как и ранее, $\mathbf{e}_B^{(j)}\mathbf{B}_j|_{x_{j+1}}^q = \mathbf{B}_N|_{x_N}$ и при $j = 1$, аналогично,

$$\mathbf{e}_A^{(j-1)}\mathbf{A}_{j-1}|_{x_{j-1}}^1 = \mathbf{A}_0|_{x_1}.$$

Итерационная процедура продолжается до тех пор, пока некоторой итерации под номером q не будет достигнута сходимость по величине амплитуд с заданной точностью ε , то есть для амплитуд, полученных на итерации под номером q , будет выполнено условие:

$$\text{Max}_{i,n} \left(\left| A_i^{(j,n)}|_{x_i}^q - A_i^{(j,n)}|_{x_i}^{q-1} \right| \right), \text{Max}_{i,n} \left(\left| B_i^{(j,n)}|_{x_i}^q - B_i^{(j,n)}|_{x_i}^{q-1} \right| \right) < \varepsilon. \quad (2.29)$$

На практике сформулированная итерационная процедура для различных важных с практической точки зрения случаев расчета сходится с точностью $\varepsilon \sim 10^{-6}$ за не более чем 8 итераций, что будет продемонстрировано далее на примерах.

2.4 Характеристическое уравнение

При расчете звукового поля с использованием описанной полуаналитической модели определяющим является характеристическое уравнение (2.2), корни которого необходимы для вычислений и поведение которых во многом определяют итоговое решение, что будет показано в следующей главе. В каждом из рассматриваемых в настоящей работе частном случае (цилиндрический или прямоугольный канал) это уравнение, как будет показано далее, может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned}
F(\zeta^\pm) &= f(\zeta^\pm) - \\
&- \left(ika\beta \left(1 - M \frac{k_z(\zeta^\pm)}{k} \right)^2 - 2Ma \frac{\partial \beta}{\partial z} \left(1 - M \frac{k_z(\zeta^\pm)}{k} \right) - i \frac{aM^2}{k} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right) = \\
&= f(\zeta^\pm) - g(\zeta^\pm) = 0, \\
k_z(\zeta^\pm) &= \frac{-Mk \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{\zeta^\pm}{a} \right)^2 (1 - M^2)}}{(1 - M^2)},
\end{aligned} \tag{2.30}$$

где $f(\zeta^\pm)$ определяется в конкретном случае в зависимости от геометрии поперечного сечения канала.

Рассматриваемое характеристическое уравнение в пространстве комплексных параметров $\left(\beta, \frac{\partial \beta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right)$ имеет бесконечное множество точек ветвления, в связи с чем решение сильно осложняется. Корни вычисляются путем непрерывного варьирования параметров от точки $(0, 0, 0)$, где они являются действительными корнями производной функции Бесселя и к ним применяется нумерация в порядке возрастания, до точки с заданными значениями параметров вдоль прямой линии. Корни при таком варьировании параметров могут пересекать разрезы корня в (2.30), который для удобства обозначим следующим образом:

$$\mu(\zeta) = \sqrt{k_M^2 - \zeta^2}, k_M = \frac{ka}{\sqrt{1 - M^2}}. \tag{2.31}$$

Стандартный выбор ветви этого корня, соответствующий условию причинности, имеет следующий вид:

$$\text{Im}[\mu(\zeta)] \geq 0. \tag{2.32}$$

При таком выборе ветви разрезы в комплексной плоскости ζ имеют вид, представленный на рисунке 2.2 [128].

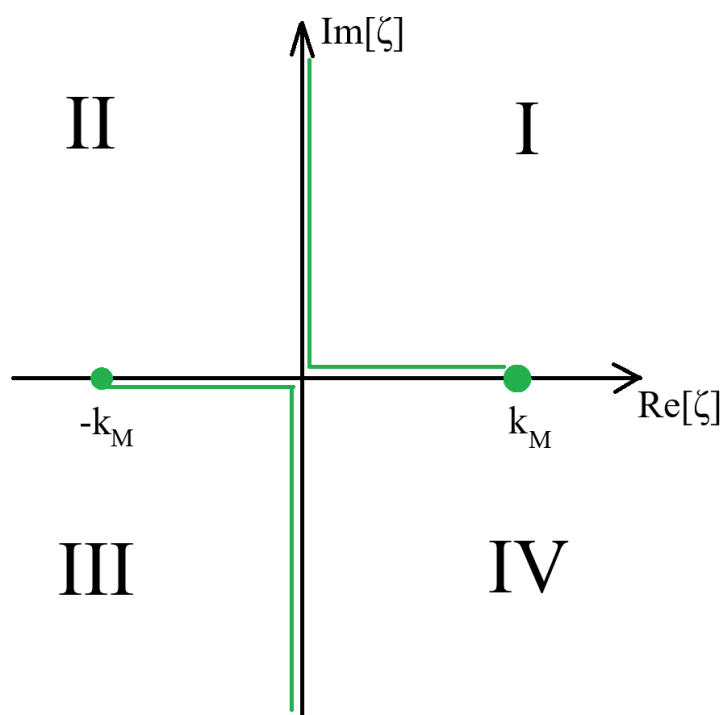


Рисунок 2.2 – Комплексная плоскость ζ

В этом случае на всем верхнем листе римановой поверхности выполняется условие (2.32), причем $\text{Re}[\mu(\zeta)] < 0$ в первом и третьем квадрантах и $\text{Re}[\mu(\zeta)] > 0$ во втором и четвертом квадрантах. На нижнем листе двулистной римановой поверхности приведенные знаки меняются на противоположные. Данную особенность необходимо учитывать при решении уравнения (2.30) методом непрерывного варьирования комплексных параметров путем учета пересечений разрезов и перехода между листами римановой поверхности рассматриваемыми корнями. Как будет показано далее, в тех областях, где корни характеристического уравнения пересекают разрезы, представленные на рисунке 2.2, и попадают на нижний лист римановой поверхности, меняется знак мнимой части осевых волновых чисел $k_z(\zeta^\pm)$, что приводит к эффекту локального экспоненциального возрастания соответствующей звуковой моды в направлении ее распространения.

Использованный в настоящей работе способ нахождения корней уравнения (2.30) состоит в следующем. Исходное уравнение рассматривается как функция четырех комплексных переменных:

$$F\left(\zeta, \beta, \frac{\partial \beta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}\right) = F(\zeta, \alpha^i) = 0, \alpha^i = \frac{\partial^i \beta}{\partial z^i}, i = \overline{0, 2}. \quad (2.33)$$

Пусть известно, что точка (ζ_0, α_0^i) – решение этого уравнения. В практических задачах в большинстве случаев начальный участок канала имеет жесткие стенки, в связи с чем начальной точкой являются действительные корни производной функции Бесселя (в случае цилиндрического канала) или же тангенса (в случае прямоугольного канала) ζ_0 и $\alpha^i = 0$. Тогда при малом смещении в заданном направлении $d\alpha_1^i$ относительно этой точки функцию можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(\zeta_0 + d\zeta_1, \alpha_0^i + d\alpha_1^i) &= F(\zeta_0, \alpha_0^i) + \frac{(d\zeta_1)^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}(\zeta_0, \alpha_0^i) + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} + d\alpha_1^i \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta \partial \alpha^i}(\zeta_0, \alpha_0^i) \right) d\zeta_1 + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} d\alpha_1^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} d\alpha_1^i d\alpha_1^j \right) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Соотношение (2.34) с точностью до квадратичных членов представляет собой квадратное уравнение, имеющее 2 решения. Как было показано в [130], условием выбора верного решения для $d\zeta_1$ является условие непрерывности: $d\zeta \rightarrow 0$ при $d\alpha^i \rightarrow 0$, которому удовлетворяет только одно решение.

Для вычисления $d\zeta_1$ таким образом необходимо определить значения частных производных в (2.34):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \zeta} &= \frac{\partial f}{\partial \zeta} - \frac{\partial g}{\partial \zeta}, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2}, \\
\frac{\partial g}{\partial \zeta} &= -2iMa \left(1 - M \frac{k_z}{k}\right) \frac{\partial k_z}{\partial \zeta} \alpha^1 + 2a \frac{M^2}{k} \frac{\partial k_z}{\partial \zeta} \alpha^2, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2} &= -2iMa \left(1 - M \frac{k_z}{k}\right) \frac{\partial^2 k_z}{\partial \zeta^2} \alpha^1 + 2ia \frac{M^2}{k} \left(\frac{\partial k_z}{\partial \zeta}\right)^2 \alpha^2 + 2a \frac{M^2}{k} \frac{\partial^2 k_z}{\partial \zeta^2} \alpha^2, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta \partial \alpha^1} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha^1} \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta}\right) = 2iMa \left(1 - M \frac{k_z}{k}\right) \frac{\partial k_z}{\partial \zeta}, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta \partial \alpha^2} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta}\right) = -2a \frac{M^2}{k} \frac{\partial k_z}{\partial \zeta}, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta \partial \alpha^3} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha^3} \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta}\right) = 0, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} d\alpha_1^i d\alpha_1^j &= 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}, \\
\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} &= -\frac{\partial g}{\partial \alpha^1} = -ika \left(1 - M \frac{k_z}{k}\right)^2, \\
\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} &= -\frac{\partial g}{\partial \alpha^2} = 2Ma \left(1 - M \frac{k_z}{k}\right), \\
\frac{\partial F}{\partial \alpha^3} &= -\frac{\partial g}{\partial \alpha^3} = ia \frac{M^2}{k}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Производные функции f и осевого волнового числа k_z в каждом частном случае определяются отдельно. В случае цилиндрического канала радиуса a они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
f(\zeta) &= \frac{\zeta J'_m(\zeta)}{J_m(\zeta)}, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \zeta \left(\frac{m^2}{\zeta^2} - 1 \right) - \zeta \left(\frac{J'_m(\zeta)}{J_m(\zeta)} \right)^2, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} &= \left(1 - \frac{m^2}{\zeta^2} + \left(\frac{J'_m(\zeta)}{J_m(\zeta)} \right)^2 \right) \left(1 + 2\zeta \frac{J'_m(\zeta)}{J_m(\zeta)} \right) - 2, \\
\frac{\partial k_z^\pm}{\partial \zeta} &= \mp \frac{\zeta}{a^2 \sqrt{k^2 - (1 - M^2) \zeta^2 / a^2}}, \\
\frac{\partial^2 k_z^\pm}{\partial \zeta^2} &= \mp \frac{k^2}{a^2 \left(k^2 - (1 - M^2) \zeta^2 / a^2 \right)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

В случае прямоугольного канала со сторонами a и b и одной импедансной стенкой, который рассматривается в следующей главе, выражения для производных принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
f(\zeta) &= -\zeta \tan(\zeta), \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} = -\tan(\zeta) - \frac{\zeta}{\cos^2(\zeta)}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} &= -\frac{2}{\cos^2(\zeta)} (1 + \zeta \tan(\zeta)), \\
k_z(\zeta^\pm) &= \frac{-Mk \pm \sqrt{k^2 - \left(\left(\frac{\zeta^\pm}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{b} \right)^2 \right) (1 - M^2)}}{(1 - M^2)}, \\
\frac{\partial k_z^\pm}{\partial \zeta} &= \mp \frac{\zeta}{a^2 \sqrt{k^2 - (1 - M^2) \left(\left(\frac{\zeta^\pm}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{b} \right)^2 \right)}}, \\
\frac{\partial^2 k_z^\pm}{\partial \zeta^2} &= \mp \frac{k^2 - (1 - M^2) \left(\frac{\pi j}{b} \right)^2}{a^2 \left(k^2 - (1 - M^2) \left(\left(\frac{\zeta^\pm}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{b} \right)^2 \right) \right)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

В новой точке $(\zeta_0 + d\zeta_1, \alpha_0^i + d\alpha_1^i) = (\zeta_1, \alpha_1^i)$ проводится вычисление поправки $d\zeta_2$ путем аналогичного разложения функции $F(\zeta, \alpha^i)$ в точке $(\zeta_1 + d\zeta_2, \alpha_1^i)$, если

выполняется условие $|d\zeta_2| < |d\zeta_1|$, то итоговое решение в рассматриваемой точке определяется методом градиентного спуска с начальным приближением $(\zeta_1 + d\zeta_2, \alpha_1^i)$. Если условие не выполняется, то модуль вектора смещения $d\alpha_1^i$ уменьшается, и процедура повторяется сначала.

2.5 Выводы к главе 2

- Поставлена задача о распространении звука в геометрически однородном канале с безвихревым изэнтропийным однородным потоком идеальной жидкости при наличии конечного участка с неоднородным вдоль оси канала адмиттансом стенки.
- Реализован полуаналитический метод описания процесса распространения звука в поставленной задаче на основе метода поперечных сечений, получены основные соотношения в общем виде. Обозначены основные особенности практического применения реализованного метода.
- Реализован итерационный метод прогонки для практического применения полуаналитического метода описания процесса распространения звука в поставленной задаче, позволяющий преодолеть недостатки полученных соотношений, которые могут возникать при их прямом использовании в расчетах с использованием ЭВМ.
- Реализован метод решения характеристического уравнения, корни которого определяют собственные моды на каждом участке разбиения канала с неоднородным вдоль оси адмиттансом стенки.

Глава 3. Применение и верификация полуаналитического метода описания процесса распространения звука в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок

3.1 Цилиндрический канал

Практическое применение реализованного в предыдущей главе метода описания процесса распространения звука в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок в случае цилиндрической геометрии требует конкретизации соотношений (2.2) (2.5), (2.12). Схема цилиндрического канала радиуса a с неоднородным адмиттансом стенки в пределах $0 \leq z \leq L$ представлена на рисунке 3.1.

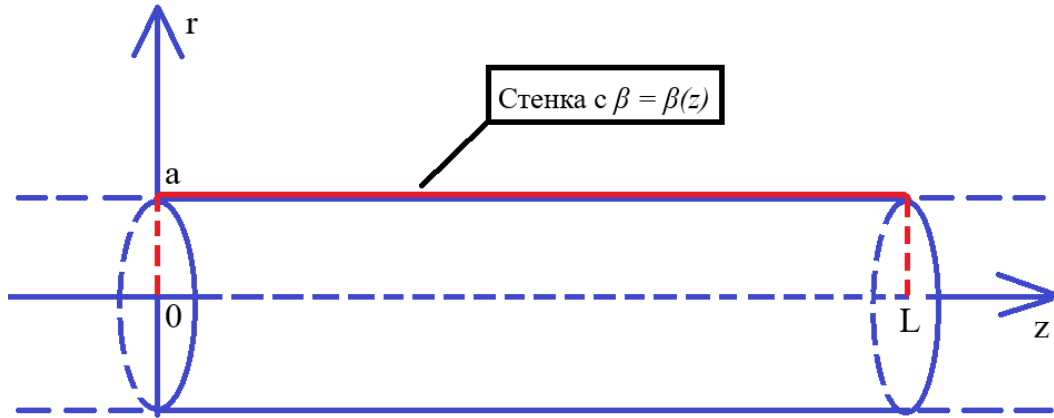


Рисунок 3.1 – Схема цилиндрического канала с неоднородным адмиттансом
стенки

В рассматриваемом случае функции $\psi_{m,n}^{(i)\pm}(x_1)$ имеют следующий вид:

$$\psi_{m,n}^{(i)\pm}(r) = \frac{J_m\left(\zeta_{m,n}^{(i)\pm} \frac{r}{a}\right)}{J_m\left(\zeta_{m,n}^{(i)\pm}\right)}, \quad (3.1)$$

а поле возмущений (2.5) на каждом участке под номером i при разбиении такого канала согласно описанной в предыдущей главе процедуре в цилиндрической системе координат имеет следующий вид (см., например, [2]):

$$p_i(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_i^{(m,n)} \frac{J_m\left(\zeta_{m,n}^{(i)+} \frac{r}{a}\right)}{J_m\left(\zeta_{m,n}^{(i)+}\right)} e^{ik_{z_i^+}^{m,n} z} + B_i^{(m,n)} \frac{J_m\left(\zeta_{m,n}^{(i)-} \frac{r}{a}\right)}{J_m\left(\zeta_{m,n}^{(i)-}\right)} e^{ik_{z_i^-}^{m,n} z} \right) e^{im\varphi}, \quad (3.2)$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка m , $\zeta_{m,n}^{(i)\pm}$ – корни характеристического уравнения, получающегося путем подстановки (3.2) в граничное условие (2.2):

$$\begin{aligned} \zeta_{m,n}^{\pm} J'_m(\zeta_{m,n}^{\pm}) = \\ = \left(ika\beta \left(1 - M \frac{k_{z\pm}^{m,n}}{k} \right)^2 - 2Ma \frac{\partial \beta}{\partial z} \left(1 - M \frac{k_{z\pm}^{m,n}}{k} \right) - i \frac{aM^2}{k} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right) J_m(\zeta_{m,n}^{\pm}) = \\ = g(\zeta_{m,n}^{\pm}) J_m(\zeta_{m,n}^{\pm}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Соотношение для осевых волновых чисел $k_{z_i\pm}^{m,n}$ при этом имеет следующий вид:

$$k_{z_i\pm}^{m,n} = \frac{-Mk \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{\zeta_{m,n}^{(i)\pm}}{a} \right)^2 (1 - M^2)}}{(1 - M^2)}. \quad (3.4)$$

В случае функций вида (3.1) скалярное произведение $(\psi_1(x), \psi_2(x)) = \int_0^1 x \psi_1(x) \psi_2(x) dx$ может быть вычислено аналитически. Хорошо известно (см., например, [125, 128]), что если $\zeta_{1,2}$ – корни уравнения вида $\zeta_{1,2} J'_m(\zeta_{1,2}) = f_{1,2}(\zeta_{1,2}) J_m(\zeta_{1,2})$, где $f_{1,2}(\zeta)$ – некоторые комплексные функции, то соответствующий интеграл вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x J_m(x\zeta_1) J_m(x\zeta_2) dx = \\
& = \begin{cases} J_m(\zeta_1) J_m(\zeta_2) \frac{f_1(\zeta_1) - f_2(\zeta_2)}{(\zeta_2^2 - \zeta_1^2)}, \text{ если } \zeta_2^2 \neq \zeta_1^2, \\ \frac{J_m^2(\zeta)}{2} \left(1 - \frac{m^2 - (f(\zeta))^2}{\zeta^2} \right), \text{ если } f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = f(\zeta) \text{ и } \zeta_1^2 = \zeta_2^2 = \zeta^2, \\ \frac{1}{2}, \text{ если } m = 0, f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = 0 \text{ и } \zeta_1 = \zeta_2 = 0. \end{cases} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Таким образом, элементы матрицы скалярных произведений (2.12) в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
& \hat{W}_{mnl}^{(i)\pm(k)\pm} = \\
& = \begin{cases} \frac{g_i(\zeta_{m,n}^{(i)\pm}) - g_k(\zeta_{m,l}^{(k)\pm})}{\left((\zeta_{m,l}^{(k)\pm})^2 - (\zeta_{m,n}^{(i)\pm})^2 \right)}, \text{ если } (\zeta_{m,n}^{(i)\pm})^2 \neq (\zeta_{m,l}^{(k)\pm})^2, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m^2 - (g_i(\zeta_{m,n}^{(i)\pm}))^2}{(\zeta_{m,n}^{(i)\pm})^2} \right), \text{ если } g_i(\zeta_{m,n}^{(i)\pm}) = g_k(\zeta_{m,l}^{(k)\pm}) \text{ и } (\zeta_{m,n}^{(i)\pm})^2 = (\zeta_{m,l}^{(k)\pm})^2, \\ \frac{1}{2}, \text{ если } m = 0, g_i(\zeta_{m,n}^{(i)\pm}) = g_k(\zeta_{m,l}^{(k)\pm}) = 0 \text{ и } \zeta_{m,n}^{(i)\pm} = \zeta_{m,l}^{(k)\pm} = 0. \end{cases} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Верификация реализованной процедуры описания процесса распространения звука в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок в случае цилиндрической геометрии была проведена на основании сравнения решений, полученных с использованием реализованной процедуры, с решениями уравнения (2.1) с граничным условием (2.2), полученными с помощью численного метода конечных элементов (МКЭ). Этот численный метод широко используется в решении задач о распространении линейных волн в среде, хорошо себя зарекомендовал, и был верифицирован для решения подобного рода задач на хорошо известных в литературе задачах, имеющих аналитическое решение [131, 132].

В качестве примера для верификации реализованной процедуры рассмотрим задачу о падении слева звуковых мод с определенными азимутальными и радиальными числами m и n соответственно на участок цилиндрического канала длиной $L = 0.95$ метр и радиусом $a = 1$ метр (схема представлена на рисунке 3.1) с областью неоднородности, характеризующейся следующей зависимостью адмиттанса от продольной координаты:

$$\beta(z) = \beta_0 f(z), \quad (3.7)$$

где β_0 – некоторая константа, которая в каждом примере далее будет конкретизирована, а функция $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{ или } z > z_2, \\ 0.5 + 0.9375\left(\frac{z-b}{b}\right) - 0.625\left(\frac{z-b}{b}\right)^3 + 0.1875\left(\frac{z-b}{b}\right)^5, & 0 \leq z \leq 2b, \\ 1, & 2b < z \leq z_1, \\ 1 - \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, & z_1 < z \leq z_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

При значениях параметров $b = 0.075$ м, $z_1 = 0.4$ м, $z_2 = 0.75$ м график функции $f(z)$ представлен на рисунке 3.2.

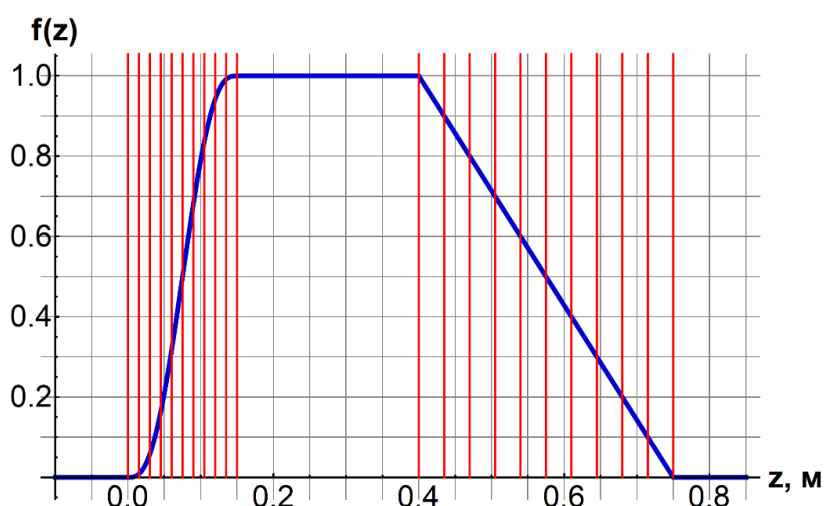


Рисунок 3.2 – Зависимость функции $f(z)$ от продольной координаты и схематическое обозначение разбиения неоднородных областей на участки (красные вертикальные линии)

Выбор функции (3.7)-(3.8) для проведения верификационных расчетов связан с тем, что данная функция содержит в себе практически все особенности, которые могут встретиться при решении практических задач: сравнительно резкое (в сравнении с масштабом длины волны) возрастание адмиттанса от нуля (т.е. условия жестких стенок) до конечного значения, первая и вторая производные по продольной координате изменяются в широком диапазоне значений на переходном участке $0 \leq z \leq 2b$, в особенности в окрестности границ обозначенного интервала, разрывы первой производной адмиттанса по продольной координате в точках $z = 0.4$, $z = 0.75$. Существующие аналитические модели описания процесса распространения возмущений в каналах с потоком при условии неоднородного адмиттанса стенки, основанные на ВКБ-приближении, не могут быть использованы в задачах с такими особенностями неоднородности адмиттанса в силу ограничений, в рамках которых они были получены, что было показано в [83]. Именно поэтому проверка реализованной полуаналитической модели на примере неоднородного адмиттанса, заданного (3.7)-(3.8), представляет собой особый интерес.

Как видно из рисунка 3.2, область, где адмиттанс отличен от нуля, обрамлена с двух сторон областью с жесткой стенкой. Соответственно, исходно заданное падающее звуковое поле одной звуковой моды с определенными азимутальными и радиальными числами m и n слева на рассматриваемый участок имеет вид:

$$p_{m,n}(r, \varphi, z) = A_1^{(m,n)} \frac{J_m\left(\zeta_{m,n}^{(1)+} \frac{r}{a}\right)}{J_m\left(\zeta_{m,n}^{(1)+}\right)} e^{ik_{z_1^+}^{m,n} z} e^{im\varphi}, \quad (3.9)$$

где $\zeta_{m,n}^{(1)+}$ – n -й по порядку корень характеристического уравнения (3.3) при значении параметров $\beta = 0$, $\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = 0$, соответствующих абсолютно жесткой стенке.

Расчетная двумерная осесимметричная область для решения поставленной задачи с использованием МКЭ представлена на рисунке 3.3. На границах расчетной

области располагаются идеально согласованные слои (ИСС или PML – Perfectly Matched Layer) для обеспечения условия отсутствия отражения.



Рисунок 3.3 – Схема расчетной области для расчетов с использованием МКЭ в цилиндрическом канале в осесимметричной постановке

Для проведения расчетов использовалась неструктурированная сетка с размером элемента $d = 5$ миллиметров, то есть на минимальную длину волны в проведенных расчетах приходилось более 20 элементов. Расчетная сетка изображена на рисунке 3.4.

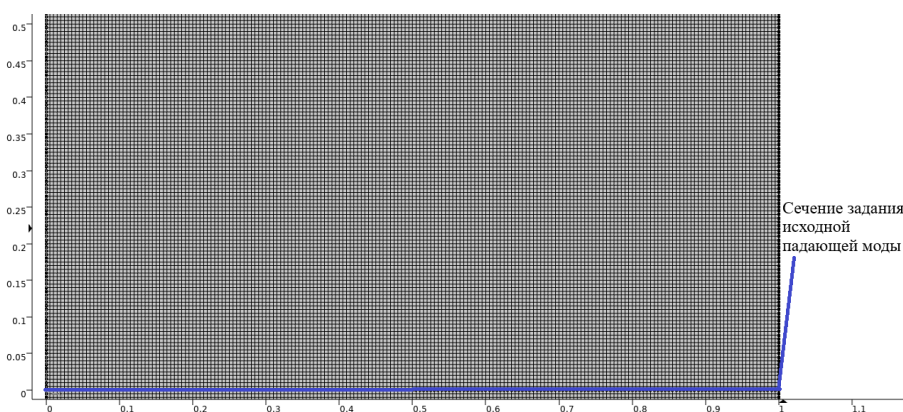


Рисунок 3.4 – Фрагмент сетки вблизи сечения задания исходной падающей моды для проведения расчетов с использованием МКЭ в цилиндрическом канале в осесимметричной постановке

Далее будут представлены результаты расчетов с использованием реализованной полуаналитической модели и с использованием МКЭ звукового поля в канале при падении на рассматриваемый участок канала звуковой моды с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока

в канале $M = 0.6$ (распространение исходного возмущения по потоку) при скорости звука $c_0 = 344.145$ м/с и значении $\beta_0 = 0.9836 - 0.8197i$.

В полуаналитической модели рассматриваемый участок канала был разбит на 89 секций, включая области с жесткой стенкой при $-0.1 \leq z < 0$ и $0.75 \leq z \leq 0.85$. Разбиение рассматриваемого участка канала в соответствии с реализованной процедурой схематически приведено на рисунке 3.2: переходная область в пределах $0 \leq z < 0.15$ была разбита на 60 участков, а линейная переходная область $0.4 \leq z < 0.75$ была разбита на 26 участков. Исходно для вычисления корней характеристического уравнения исходный рассматриваемый участок канала был разбит на 274 секции таким образом, чтобы модуль разности по абсолютной величине по адмиттансу между соседними участками не превышала 0.05: $Max_i(|\beta_i - \beta_{i+1}|) < 0.05, i = \overline{0, N-1}$, по первой производной не превышала 0.5:

$$Max_i \left(\left| \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)_i - \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)_{i+1} \right| \right) < 0.5, i = \overline{0, N-1}, \quad \text{а по второй} \quad - \quad 5:$$

$$Max_i \left(\left| \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right)_i - \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right)_{i+1} \right| \right) < 5, i = \overline{0, N-1}. \quad \text{После нахождения всех корней и}$$

вычисления осевых волновых чисел число секций разбиения было сокращено таким образом, чтобы модуль абсолютной разности по всем осевым волновым числам не превышал 0.05 1/м: $Max_i \left(Max_n \left(|k_{z_i \pm}^{m,n} - k_{z_{i+1} \pm}^{m,n}| \right) \right) < 0.05, i = \overline{0, N-1}, n = \overline{0, N_{full}}$,

где N_{full} – количество учитываемых в процедуре мод, равное сумме количества распространяющихся мод, определяемых на участке канала с жесткой стенкой, и не распространяющихся мод. В представленных ниже примерах расчетов число не распространяющихся звуковых мод было выбрано равным 15, однако при вычислении звукового давления учитывались только первые 10. Параметры разбиения, приведенные выше, были подобраны эмпирически таким образом, чтобы в полуаналитической процедуре расчета сохранялся баланс между точностью решения и быстродействием самого алгоритма. На рисунке 3.5 представлена схема с обозначениями прямых $R = a = 1$ м, $R = 0.95$ м, $R = 0.9$ м вдоль

оси канала, на которых в представленных далее графиках будут выведены результаты.

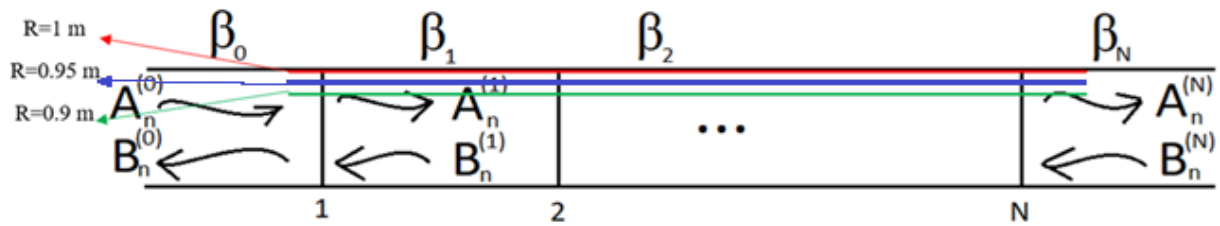


Рисунок 3.5 – Схема канала с изображением прямых, на которых выводились данные расчетов

Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых (рисунок 3.5) в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.6. Здесь и далее сплошными кривыми будут изображаться данные расчетов, полученные с использованием полуаналитической модели (отмечены префиксом «Т»), а штриховыми кривыми – данные, полученные с использованием МКЭ (отмечены префиксом «С»).

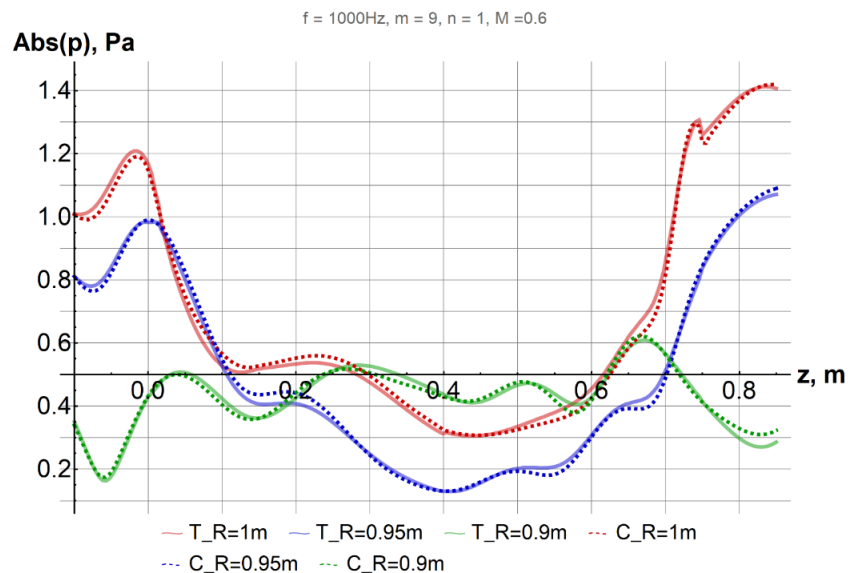


Рисунок 3.6 – Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.7.

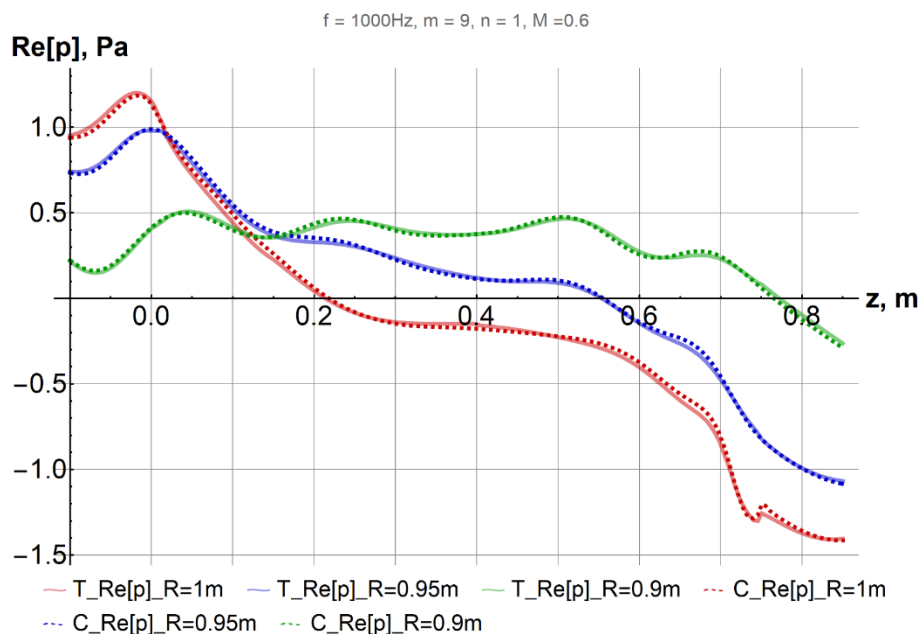


Рисунок 3.7 – Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.8.

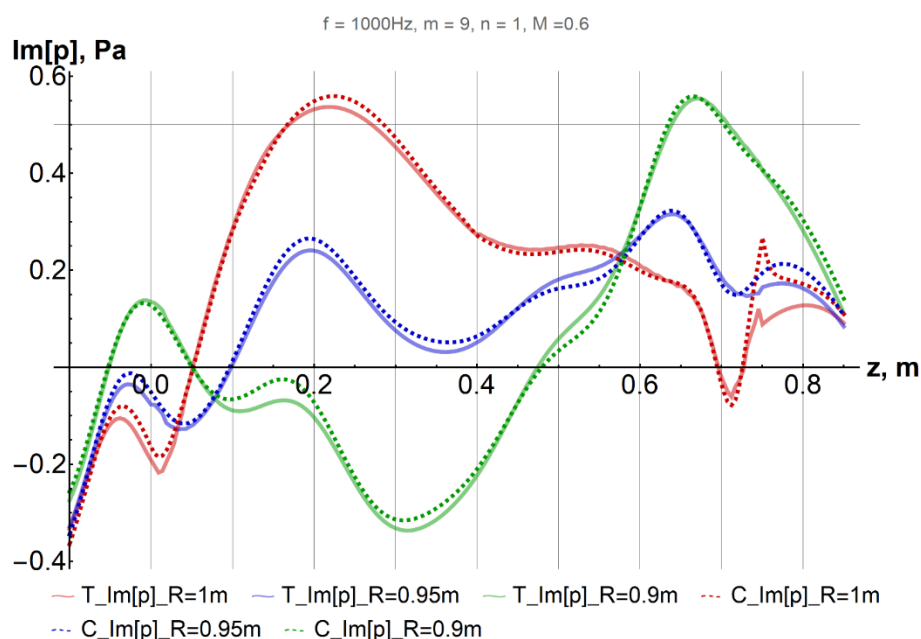


Рисунок 3.8 – Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Приведенный пример расчета представляет собой особый интерес с точки зрения анализа причин поведения звукового поля в данной конфигурации. Если из численного расчета можно получить только итоговое звуковое поле, представленное на рисунке 3.9, то расчет с использованием полуаналитического метода содержит в себе куда более детальную информацию, доступную для анализа.

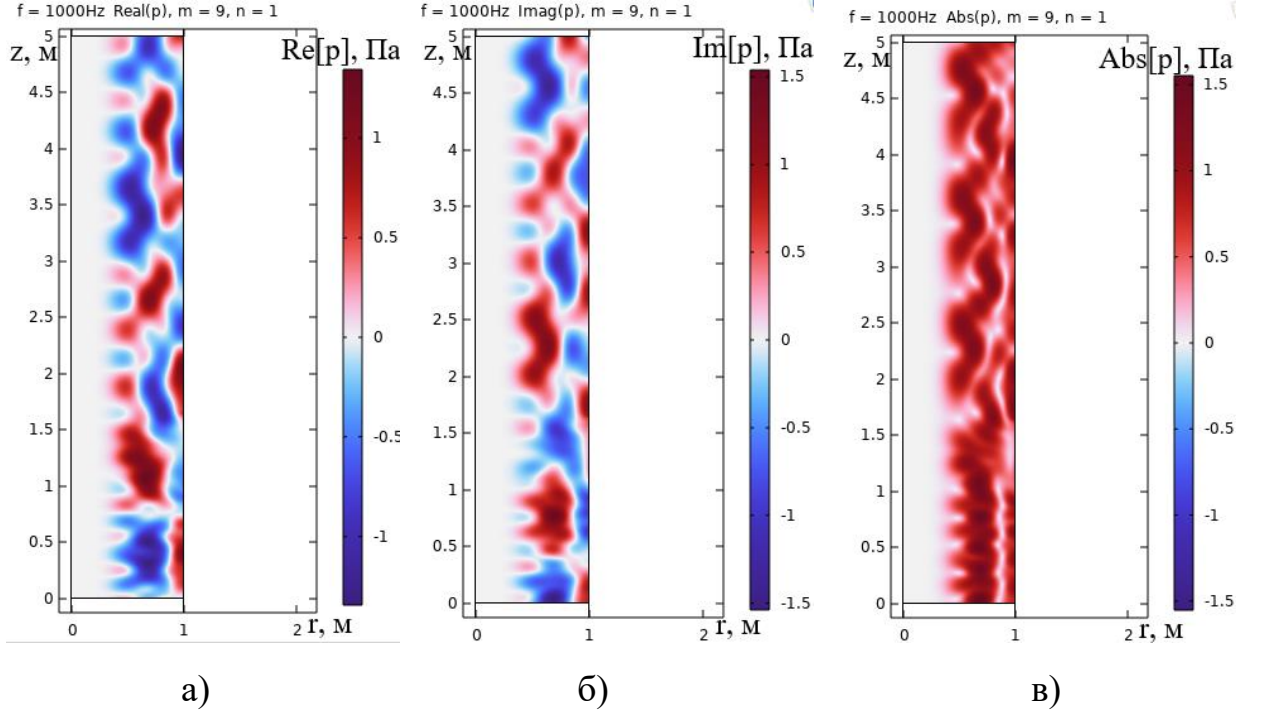


Рисунок 3.9 – Поле звукового давления при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = 0.6$, полученные с использованием МКЭ: (а) – реальная часть; (б) – мнимая часть; (в) – модуль

Анализ поведения корней характеристического уравнения (3.3) позволяет объяснить, к примеру, с чем связан эффект локального усиления модуля звукового давления в окрестности точки $z = 0$ (рисунок 3.6). Объяснить этот эффект проще всего из анализа графика корней $\zeta_{m,n}^{(i)\pm}$ по мере распространения исходного возмущения по каналу, представленного на рисунке 3.10: корни, соответствующие модам, распространяющимся вдоль оси канала, изображены сплошными кривыми и подписаны «+», а соответствующие модам, распространяющимся против оси канала изображены штриховыми кривыми и подписаны «-». Стрелками обозначено направление движения соответствующих корней по мере движения вдоль оси канала. Черной жирной точкой на оси отмечено число $k = \frac{k}{\sqrt{1-M^2}}$, являющееся точкой ветвления корня в (3.4).

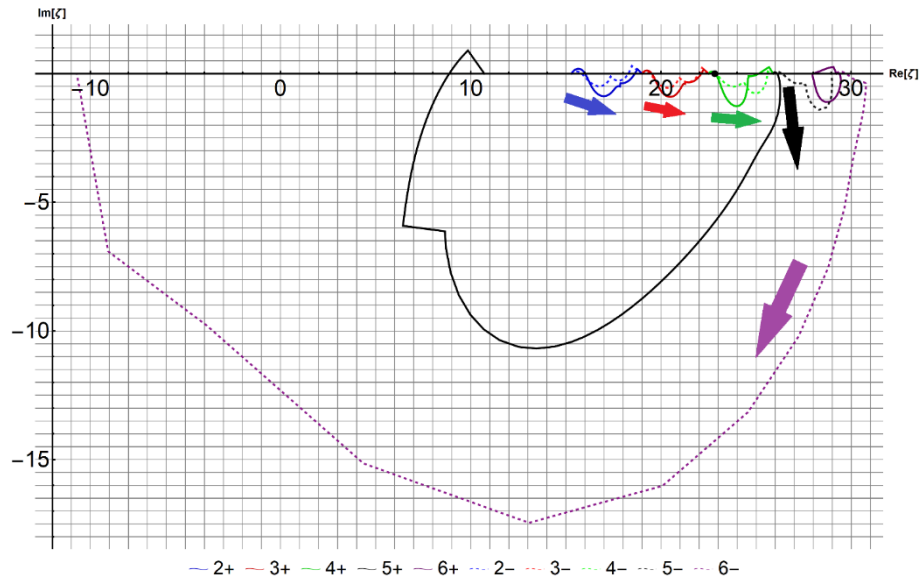


Рисунок 3.10 – Траектории движения корней характеристического уравнения под номерами 2, 3, 4, 5 и 6 по мере увеличения продольной координаты z при исходной звуковой моде с $m=9, n=1$ на частоте $f=1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1}=1$ Па при числе Маха потока в канале $M=0.6$

Как видно из рисунка 3.10, по мере движения от участка с жесткой стенкой в начале канала к участку с жесткой стенкой в конце канала, корни характеристического уравнения изменили свой порядок: корни с номерами 2, 3 и 4, соответствующие модам, распространяющимся как вдоль, так и против оси канала, переместились на один номер вперед: мода, соответствующая в начале второму корню характеристического уравнения в канале с жесткой стенкой, в конце стала соответствовать третьему корню характеристического уравнения в канале с жесткой стенкой, третья – четвертой, а четвертая – пятой. Пятый же корень, соответствующий моде, распространяющейся вдоль оси канала, в конце занял место первого, как и шестой корень, соответствующий моде, распространяющейся против оси канала. При этом корни под номерами 1, 2 и 3 в начале своего движения на коротком участке пересекают разрез квадратного корня (2.31), переходя в I четверть на нижний лист римановой поверхности, чем и объясняется эффект локального увеличения давления в окрестности точки $z=0$ (рисунок 3.6), так как при этом мнимые части осевых волновых чисел становятся меньше нуля для мод, распространяющихся вдоль оси канала, и больше нуля для

распространяющихся против оси канала. Эту часть траектории корней лучше видно на рисунке 3.11, где из рассмотрения убраны корни под номерами 5 и 6. Таким образом, соответствующие этим корням моды становятся локально возрастающими. Этот же эффект повторяется для мод, распространяющихся как вдоль, так и против оси канала, соответствующих корням характеристического уравнения под номерами 1, 2 и 3 ближе к концу канала, начиная с секции разбиения номер 84 ($z > 0.6878$): они вновь пересекают разрез квадратного корня, попадая в I четверть на нижний лист, в силу чего наблюдается эффект локального возрастания, заметный в окрестности этого участка на рисунках 3.6-3.8. При этом при переходе из предпоследнего участка разбиения в последний с условием жесткой стенки они вновь пересекают разрез, возвращаясь на верхний лист на действительную ось.

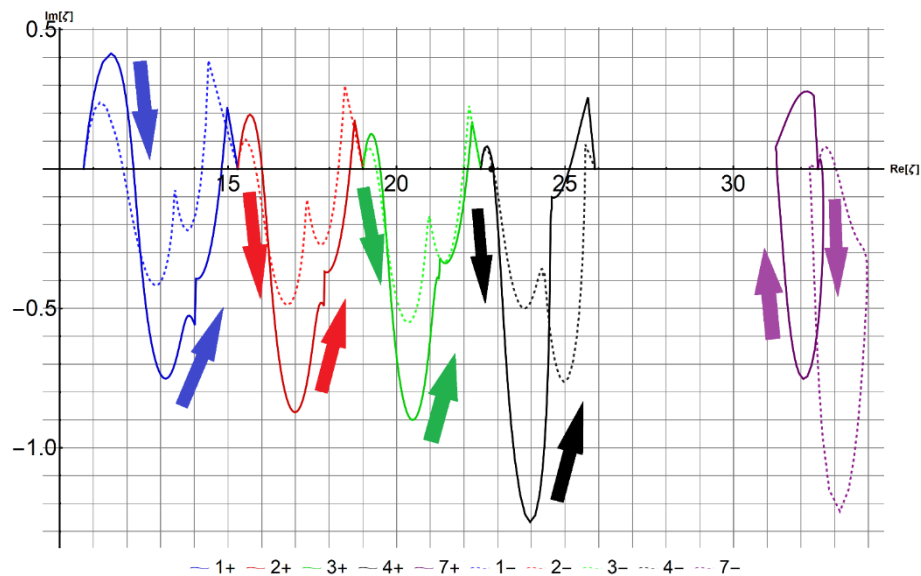


Рисунок 3.11 – Траектории движения корней характеристического уравнения под номерами 1, 2, 3, 4 и 7 по мере увеличения продольной координаты z при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой

$$A_{9,1} = 1 \text{ Па при числе Маха потока в канале } M = 0.6$$

Помимо описанной выше особенности, представленный пример примечателен еще одной: как видно из рисунка 3.11, корни под номером 4, соответствующие модам, распространяющимся как вдоль, так и против оси канала, после пересечения разреза квадратного корня (2.31) огибают точку ветвления и

возвращаются в IV четверть на нижнем листе Римановой поверхности, что совершенно не характерно для всех остальных корней. При этом наблюдается следующий эффект: моды, распространяющиеся вдоль и против оси канала, меняются местами, что учитывается в реализованной процедуре прогонки.

Ниже будет представлено сравнение результатов расчетов, проведенных при тех же параметрах, но при числе Маха потока в канале $M = -0.6$ (распространение исходного возмущения против потока). В этом случае в полуаналитической модели рассматриваемый участок канала был разбит на 101 секцию: переходная область в пределах $0 \leq z < 0.15$ была разбита на 73 секции, а линейная переходная область $0.4 \leq z < 0.75$ была разбита на 25 секций.

Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых (рисунок 3.5) в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.12.

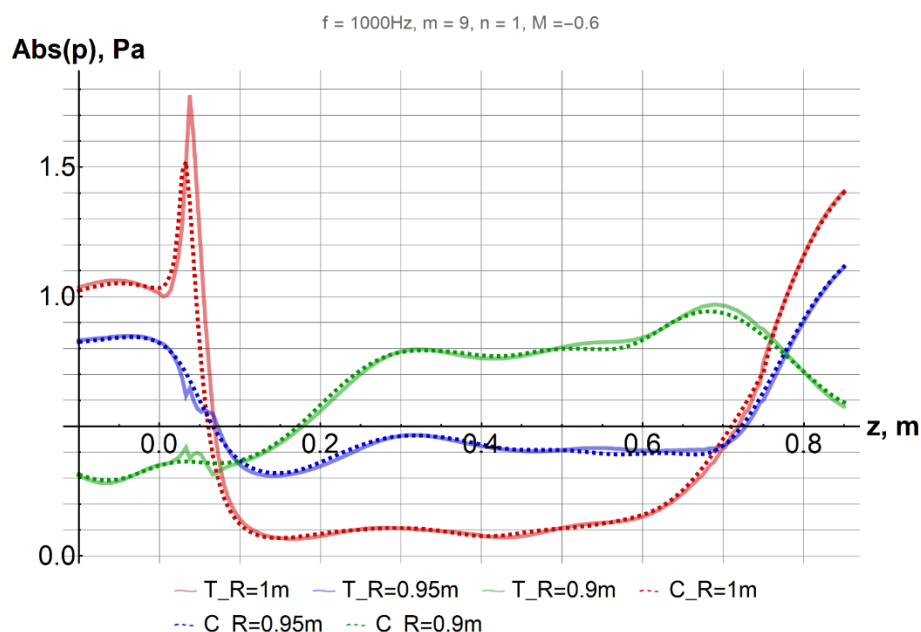


Рисунок 3.12 – Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9$, $n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = -0.6$ при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.13.

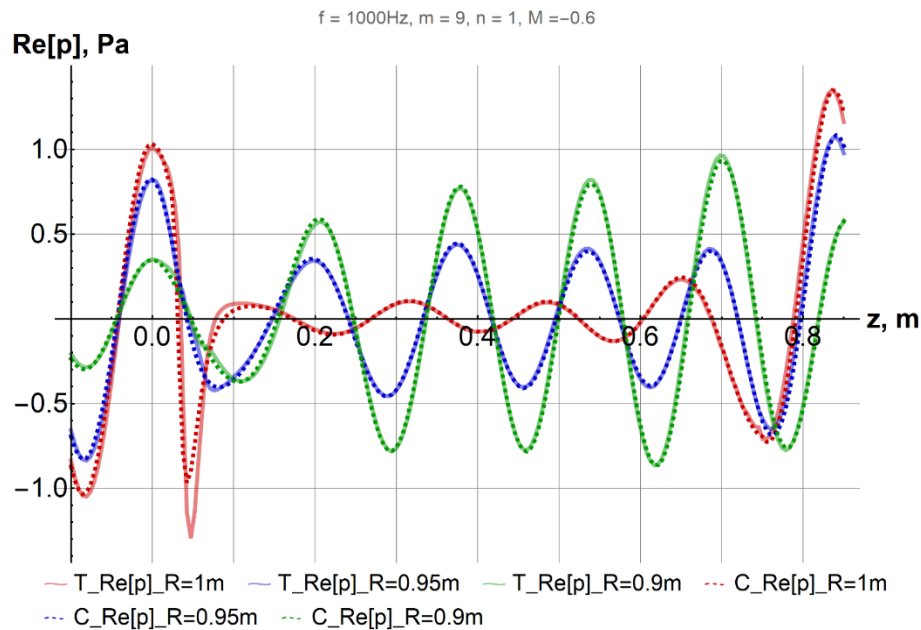


Рисунок 3.13 – Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9$, $n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = -0.6$ при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.14.

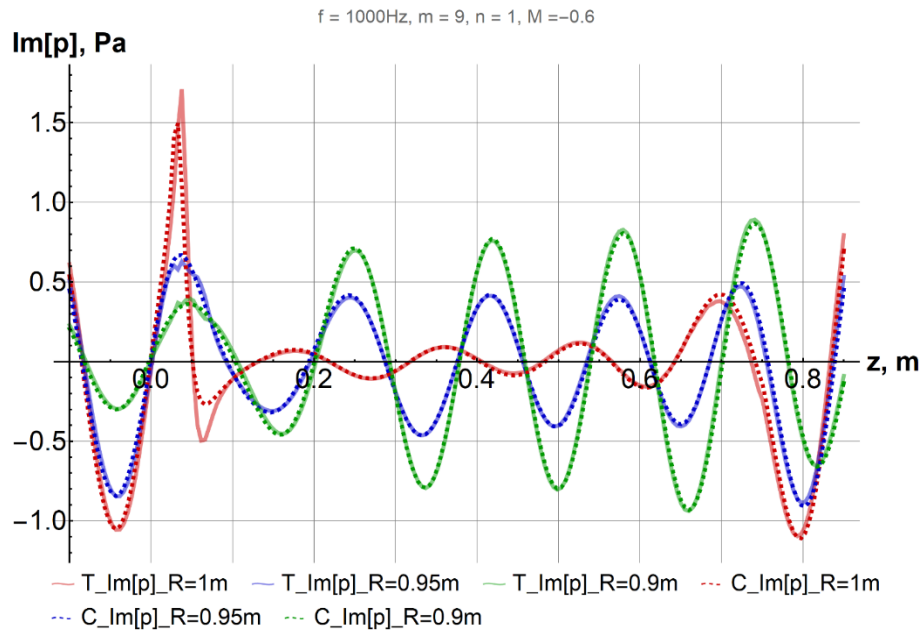


Рисунок 3.14 – Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = -0.6$ при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Приведенный пример в плане постановки отличается от предыдущего только направлением потока, однако продемонстрированный ранее эффект локального усиления звукового давления здесь куда более ярко выражен: это область в окрестности точки $z = 0.04$ на рисунках 3.12-3.14. Численный расчет, как и прежде, дает лишь картину поля, представленную на рисунке 3.15, в то время как расчет с помощью полуаналитического метода позволяет объяснить причину наблюдаемого эффекта.

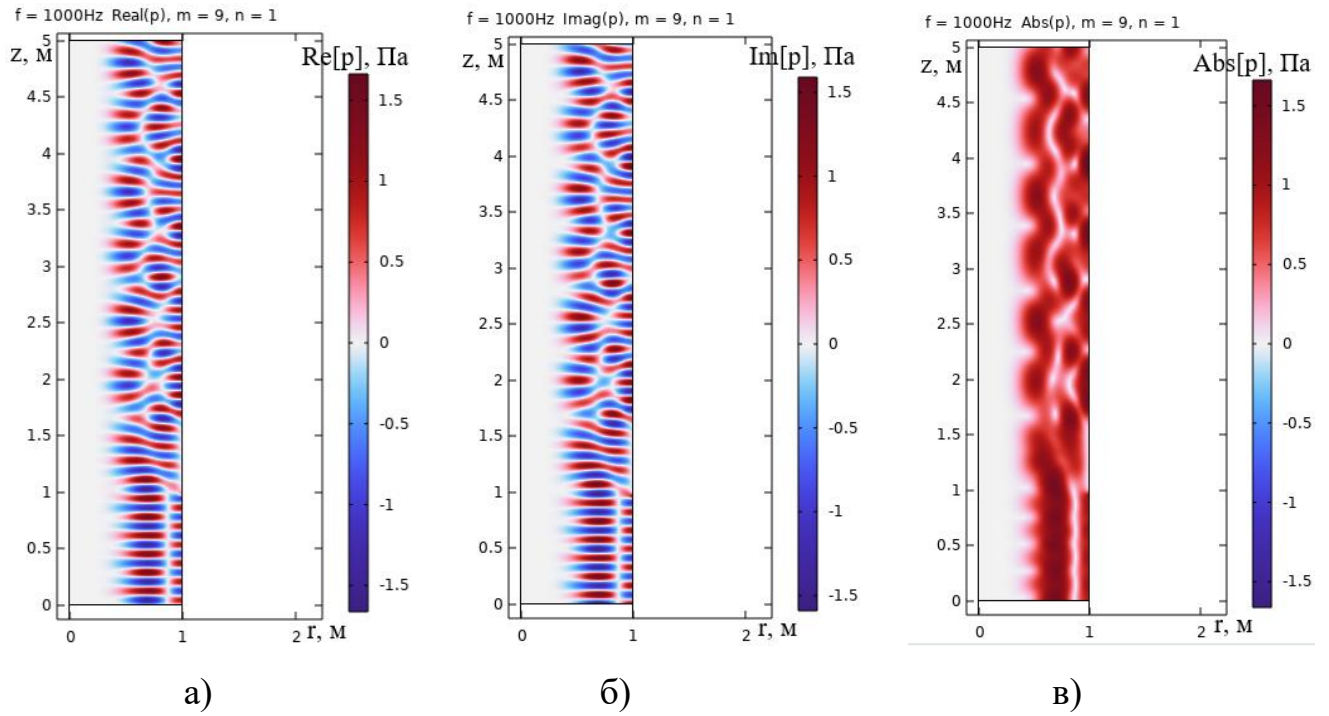


Рисунок 3.15 – Поле звукового давления при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = -0.6$, полученные с использованием МКЭ: (а) – реальная часть; (б) – мнимая часть; (в) – модуль

Аналогично случаю распространения исходного возмущения по потоку, рассмотренному ранее, определить причину локального усиления звукового давления можно из анализа графика радиальных волновых чисел $\zeta_{m,n}^{(i)\pm}$ по мере распространения исходного возмущения по каналу, представленного на рисунке 3.16:

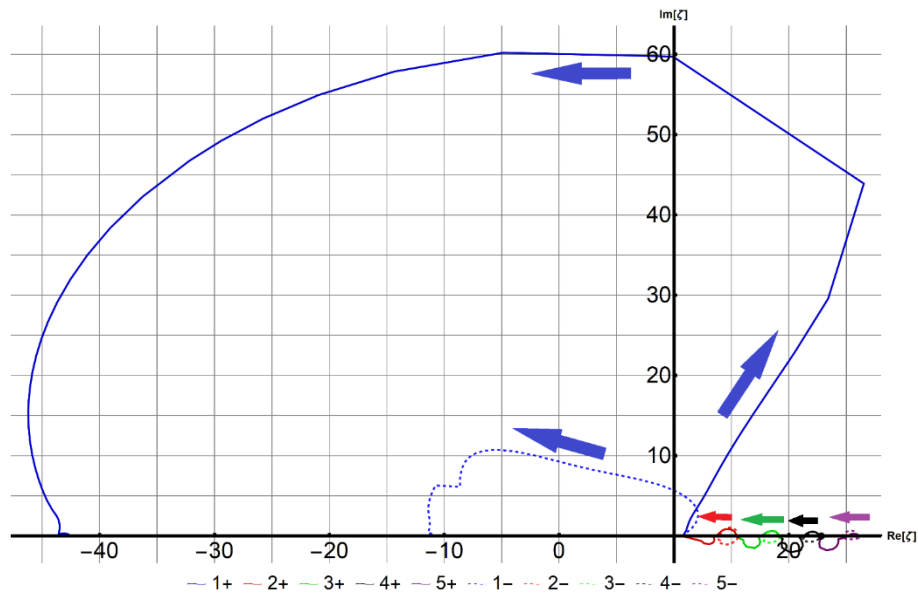


Рисунок 3.16 – Траектории движения корней характеристического уравнения под номерами 1, 2, 3, 4 и 5 по мере увеличения продольной координаты z при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = -0.6$

Как видно из рисунка 3.16, первый корень характеристического уравнения, соответствующий моде, распространяющейся вдоль оси канала (синяя сплошная кривая), пересекает разрез корня (2.31) и переходит в I четверть, достигая при этом значения мнимой части, превышающего по абсолютному значению 60 до того, как пересечет разрез $\text{Im}[\zeta] = 0$ и перейдет во II четверть. Тем самым в промежутке участка исходного разбиения под номером 2 и до участка под номером 23 ($0 \leq z \leq 0.038$) мнимая часть осевого волнового числа являлась отрицательной величиной, что и явилось основной причиной рассматриваемого эффекта локального усиления в этом случае. Похожим образом ведет себя первый корень характеристического уравнения, соответствующий моде, распространяющейся против оси канала (рисунок 3.16, синяя штриховая кривая). В самом начале он также пересекает разрез корня (2.31) и переходит в I четверть, обеспечивая тем самым эффект локального усиления вплоть до перехода через разрез $\text{Im}[\zeta] = 0$, то есть на участках разбиения от 2 до 58 включительно ($0 \leq z \leq 0.0908$).

График траекторий корней под номерами 2-6 в рассматриваемом случае представлен на рисунке 3.17. На начальном этапе траектории корни под номерами 2-4, соответствующие модам, распространяющимся как вдоль, так и против оси канала, также переходят через разрез корня (2.30) в I четверть, чем объясняется вклад соответствующих им звуковых мод в наблюдаемый эффект локального усиления. Важно подчеркнуть, что определяющим фактором при этом является рассмотренный ранее первый корень.

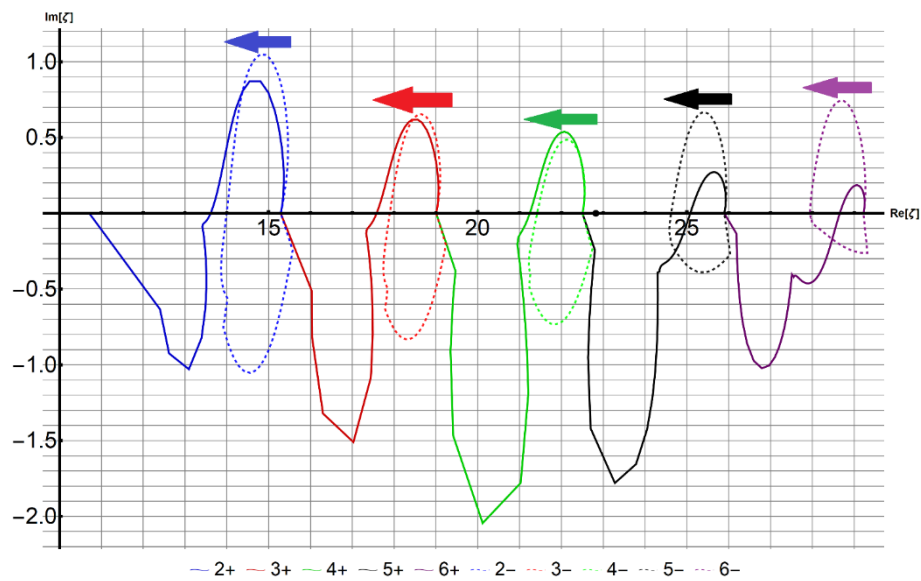


Рисунок 3.17 – Траектории движения корней характеристического уравнения под номерами 2, 3, 4, 5 и 6 по мере увеличения продольной координаты z при исходной звуковой моде с $m=9, n=1$ на частоте $f=1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1}=1$ Па при числе Маха потока в канале $M=-0.6$

Важно подчеркнуть, что определяющим фактором в наблюдаемом эффекте локального усиления является поведение рассмотренного ранее первого корня. Это подтверждается графиком зависимости амплитуд мод на участках разбиения в зависимости от номера участка, представленного на рисунке 3.18, где сплошные кривые относятся к амплитудам звуковых мод, распространяющихся вдоль оси канала, а штриховые – к амплитудам распространяющихся против оси.

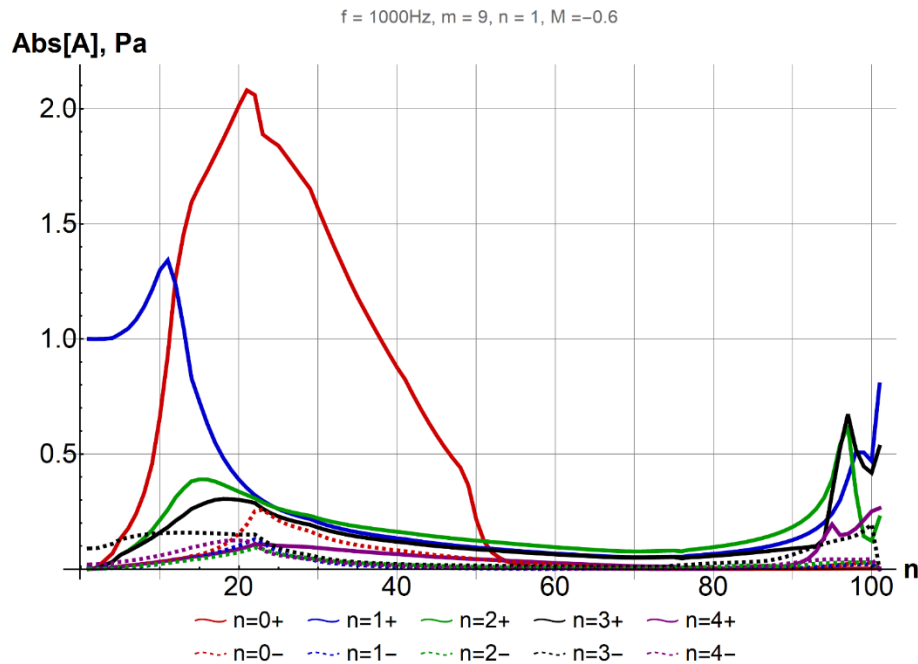


Рисунок 3.18 – Амплитуды звуковых мод с различными радиальными числами в зависимости от номера участка разбиения при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = -0.6$

Из рисунка 3.18 видно, что амплитуда звуковой моды с радиальным числом $n = 0$ с самого начала резко возрастает по мере распространения исходного возмущения по каналу, достигая к 21 секции разбиения (т.е. на участке $0 \leq z \leq 0.0348$) значения по модулю, превышающее исходное более чем в 2 раза, что подтверждает весь проведенный выше анализ. При этом вклад остальных мод хоть и существенен, но не является определяющим.

Приведенные выше примеры примечательны с точки зрения рассмотренных особенностей поля и возможностей анализа причин их возникновения с использованием полуаналитической модели. При этом результаты, полученные с использованием полуаналитической модели, не соотносятся с результатами, полученными с использованием МКЭ, везде в равной степени: присутствуют области, в которых разница между решениями больше, чем во всех остальных. Самый яркий из приведенных примеров – область в окрестности точки $z = 0.04$ на рисунке 3.12. Связано это с тем, что для более точных расчетов в тех областях необходимо провести более подробное разбиение канала и увеличить количество

учитываемых мод. В тех же случаях, когда подобные эффекты не наблюдаются, с использованными в расчете параметрами (параметры разбиения канала и количество учитываемых мод) итоговое решение получается с точностью, достаточной для прикладных задач. В качестве такого примера ниже будут представлено сравнение результатов расчетов, проведенных при тех же параметрах, что и предыдущие, но при отсутствии потока. В этом случае в полуаналитической модели рассматриваемый участок канала был разбит на 47 секций: переходная область в пределах $0 \leq z < 0.15$ была разбита на 24 секции, а линейная переходная область $0.4 \leq z < 0.75$ была разбита на 20 секций.

Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых (рисунок 3.5) в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.19.

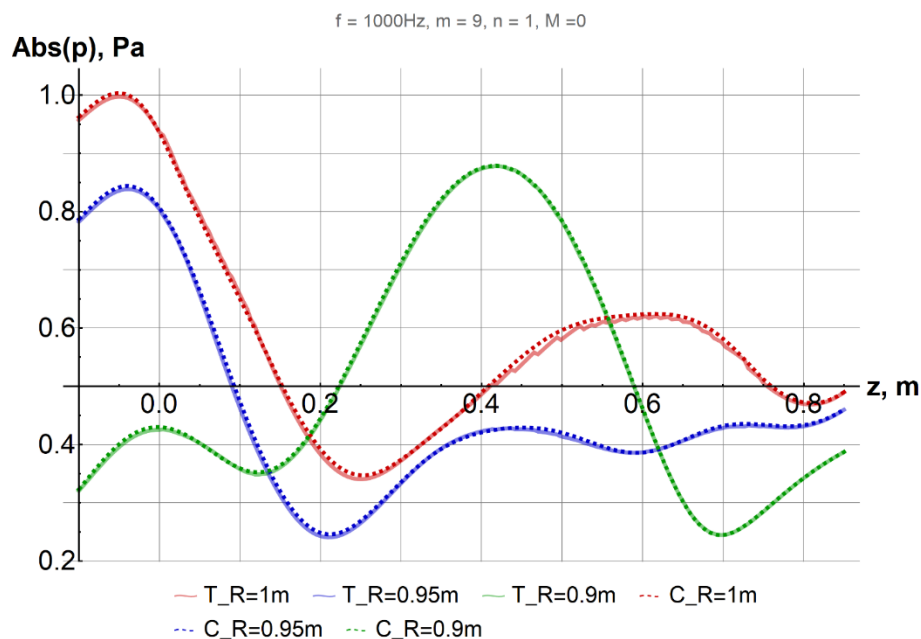


Рисунок 3.19 – Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9$, $n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при отсутствии потока при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.20.

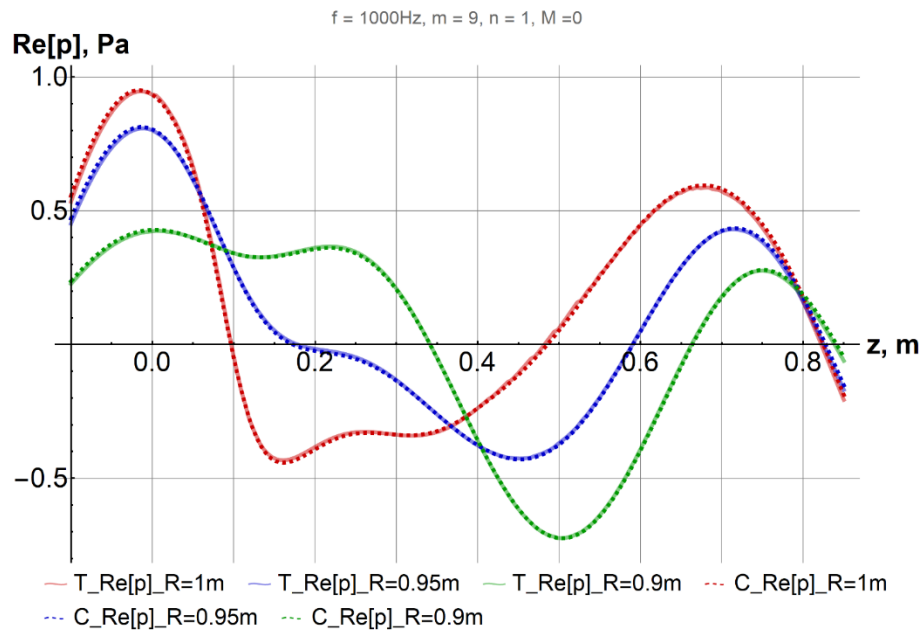


Рисунок 3.20 – Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9, n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при отсутствии потока при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.21.

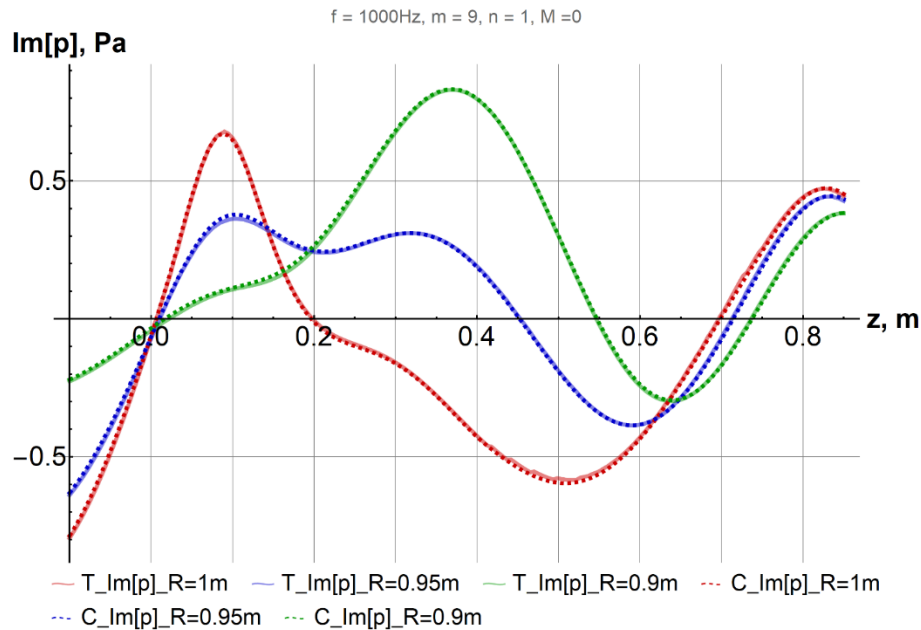


Рисунок 3.21 – Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 9$, $n = 1$ на частоте $f = 1000$ Гц с амплитудой $A_{9,1} = 1$ Па при отсутствии потока при различных значениях координаты r , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Как видно из рисунков 3.19-3.21, в рассматриваемом случае результаты, полученные с использованием полуаналитической модели, соотносятся с результатами, полученными с использованием МКЭ, практически в равной степени во всей расчетной области.

3.2 Прямоугольный канал

Аналогично случаю цилиндрического канала, практическое применение реализованного в предыдущей главе метода описания процесса распространения звука в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок в случае прямоугольного в сечении канала требует конкретизации соотношений (2.2) (2.5), (2.12). Схема прямоугольного канала со сторонами a и b в поперечном сечении с неоднородным адмиттансом стенки в пределах $0 \leq z \leq L$ представлена на рисунке 3.22.

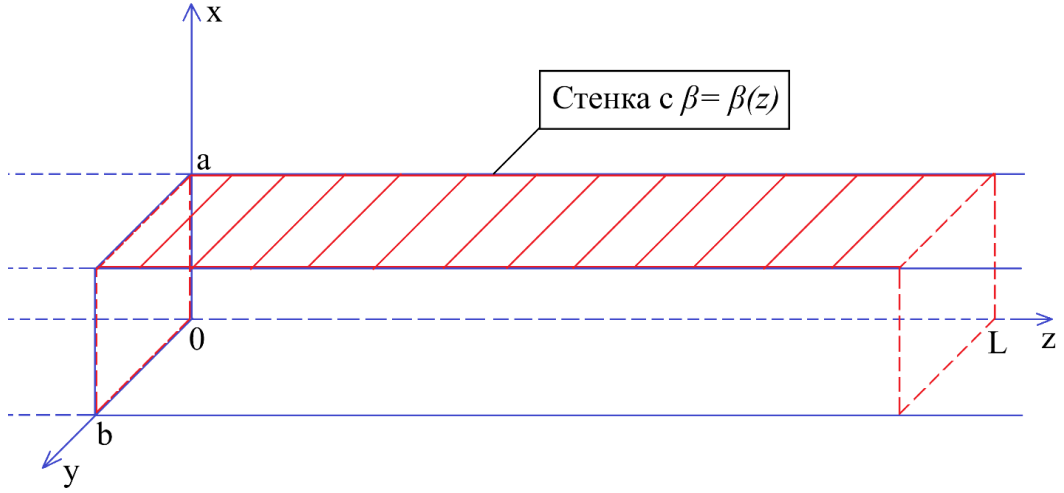


Рисунок 3.22 – Схема прямоугольного канала с неоднородным адмиттансом стенки

В рассматриваемом случае функции $\psi_{m,n}^{(i)\pm}(x_1)$ имеют следующий вид:

$$\psi_{j,n}^{(i)\pm}(x) = \frac{\cos\left(\zeta_{j,n}^{(i)\pm} \frac{x}{a}\right)}{\cos(\zeta_{j,n}^{(i)\pm})}, \quad (3.10)$$

а поле возмущений (2.5) на каждом участке под номером i при разбиении такого канала согласно описанной в предыдущей главе процедуре в декартовой прямоугольной системе координат имеет следующий вид (см., например, [2]):

$$p_i(x, y, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_i^{(j,n)} \frac{\cos\left(\zeta_{j,n}^{(i)+} \frac{x}{a}\right)}{\cos(\zeta_{j,n}^{(i)+})} e^{ik_{z_i+}^{j,n} z} + B_i^{(j,n)} \frac{\cos\left(\zeta_{j,n}^{(i)-} \frac{x}{a}\right)}{\cos(\zeta_{j,n}^{(i)-})} e^{ik_{z_i-}^{j,n} z} \right) \cos\left(\frac{y\pi j}{b}\right), \quad (3.11)$$

где $\zeta_{j,n}^{(i)\pm}$ – корни характеристического уравнения, получающегося путем подстановки (3.10) в граничное условие (2.2):

$$\begin{aligned} -\zeta_{j,n}^{\pm} \tan(\zeta_{j,n}^{\pm}) &= \left(ika\beta \left(1 - M \frac{k_{z\pm}^{j,n}}{k} \right)^2 - 2Ma \frac{\partial \beta}{\partial z} \left(1 - M \frac{k_{z\pm}^{j,n}}{k} \right) - i \frac{aM^2}{k} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right) = \\ &= g(\zeta_{m,n}^{\pm}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

В данном случае соотношение для осевых волновых чисел $k_{z_i\pm}^{j,n}$ имеет следующий вид:

$$k_{z_i\pm}^{j,n} = \frac{-Mk \pm \sqrt{k^2 - \left(\left(\frac{\zeta_{j,n}^{(i)\pm}}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{b} \right)^2 \right) (1 - M^2)}}{(1 - M^2)}. \quad (3.13)$$

Для функций вида (3.10) скалярные произведения $(\psi_1(\tilde{x}), \psi_2(\tilde{x})) = \int_0^1 \psi_1(\tilde{x}) \psi_2(\tilde{x}) d\tilde{x}$ легко вычисляются, в связи с чем элементы матрицы скалярных произведений (2.12) в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\hat{W}_{jnl}^{(i)\pm(k)\pm} = \begin{cases} \frac{\zeta_{j,n}^{(i)\pm} \tan(\zeta_{j,n}^{(i)\pm}) - \zeta_{j,l}^{(k)\pm} \tan(\zeta_{j,l}^{(k)\pm})}{\left(\left(\zeta_{j,n}^{(i)\pm} \right)^2 - \left(\zeta_{j,l}^{(k)\pm} \right)^2 \right)}, & \text{если } \left(\zeta_{j,l}^{(k)\pm} \right)^2 \neq \left(\zeta_{j,n}^{(i)\pm} \right)^2, \\ \frac{1}{2 \left(\cos(\zeta_{j,n}^{(i)\pm}) \right)^2} \left(1 + \frac{\sin(2\zeta_{j,n}^{(i)\pm})}{2\zeta_{j,n}^{(i)\pm}} \right), & \text{если } \left(\zeta_{m,n}^{(i)\pm} \right)^2 = \left(\zeta_{m,l}^{(k)\pm} \right)^2, \\ 1, & \text{если } \zeta_{m,n}^{(i)\pm} = \zeta_{m,l}^{(k)\pm} = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Аналогично случаю цилиндрической геометрии, верификация реализованной процедуры описания процесса распространения звука в каналах с однородным потоком и неоднородным импедансом стенок в случае прямоугольной геометрии была проведена на основании сравнения решений, полученных с использованием реализованной процедуры, с решениями уравнения (2.1) с граничным условием (2.2), полученными с помощью МКЭ. Ранее полуаналитический метод в случае плоского канала уже был верифицирован с использованием аналитического решения задачи о распространении звука в плоском канале при наличии стыка облицовок, полученного с использованием метода Винера-Хопфа [103, 104].

Верификация реализованной процедуры для случая прямоугольного канала была проведена на задаче о падении звуковых мод на участок плоского канала (т.е. при значении параметра $j = 0$) длиной $L = 0.95$ метра и высотой $a = 4$ сантиметра. Параметры геометрии и потока в канале были выбраны таким образом, чтобы в большей степени соответствовать характеристикам рабочих режимов установки «Интерферометр с потоком» ФАУ «ЦАГИ», в областях с жесткими стенками которой при частотах $f < 4$ кГц реализуется одномодовый режим, то есть распространяющейся является только мода с $n = 0$ в (3.11). Область неоднородности в рассмотренных далее примерах характеризуется той же зависимостью адмиттанса от продольной координаты, что и в ранее рассмотренном случае цилиндрического канала, и определяемой соотношениями (3.7)-(3.8) с теми же значениями параметров b, z_1, z_2 , при которых график функции $f(z)$ имеет вид, представленный на рисунке 3.2.

Исходно заданное падающее звуковое поле одной звуковой моды с $n = 0$ слева на рассматриваемый участок имеет вид:

$$p_0(z) = A_1^{(0)} e^{ik_{z_1+}^0 z}, \quad (3.15)$$

где осевое волновое число $k_{z_1+}^0$ определяется из (3.13) и (3.12) при значении параметров $\beta = 0, \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = 0$, соответствующих абсолютно жесткой стенке, из чего следует $k_{z_1+}^0 = \frac{k}{1+M}$.

Двумерная расчетная область для решения поставленной задачи с использованием МКЭ представлена на рисунке 3.23. На границах расчетной области, аналогично ранее рассмотренному примеру цилиндрического канала, располагаются идеально согласованные слои для обеспечения условия отсутствия отражения.



Рисунок 3.23 – Схема расчетной области для проведения расчетов с использованием МКЭ в плоском канале

Для проведения расчетов использовалась неструктурированная сетка с размером элемента $d = 2$ миллиметра, то есть на минимальную длину волны в проведенных расчетах приходилось более 20 элементов. Расчетная сетка изображена на рисунке 3.24.



Рисунок 3.24 – Фрагмент сетки вблизи сечения задания исходной падающей моды для проведения расчетов с использованием МКЭ в плоском канале

Далее будут представлены результаты расчетов с использованием реализованной полуаналитической модели и с использованием МКЭ звукового поля в канале при падении на рассматриваемый участок канала звуковой моды на частоте $f = 2500$ Гц с амплитудой $A_0 = 1$ Па при числе Маха потока в канале

$M = 0.29$ (распространение исходного возмущения по потоку) при скорости звука $c_0 = 344.145$ м/с и значении $\beta_0 = 0.9836 - 0.8197i$.

Рассматриваемый участок канала в рамках расчетов с использованием полуаналитической модели был разбит на 220 секций, включая области с жесткой стенкой при $-0.1 \leq z < 0$ и $0.75 \leq z \leq 0.85$ (рисунок 3.2). Переходная область в пределах $0 \leq z < 0.15$ была разбита на 107 участков, а линейная переходная область $0.4 \leq z < 0.75$ была разбита на 110 участков. Для вычисления корней характеристического уравнения изначально рассматриваемый участок канала был разбит на 473 секции таким образом, чтобы модуль разности по абсолютной величине по адмиттансу между соседними участками не превышала 0.01:

$$\text{Max}_i(|\beta_i - \beta_{i+1}|) < 0.01, i = \overline{0, N-1}, \text{ по первой производной не превышала } 0.1:$$

$$\text{Max}_i \left(\left| \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)_i - \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)_{i+1} \right| \right) < 0.1, i = \overline{0, N-1}, \quad \text{а по второй} \quad - \quad 1:$$

$$\text{Max}_i \left(\left| \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right)_i - \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right)_{i+1} \right| \right) < 1, i = \overline{0, N-1}. \text{ После нахождения всех корней и}$$

вычисления осевых волновых чисел, аналогично рассмотренному ранее случаю цилиндрической геометрии, число секций разбиения было сокращено таким образом, чтобы модуль абсолютной разности по всем осевым волновым числам не

$$\text{превышал } 0.01 \quad 1/\text{м}: \quad \text{Max}_i \left(\text{Max}_n \left(|k_{z_i \pm}^{m,n} - k_{z_{i+1} \pm}^{m,n}| \right) \right) < 0.01, i = \overline{0, N-1}, n = \overline{0, N_{full}}, \quad \text{а}$$

количество учитываемых в процедуре не распространяющихся мод в представленных ниже примерах расчетов было выбрано равным 10. Как и ранее, параметры разбиения были подобраны эмпирически исходя из принципа баланса между точностью решения и быстродействием в полуаналитической процедуре расчета. На рисунке 3.25 представлена схема с обозначениями прямых $x = a = 4$ см, $x = 0.8a = 3.2$ см, $x = 0.5a = 2$ см вдоль оси канала, на которых в представленных далее графиках будут выведены данные.

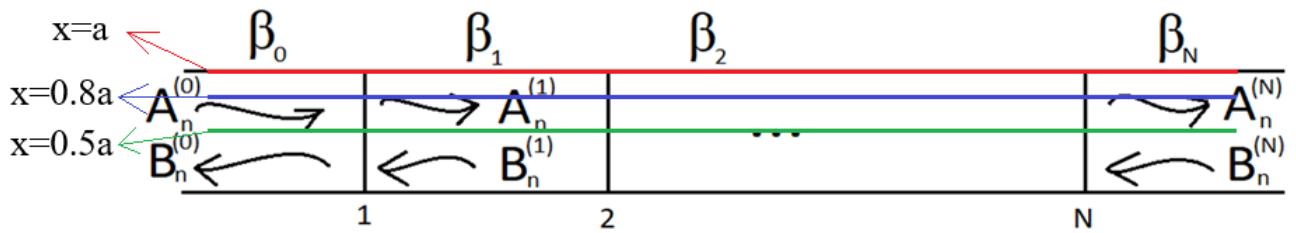


Рисунок 3.25 – Схема плоского канала с изображением прямых, на которых выводились данные расчетов

Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых (рисунок 3.25) в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры (отмечены префиксом «Т») и с использованием МКЭ (отмечены префиксом «С»), представлена на рисунке 3.26.

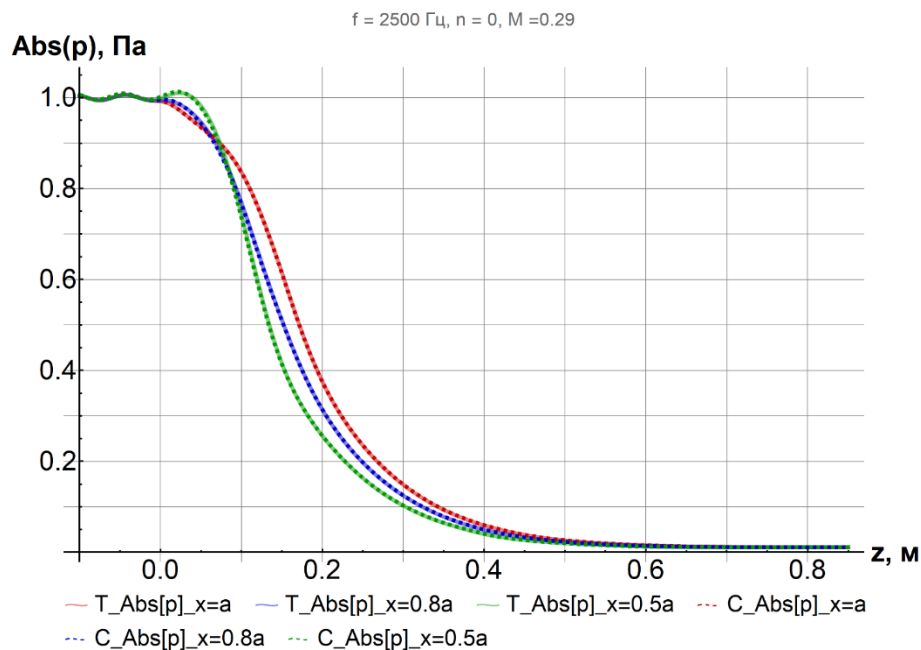


Рисунок 3.26 – Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500$ Гц с амплитудой $A_0 = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = 0.29$ при различных значениях координаты x , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с

использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.27.

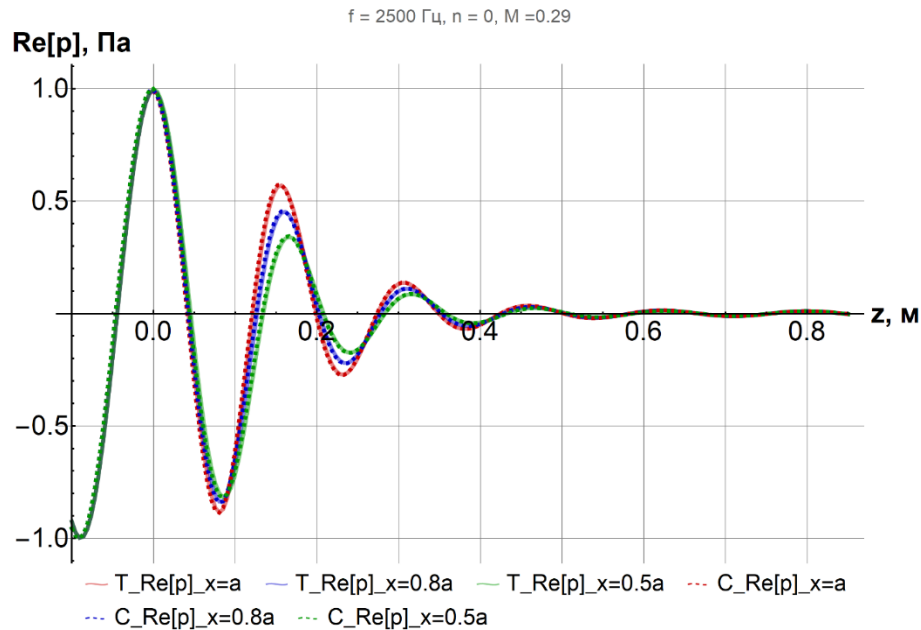


Рисунок 3.27 – Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500 \text{ Гц}$ с амплитудой $A_0 = 1 \text{ Па}$ при числе Маха потока в канале $M = 0.29$ при различных значениях координаты x , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.28.

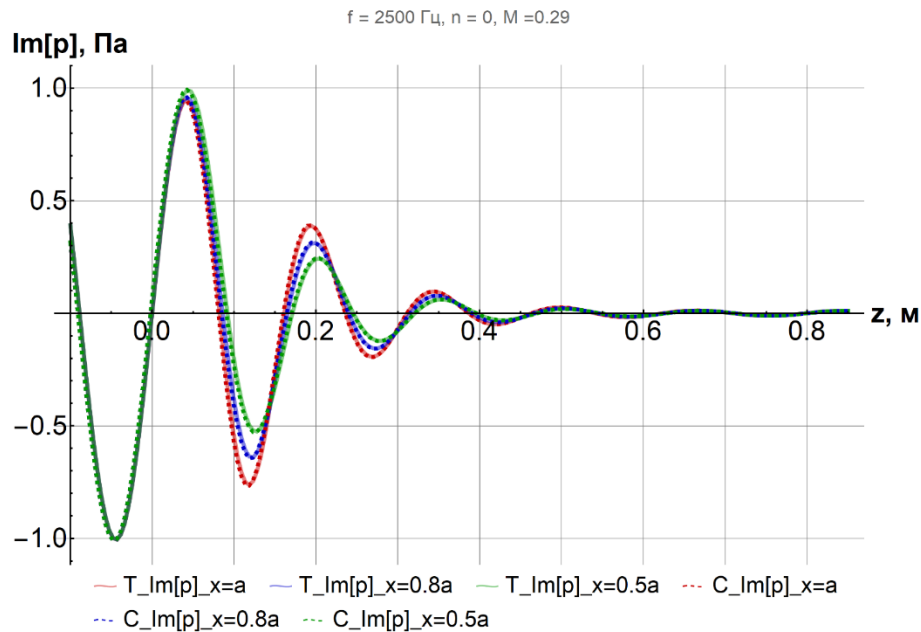


Рисунок 3.28 – Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500 \text{ Гц}$ с амплитудой $A_0 = 1 \text{ Па}$ при числе Маха потока в канале $M = 0.29$ при различных значениях координаты x , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Как видно из представленных на рисунках 3.26-3.28 графиков, в рассмотренном случае результаты, полученные с использованием реализованной полуаналитической процедуры соотносятся с результатами, полученными с использованием МКЭ, в равной степени во всей расчетной области, при этом абсолютная разность модулей звукового давления, представленных на рисунке 3.26, не превышает $3 \cdot 10^{-3} \text{ Па}$. Звуковое поле, полученное с использованием МКЭ в рассматриваемом случае, представлено на рисунке 3.29.

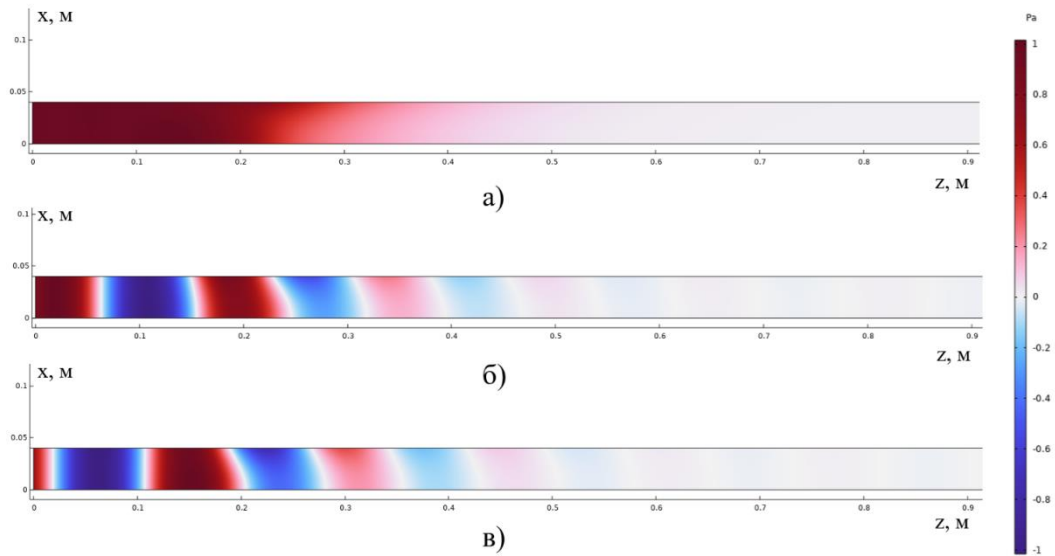


Рисунок 3.29 – Поле звукового давления при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500$ Гц с амплитудой $A_0 = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = 0.29$, полученные с использованием МКЭ: (а) – модуль; (б) – реальная часть; (в) – мнимая часть

В силу отсутствия особенностей в итоговом поле возмущений давления и участков в расчетной области, в которых разница между результатами двух используемых для расчетов методов превышала таковую во всей остальной расчетной области, можно предположить, что корни характеристического уравнения в рассматриваемом случае не проявляют тех особенностей поведения, которые проявляли в ранее рассмотренных примерах в случае цилиндрической геометрии при наличии потока в канале. На рисунке 3.30 представлены траектории движения первых пяти корней характеристического уравнения в рассматриваемом случае по мере увеличения продольной координаты, что подтверждает сделанное выше предположение: области, в которых первый корень уходит под разрез корня (2.31), достаточно малы, что в совокупности с относительно небольшой мнимой частью первого корня характеристического уравнения не приводит видимому эффекту локального усиления возмущения давления, наблюдаемому в приведенных ранее примерах.

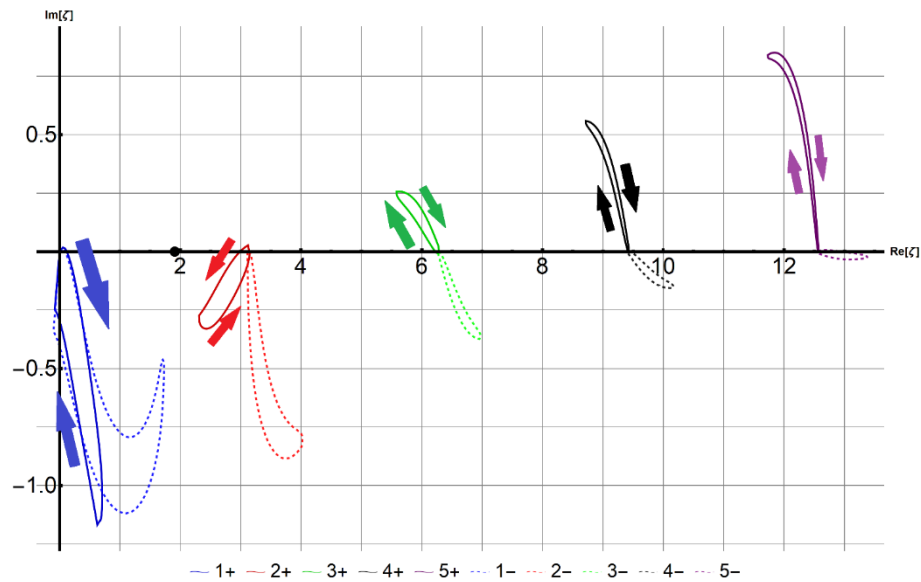


Рисунок 3.30 – Траектории движения корней характеристического уравнения под номерами 1, 2, 3, 4 и 5 по мере увеличения продольной координаты z при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500$ Гц с амплитудой $A_0 = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = 0.29$

Если же исходное возмущение распространяется в той же конфигурации и при тех же параметрах, но против потока (число Маха потока в канале $M = -0.29$), то наблюдаемая картина звукового поля претерпевает изменения. Результаты этих расчетов представлены ниже. В этом случае в полуаналитической модели рассматриваемый участок канала был разбит на 197 секций: переходная область в пределах $0 \leq z < 0.15$ была разбита на 106 секции, а линейная переходная область $0.4 \leq z < 0.75$ была разбита на 88 секций.

Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых (рисунок 3.25) в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.31.

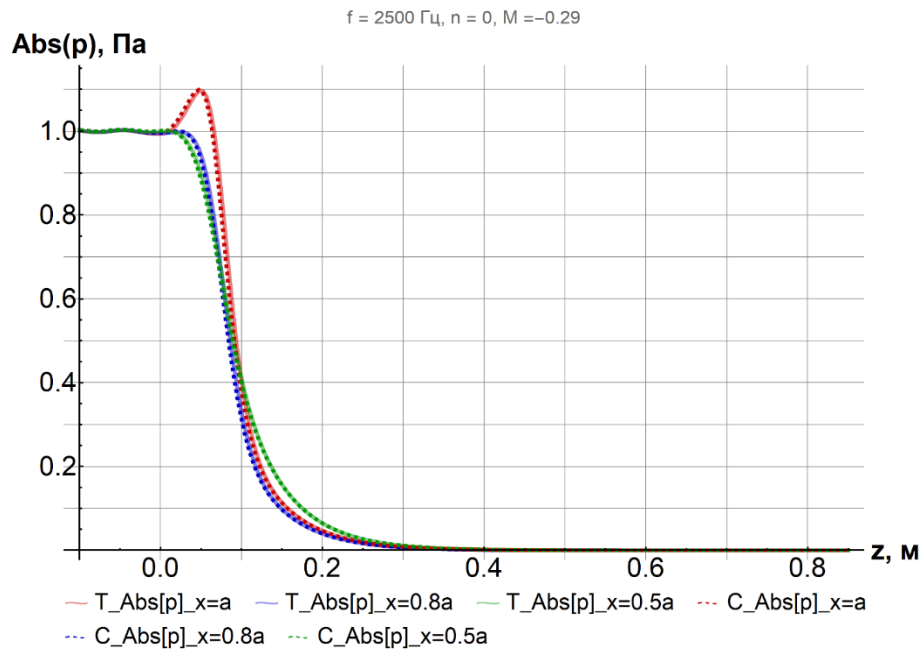


Рисунок 3.31 – Зависимость модуля звукового давления от продольной координаты при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500 \text{ Гц}$ с амплитудой $A_0 = 1 \text{ Па}$ при числе Маха потока в канале $M = -0.29$ при различных значениях координаты x , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.32.

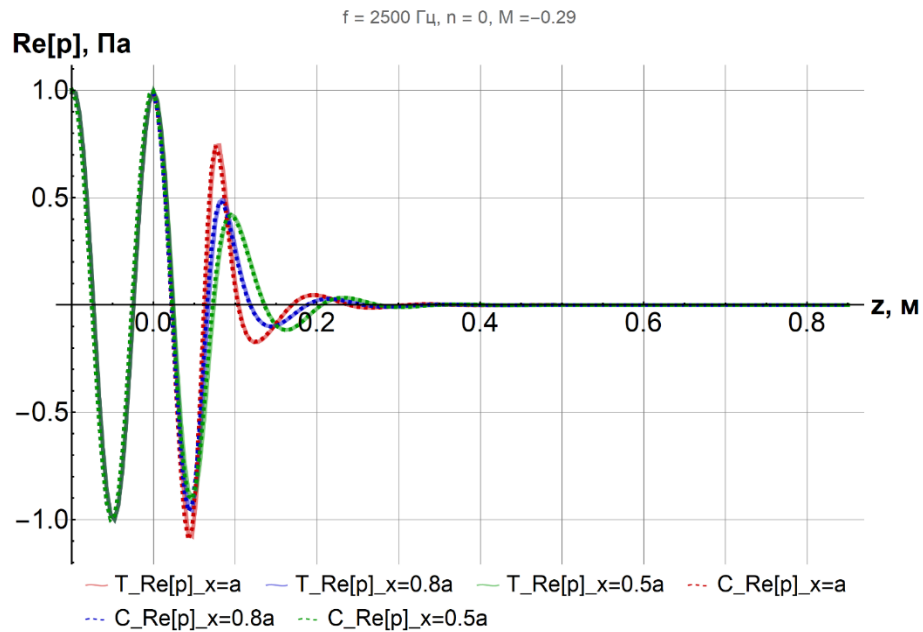


Рисунок 3.32 – Зависимость реальной части звукового давления от продольной координаты при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500 \text{ Гц}$ с амплитудой $A_0 = 1 \text{ Па}$ при числе Маха потока в канале $M = -0.29$ при различных значениях координаты x , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае, полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ, представлена на рисунке 3.33.

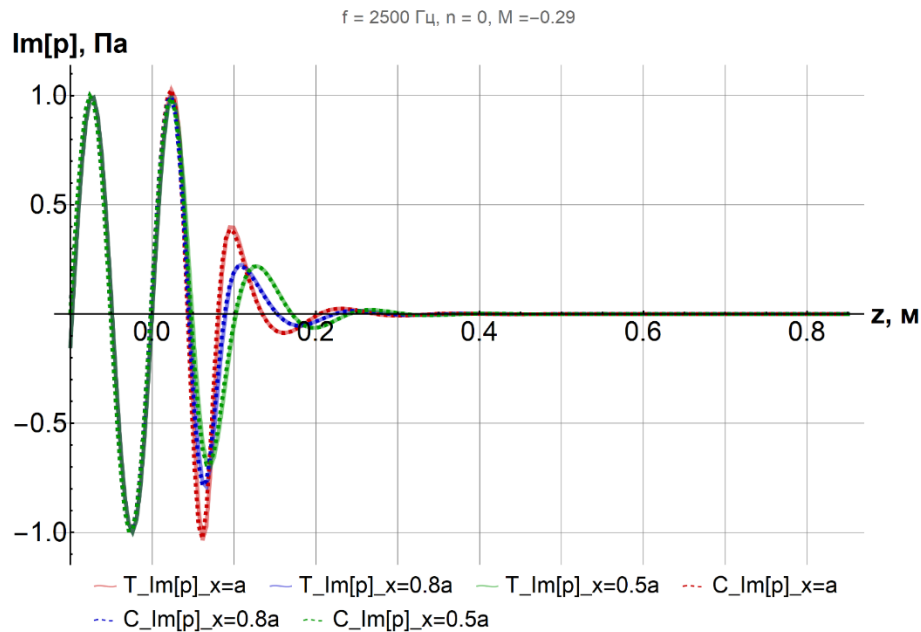


Рисунок 3.33 – Зависимость мнимой части звукового давления от продольной координаты при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500 \text{ Гц}$ с амплитудой $A_0 = 1 \text{ Па}$ при числе Маха потока в канале $M = -0.29$ при различных значениях координаты x , полученная с использованием реализованной полуаналитической процедуры и с использованием МКЭ

В данном примере, как видно из представленных на рисунках 3.31-3.33 графиков, в отличие от случая распространения исходного возмущения по потоку, на стенке имеет место эффект локального усиления звукового давления. При этом результаты, полученные с использованием реализованной полуаналитической процедуры, совпадают с результатами, полученными с использованием МКЭ в той же степени хорошо: абсолютная разность модулей звукового давления, представленных на рисунке 3.31, не превышает $2 \cdot 10^{-3} \text{ Па}$. Звуковое поле, полученное с использованием МКЭ в рассматриваемом случае, представлено на рисунке 3.34.

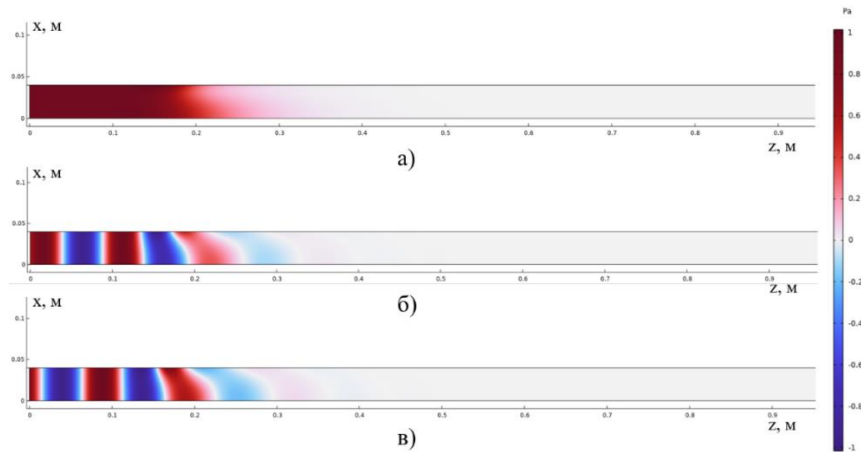


Рисунок 3.34 – Поле звукового давления при исходной поршневой моде на частоте $f = 2500$ Гц с амплитудой $A_0 = 1$ Па при числе Маха потока в канале $M = -0.29$, полученные с использованием МКЭ: (а) – модуль; (б) – реальная часть; (в) – мнимая часть

Траектория первого корня характеристического уравнения, представленная на рисунке 3.35, существенно отличается от таковой в случае распространения исходного возмущения по потоку, которая представлена 3.30: участок канала, на котором первый корень, соответствующий моде, распространяющейся вдоль оси канала, ушел под разрез корня (2.31) в I четверть, существенно больше: $0 \leq z \leq 0.0251$. Именно этот фактор и является определяющим в наблюдаемом эффекте локального усиления звукового давления на стенке.

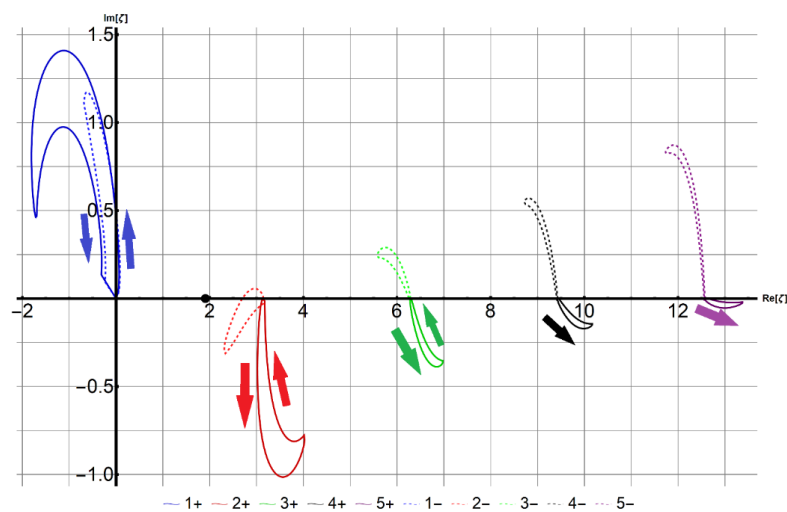


Рисунок 3.35 – Траектории движения корней характеристического уравнения под номерами 1-5 по мере увеличения продольной координаты z в рассматриваемом случае

3.3 Выводы к главе 3

- Реализованный в главе 2 в общем виде полуаналитический метод описания процесса распространения звука в каналах с потоком при наличии неоднородного вдоль оси канала адмиттанса стенки применен в частных случаях каналов цилиндрической и прямоугольной геометрии. Все основные соотношения приведены в рассмотренных частных случаях.
- Проведена верификация реализованной полуаналитической процедуры на основании сравнения с решением задачи о распространении звука в каналах с потоком с использованием численного метода конечных элементов в рассмотренных случаях цилиндрической и прямоугольной геометрии. Представлены параметры полуаналитической модели, позволяющие сохранить баланс между точностью расчета и быстродействием процедуры.
- Проведен анализ полученных в расчетах результатов с использованием возможностей полуаналитической модели: возникающий при определенных обстоятельствах эффект локального усиления звукового давления на стенке, наблюдаемый как в случае цилиндрического, так и в случае прямоугольного канала, объяснен особенностями поведения корней характеристического уравнения в комплексной плоскости.

Глава 4. Разработка итерационного полуаналитического метода расчета процесса распространения линейных волн в цилиндрическом и прямоугольном каналах с однородным потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК

4.1 Разработка итерационной процедуры

Итерационная процедура решения задачи о распространении звука в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК была построена на основе изложенной в главах 2-3 настоящей работы полуаналитической модели описания процесса распространения линейных волн в каналах с потоком при наличии неоднородного вдоль оси канала адмиттанса стенки. Ранее с использованием итерационной процедуры была решена задача о распространении звуковых волн в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК при условии слабого изменения импеданса вдоль оси канала, то есть малости изменения на масштабе длины волны [113]. Связано это ограничение было с тем, что в качестве модели распространения звука в канале с неоднородным импедансом стенки использовалось асимптотическое решение для плавно неоднородного канала с потоком, основанное на ВКБ-приближении, полученное А.Ф. Гладенко [133]. Предположение о плавности изменения импеданса вдоль оси канала, в рамках которых было получено это асимптотическое решение, накладывало жесткое ограничение на всю сформулированную процедуру в целом, в силу чего диапазон параметров, в рамках которых возможно ее использование, был сильно ограничен. Реализованная же полуаналитическая модель лишена этого недостатка, так как не имеет явного ограничения на скорость изменения импеданса, что было подтверждено в рамках верификационных расчетов, проведенных в главе 3 настоящей работы для каналов цилиндрической и прямоугольной геометрии поперечного сечения. Таким образом, реализованная с использованием полуаналитической модели описания процесса распространения

звука итерационная процедура решения нелинейной задачи не имеет ограничений в области применимости и может быть использована во всем интересующем диапазоне частот.

Схема итерационной процедуры приведена на рисунке 4.1. Рассматривается задача, поставленная в пункте 2 главы 1 при условии наличия облицовки с заданной зависимостью адмиттанса от уровня звукового давления $\beta = \beta(L)$ на участке $0 \leq z \leq l$ и известного падающего на рассматриваемый участок звукового поля. Первые три шага являются предварительными и служат для определения начальных параметров для итерационной процедуры. На первом шаге в стартовом сечении канала с облицовкой задается уровень звукового давления L_{start} , определяемый начальными условиями, и по нему с использованием заданной зависимости адмиттанса от уровня звукового давления определяется начальный адмиттанс $\beta_0 = \beta_0(L_{start})$, использующийся в дальнейшем для определения собственных мод в стартовом сечении.

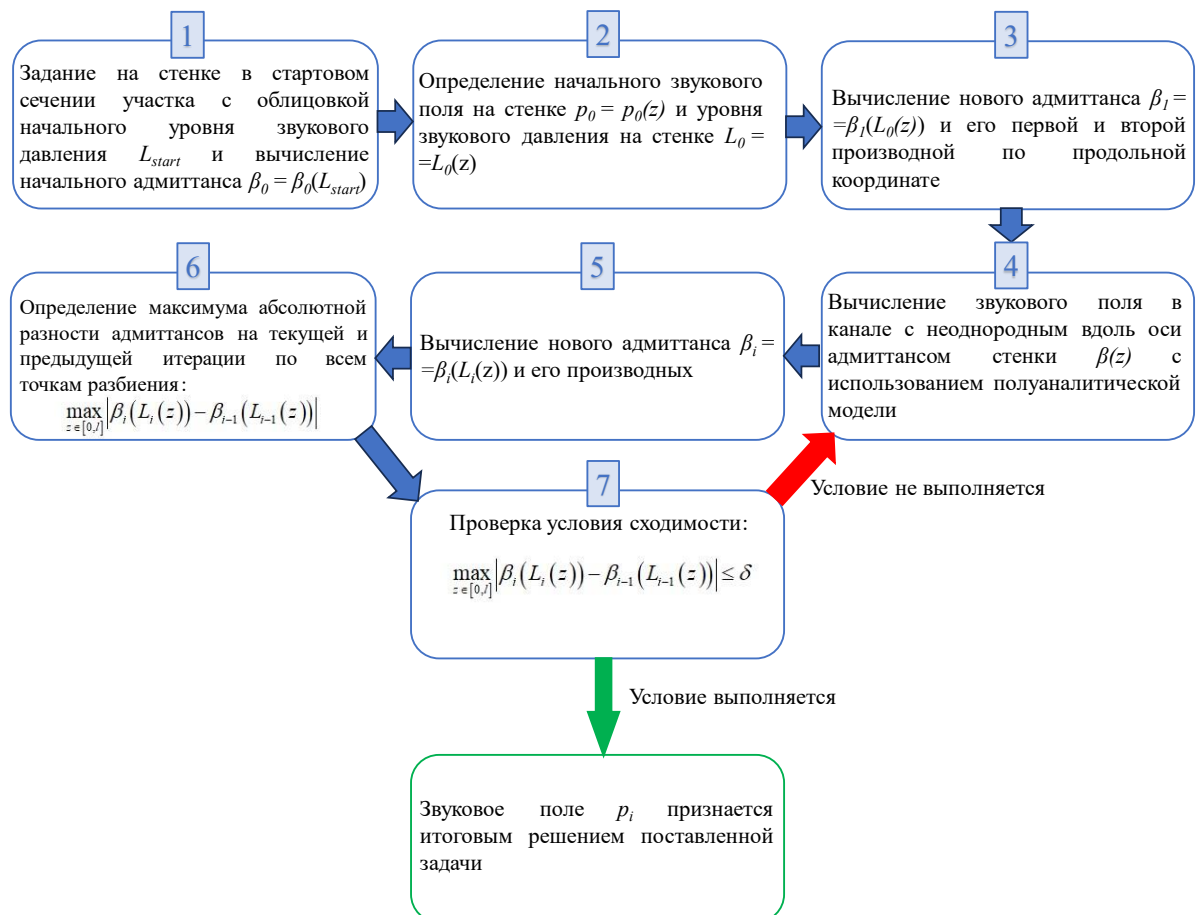


Рисунок 4.1 – Схема итерационной процедуры решения нелинейной задачи

На втором шаге итерационной процедуры определяется начальное звуковое поле в канале. Оно представляет собой заданную собственную моду или суперпозицию собственных мод, определяемых путем решения характеристического уравнения ((3.3) для цилиндрического канала и (3.12) для прямоугольного) с адмиттансом β_0 , определенным на первом шаге. Таким образом на данном этапе предполагается, что адмиттанс в канале однородный. По определенному звуковому полю вычисляется уровень звукового давления на стенке $L_0 = L_0(z)$.

На третьем шаге итерационной процедуры по определенному на предыдущем шаге уровню звукового давления на стенке $L_0(z)$ определяется новое распределение адмиттанса по продольной координате $\beta_1 = \beta_1(L_0(z))$ и его первая и вторая производные.

С четвертого шага начинается основная часть итерационного алгоритма. По имеющейся на данном этапе зависимости адмиттанса от продольной координаты $\beta = \beta(z)$ с помощью описанной в главах 2-3 полуаналитической модели производится вычисление звукового поля на исследуемом участке канала. Зависимость $\beta(z)$ при этом определяется из шага 3, если это первая итерация, или из предыдущей итерации $i-1$, если это итерация под номером i . По определенному звуковому полю $p_i(\vec{r})$ определяется уровень звукового давления на стенке на текущей итерации $L_i(z)$.

На пятом шаге производится расчет нового распределения адмиттанса по продольной координате $\beta_i(z)$ по определенному на шаге 4 уровню звукового давления на стенке на текущей итерации $L_i(z)$.

На шестом шаге определяется максимум модуля разности между адмиттансом, определенным на текущей итерации и адмиттансом, определенным на предыдущей итерации, на всем исследуемом участке канала:

$\max_{z \in [0; l]} \left(\left| \beta_i(L_i(z)) - \beta_{i-1}(L_{i-1}(z)) \right| \right)$. Критерием сходимости итерационной процедуры является значение этого параметра меньше некоторой заданной малой δ .

Заключительный седьмой шаг – проверка критерия сходимости итерационной процедуры: если для вычисленного на шаге 6 максимума модуля разности между адмиттансами на текущей и предыдущей итерации выполняется условие $\max_{z \in [0; l]} \left(\left| \beta_i(L_i(z)) - \beta_{i-1}(L_{i-1}(z)) \right| \right) < \delta$, то звуковое поле $p_i(\vec{r})$, определенное на текущей итерации, признается итоговым решением поставленной нелинейной задачи. Если же условие не выполняется, то алгоритм возвращается к шагу 4 с определенным на текущей итерации распределения адмиттанса по продольной координате $\beta_i(z)$. Практическое применение итерационного алгоритма при различных значениях параметров и для различных геометрий поперечного сечения каналов продемонстрировало сходимость в среднем за 6 итераций.

4.2 Применение разработанной процедуры в случае цилиндрического канала

Примеры использования разработанного итерационного алгоритма для решения задачи о распространении звука в однородном цилиндрическом канале с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК были получены в конфигурации, схема которой представлена на рисунке 4.2.

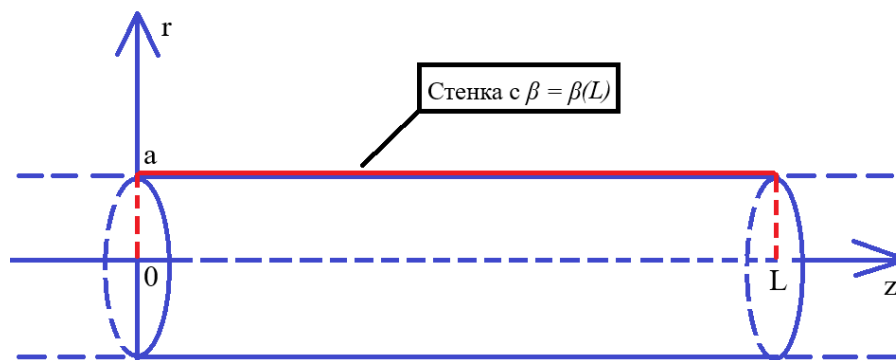


Рисунок 4.2 – Схема цилиндрического канала с участком стенки, характеризующимся нелинейным адмиттансом

В рассматриваемой конфигурации радиус канала $a=1$ метр, а участок стенки, характеризующийся нелинейным адмиттансом, располагается в пределах $0 \leq z \leq L$ при значении $L=1$ метр. На стенке в сечении $z=0$ задается начальный уровень звукового давления $L_{start}=150$ дБ, а исходное звуковое возмущение, падающее на рассматриваемый участок слева, представляет собой одну или несколько собственных мод с определенными азимутальными и радиальными числами m и n , определяемыми (3.9) и соответствующими корням характеристического уравнения (3.3) с $\beta_0 = \beta_0(L_{start})$.

Для вычисления зависимости адмиттанса двуслойных сотовых ЗПК от уровня звукового давления был использован описанный в главе 1 метод А.Ф. Соболева, в основе которого лежит полуэмпирическая модель А.Ф. Соболева импеданса однослойных сотовых ЗПК [32]. В модели были использованы следующие значения параметров:

- $h_1 = 7 \cdot 10^{-3}$ м – глубина ячейки первого слоя ЗПК;
- $h_2 = 8 \cdot 10^{-3}$ м – глубина ячейки второго слоя ЗПК;
- $t_1 = 1.3 \cdot 10^{-3}$ м – толщина панели первого слоя;
- $t_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ м – толщина панели второго слоя;
- $d_1 = 1.6 \cdot 10^{-3}$ м – диаметр отверстий в первом слое;
- $d_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$ м – диаметр отверстий во втором слое;
- $F_1 = 9\%$ – процент перфорации первого слоя;
- $F_2 = 3\%$ – процент перфорации второго слоя;
- $C_{v1} = 0.15$ – коэффициент, зависящий от параметров пограничного слоя, первый слой;
- $C_{d1} = 0.77$ – коэффициент расхода через отверстие, первый слой;
- $C_{v2} = 0$ – коэффициент, зависящий от параметров пограничного слоя, второй слой;
- $C_{d2} = 0.81$ – коэффициент расхода через отверстие, второй слой;

- $\delta_l = 0.65d$ – концевая поправка.

При таких значениях параметров зависимость импеданса от частоты при различных уровнях звукового давления на поверхности облицовки и числе Маха потока в канале $M = 0.6$, что является характерной величиной для каналов авиационных двигателей, представлена на рисунке 4.3.

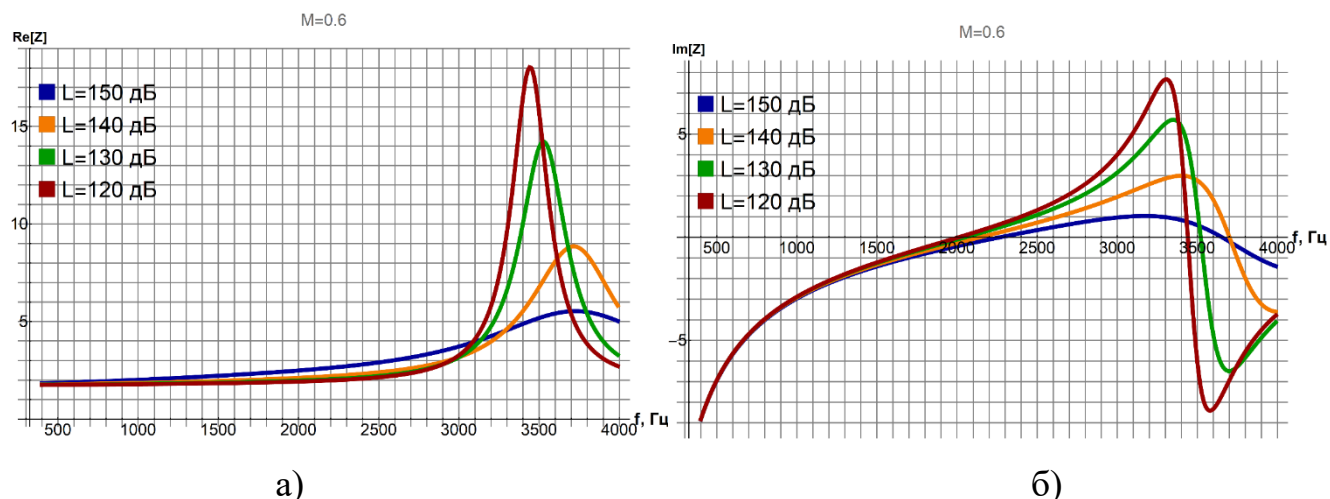


Рисунок 4.3 – Зависимость импеданса от частоты при различных уровнях звукового давления на поверхности облицовки двухслойной ЗПК при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ согласно полуэмпирической модели А.Ф. Соболева: (а) – реальная часть; (б) – мнимая часть

Данные в примерах расчетов, представленных ниже, аналогично примерам, приведенным при верификации полуаналитической модели, выведены на прямых $R = a = 1$ м, $R = 0.95$ м, $R = 0.9$ м вдоль оси канала, изображенных схематически на рисунке 3.5.

Зависимость уровня звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ и падающей звуковой моде на частоте $f = 3400$ Гц с азимутальным и радиальным числами $m = 47, n = 1$ (распространение исходного возмущения по потоку), полученная с использованием итерационного алгоритма, представлена на рисунке 4.4 совместно с линейным решением, которое получается на шаге 2 итерационной процедуры. Здесь и далее сплошными кривыми будут изображаться результаты линейного решения, получаемого на шаге 2

итерационной процедуры (в подписи к графикам отмечены индексом «0»), а штриховым кривыми – данные, полученные с использованием итерационного алгоритма решения нелинейной задачи (в подписи к графикам не имеют индекса). Аналогичным образом в целях оценки учета влияния нелинейного эффекта на рисунке 4.5 представлена зависимость адмиттанса от продольной координаты в рассматриваемом случае в сравнении с адмиттансом, полученным на первом шаге итерационной процедуры.

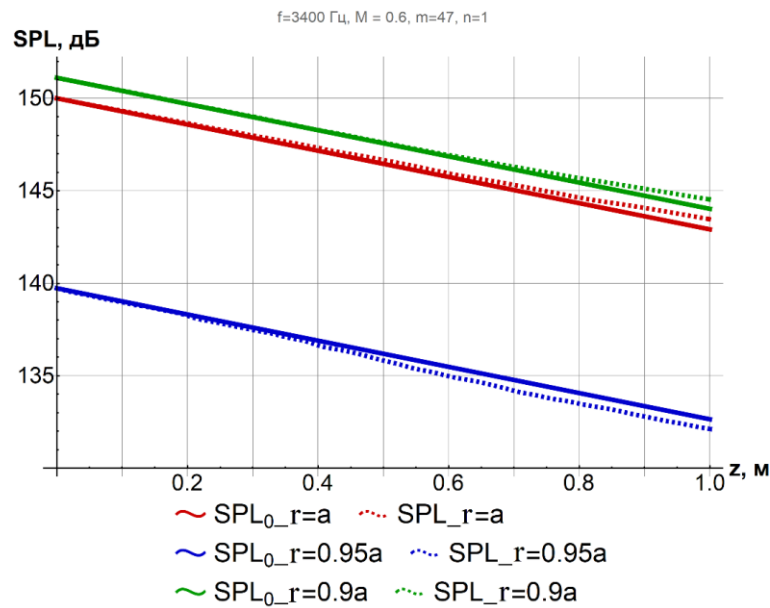


Рисунок 4.4 – Зависимость уровня звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m=47$, $n=1$ на частоте $f=3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start}=150$ дБ при числе Маха потока в канале $M=0.6$ при различных значениях координаты r , полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с линейным решением

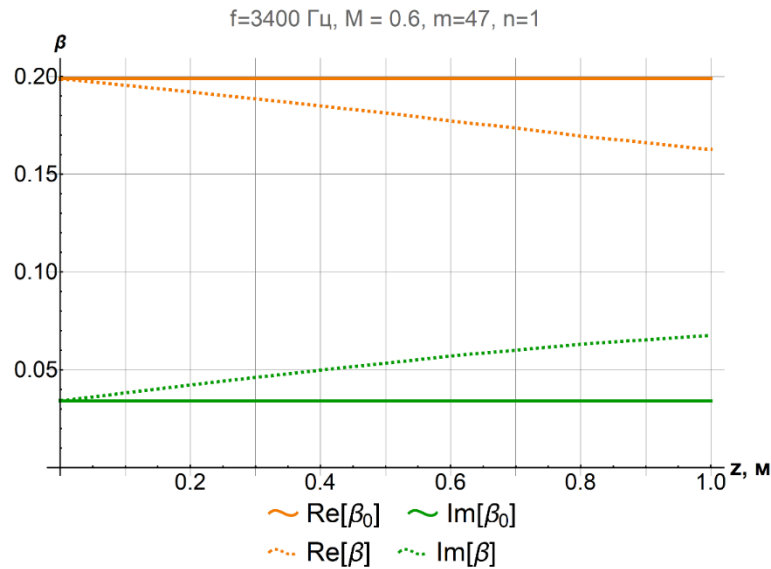


Рисунок 4.5 – Зависимость адмиттанса от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 47$, $n = 1$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = 0.6$, полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с изначальным адмиттансом

Рассмотренный пример, как видно из рисунка 4.4, демонстрирует достаточно слабое проявление нелинейного эффекта: к концу рассматриваемого участка разница в уровнях звукового давления на стенке между линейным и нелинейным решением не превышает 1 дБ, при этом изменение адмиттанса, как видно из рисунка 4.5, к концу участка составляет порядка 20% по действительной части. Однако при изменении направления потока в канале на противоположное в той же конфигурации нелинейный эффект проявляется более интенсивно. Зависимость уровня звукового давления и адмиттанса от продольной координаты в этом случае представлены на рисунках 4.6-4.7.

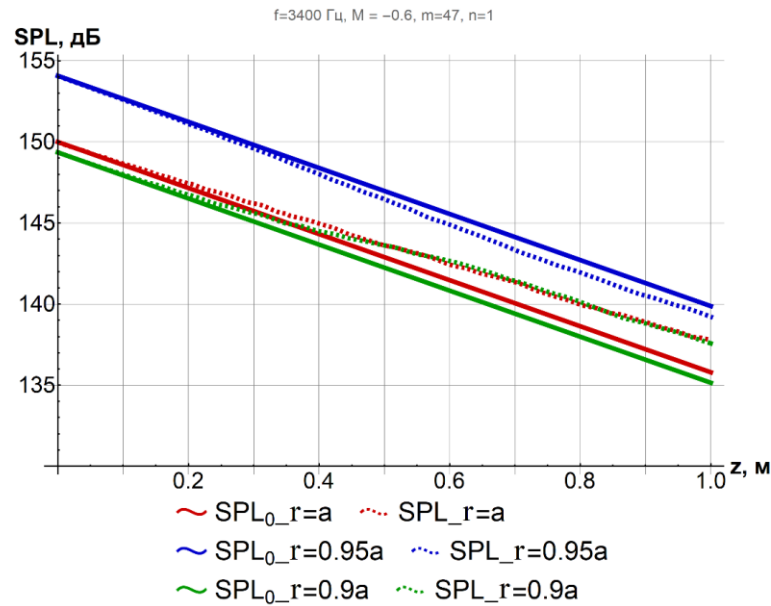


Рисунок 4.6 – Зависимость уровня звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 47$, $n = 1$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = -0.6$ при различных значениях координаты r , полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с линейным решением

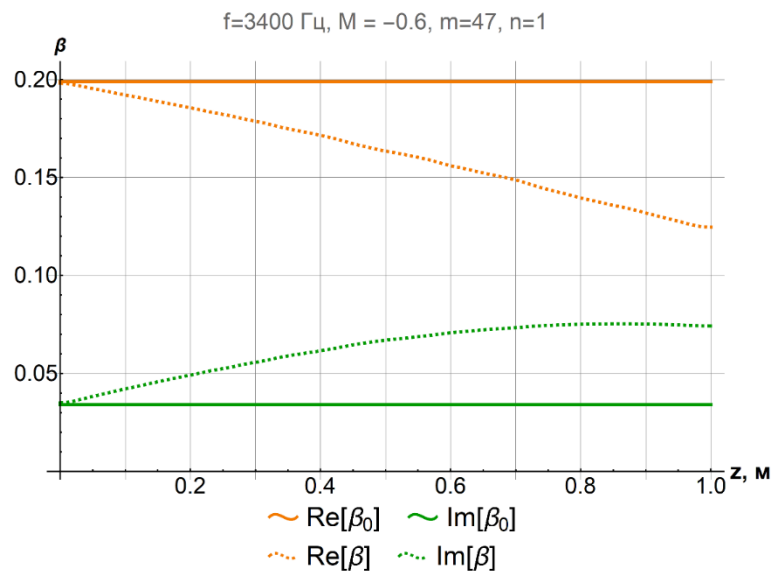


Рисунок 4.7 – Зависимость адмиттанса от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 47$, $n = 1$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = -0.6$, полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с изначальным адмиттансом

В данном случае учет нелинейного эффекта приводит к уменьшению затухания отдельной звуковой моды на величину около 2 дБ на метр облицовки на стенке канала, при этом изменение адмиттанса в сравнении с распространением исходного возмущения по потоку является куда более существенным.

Важно отметить одну наблюдаемую особенность: нелинейный эффект проявляется тем более интенсивно, чем больше затухание исходного возмущения в линейном случае. Это достаточно очевидный факт, являющийся следствием зависимости импеданса от уровня звукового давления. В рассмотренных примерах при распространении исходного возмущения по потоку линейное решение продемонстрировало падение уровня звукового давления на стенке на 7 дБ на рассматриваемом участке, в то время как при распространении против потока – 14 дБ. Именно этим и объясняется куда более существенное изменение адмиттанса при учете нелинейного эффекта в случае при распространении исходного возмущения против потока в сравнении со случаем по потоку (графики на рисунках 4.7 и 4.5 соответственно), и, как следствие, изменение звукового поля. Еще одним важным фактором является близость исходного возмущения к условию отсечки. Хорошо известно, что чем ближе исходное возмущение к условию отсечки, тем лучше оно затухает по мере распространения по каналу с импедансной стенкой [2]. В рассмотренных примерах при азимутальном числе $m = 47$ последней распространяющейся модой является мода с $n = 5$, однако в той же конфигурации, но при отсутствии потока, последней распространяющейся модой является мода с $n = 2$, из чего следует, что в этом случае учет нелинейного эффекта окажет куда более существенное влияние на итоговое решение по сравнению с двумя предыдущими примерами. Результаты этого расчета представлены на рисунках 4.8-4.9.

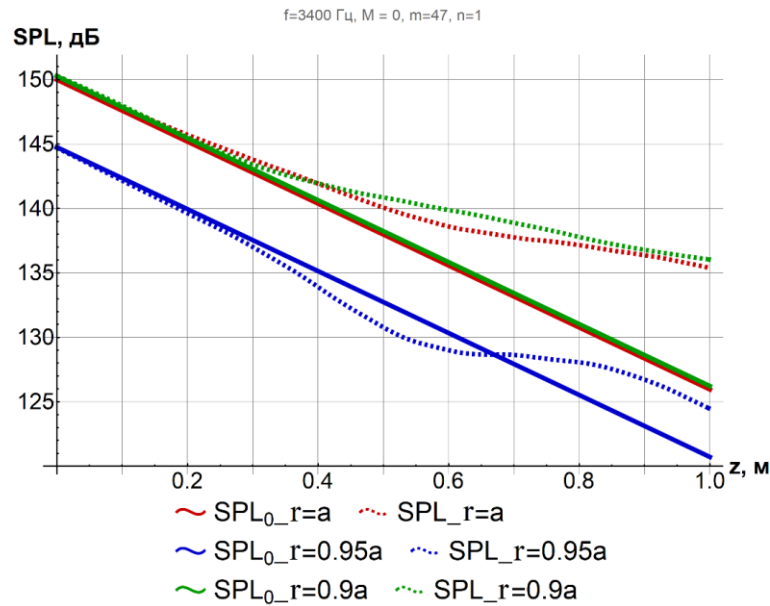


Рисунок 4.8 – Зависимость уровня звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 47$, $n = 1$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при отсутствии потока в канале при различных значениях координаты r , полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с линейным решением

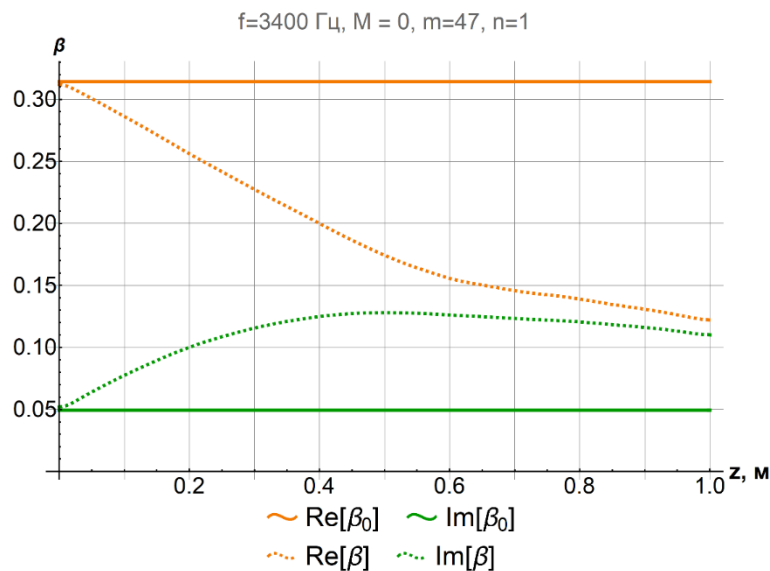


Рисунок 4.9 – Зависимость адмиттанса от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 47$, $n = 1$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при отсутствии потока в канале, полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с изначальным адмиттансом

Приведенные на рисунках 4.8-4.9 графики подтверждают ранее сделанное предположение: учет нелинейного эффекта в рассмотренном случае привел к тому, что затухание исходного возмущения на стенке уменьшилось на величину порядка 10 дБ на метр облицовки, при этом итоговый адмиттанс претерпел значительные изменения по сравнению с ранее рассмотренными случаями.

Для полноты описания исследуемого эффекта ниже будут приведены результаты расчета уровня звукового давления на стенке и адмиттанса в той же конфигурации, но при распространении ранее упомянутого исходного возмущения с $m = 47, n = 5$ как по потоку, так и против потока.

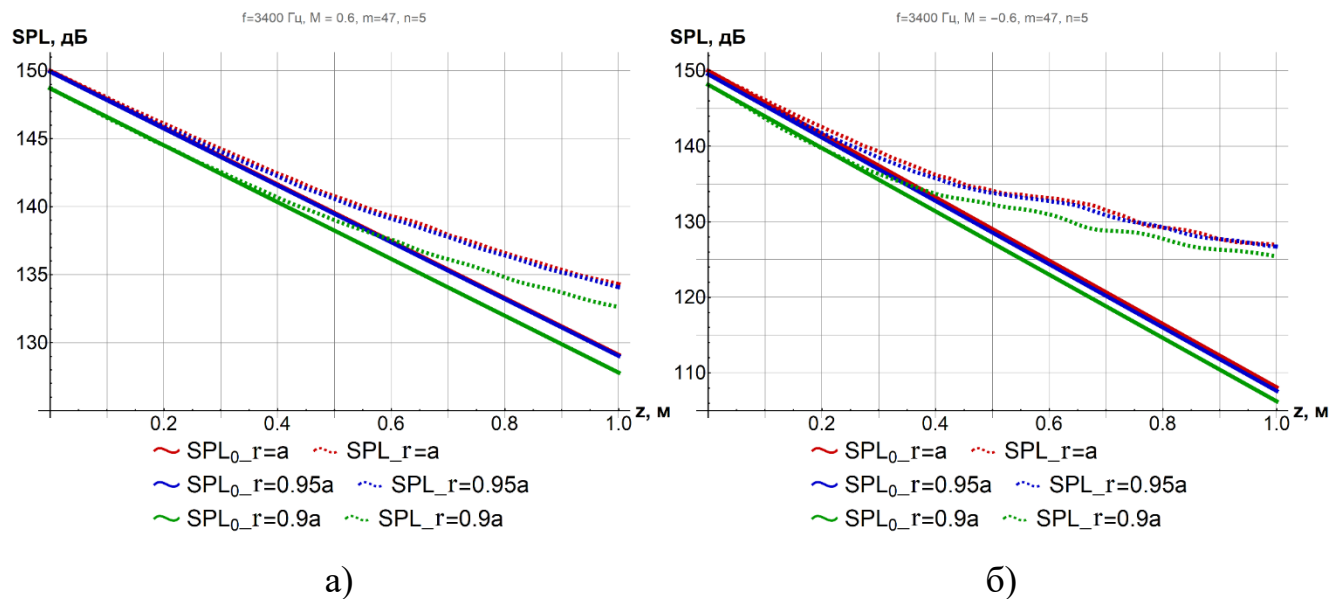


Рисунок 4.10 – Зависимость уровня звукового давления от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 47, n = 5$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ (а) и $M = -0.6$ (б) при различных значениях координаты r , полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с линейным решением

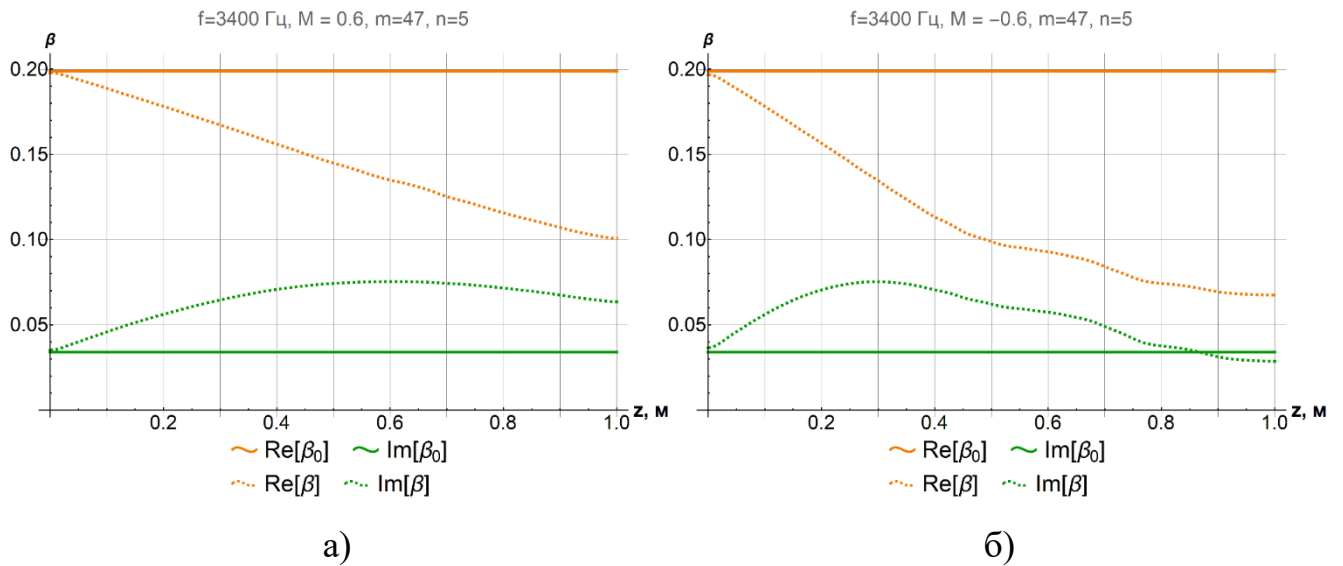


Рисунок 4.11 – Зависимость адмиттанса от продольной координаты при исходной звуковой моде с $m = 47, n = 5$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ (а) и $M = -0.6$ (б), полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с изначальным адмиттансом

Как видно из представленных на рисунках 4.10-4.11 примеров, нелинейный эффект для моды с $m = 47, n = 5$ проявляется куда более интенсивно по сравнению с модой с $m = 47, n = 1$. При этом, как и в ранее рассмотренных примерах, учет влияния нелинейного эффекта привел к уменьшению затухания исходного возмущения, распространяющегося против потока, в куда большей степени по сравнению с этим же возмущением, распространяющимся по потоку: 18 дБ на стенке на метр облицовки в случае против потока и 5 дБ в случае по потоку. Эта особенность особенно важна с практической точки зрения, так как звук в каналах воздухозаборников авиационных двигателей распространяется против потока.

В представленных выше примерах в качестве исходного возмущения рассматривалась одна мода с определенными азимутальным и радиальным числами, однако на практике в каналах авиационных двигателей реализуется многомодовый режим и импеданс ЗПК определяется общим уровнем звукового давления OASPL. Важным преимуществом разработанного полуаналитического итерационного алгоритма является то, что в качестве исходного возмущения могут

рассматриваться не только отдельные моды, но и любые их комбинации, причем потребное время расчета не зависит от количества исходных радиальных мод при фиксированном азимутальном числе. В качестве примера такого расчета рассмотрим ту же конфигурацию задачи, но при условии, что исходное возмущение – суперпозиция всех распространяющихся при данном $m = 47$ радиальных мод с $n = \overline{0,5}$ с такими равными амплитудами, что начальный уровень звукового давления на стенке остается равным 150 дБ. Результаты этих расчетов при распространении исходного возмущения как по потоку, так и против, представлены на рисунках 4.12-4.13.

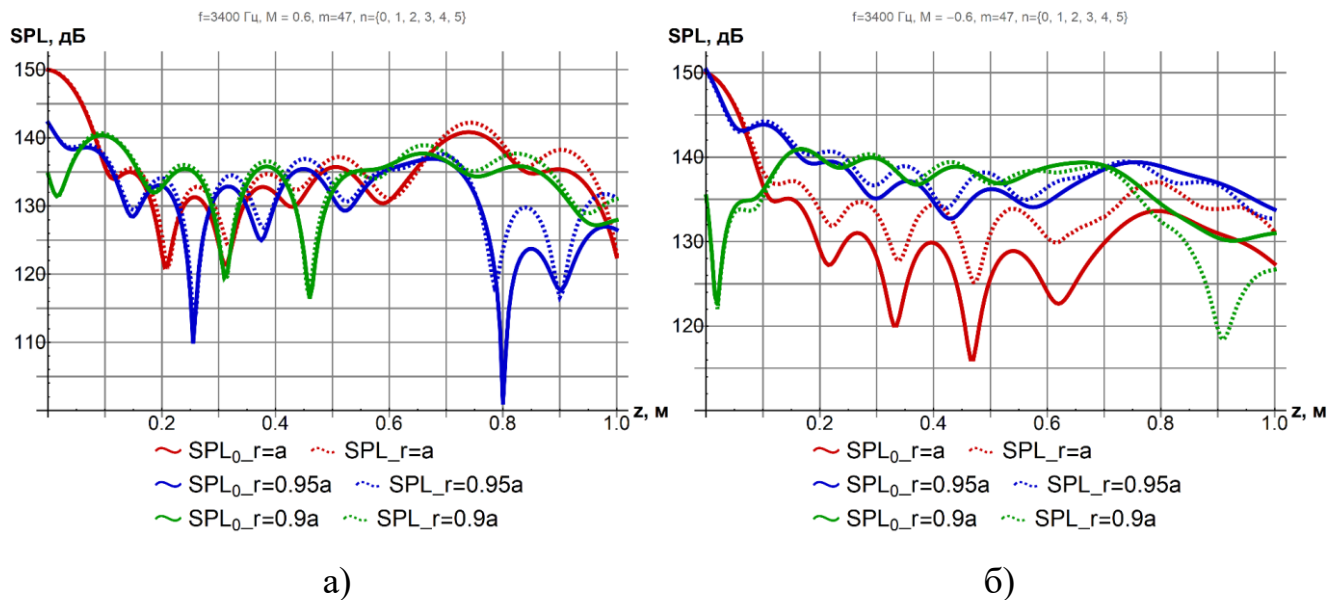


Рисунок 4.12 – Зависимость уровня звукового давления от продольной координаты при исходных равно распределённых по амплитудам звуковых модах с $m = 47, n = \overline{0,5}$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ (а) и $M = -0.6$ (б) при различных значениях координаты r , полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с линейным решением

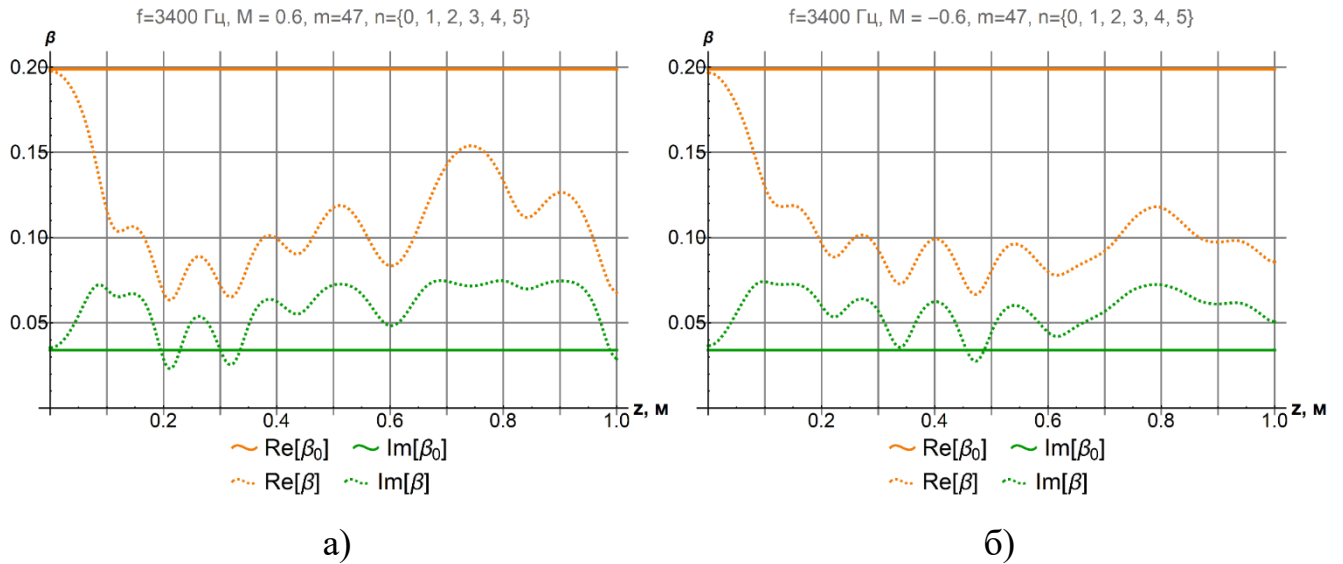


Рисунок 4.13 – Зависимость адмиттанса от продольной координаты при исходных равно распределённых по амплитудам звуковых модах с $m = 47, n = \overline{0,5}$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = 0.6$ (а) и $M = -0.6$ (б), полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с изначальным адмиттансом

Как видно из рисунка 4.12, в случае падения на рассматриваемый участок с нелинейной зависимостью адмиттанса от уровня звукового давления суперпозиции звуковых мод сохраняется особенность, обнаруженная при анализе результатов падения единичных мод: нелинейный эффект проявляется более интенсивно в случае распространения исходного возмущения против направления потока в сравнении со случаем распространения по потоку. В рассматриваемом примере уровень звукового давления на стенке при учете нелинейного эффекта отличается от линейного решения в среднем на 5 дБ практически на всем рассматриваемом участке, что является весьма существенной поправкой. Таким образом разработанный метод позволяет проводить расчеты при условии падения на рассматриваемый участок канала суперпозиции звуковых мод, что существенно экономит потребное время для расчетов и позволяет определять импеданс с учетом общего уровня звукового давления.

4.3 Применение разработанной процедуры в случае прямоугольного канала

Для случая прямоугольного канала с потоком расчеты с использованием разработанного итерационного алгоритма для решения задачи о распространении звука с учетом нелинейного режима работы ЗПК были проведены в плоской конфигурации, схема которой представлена на рисунке 4.14.

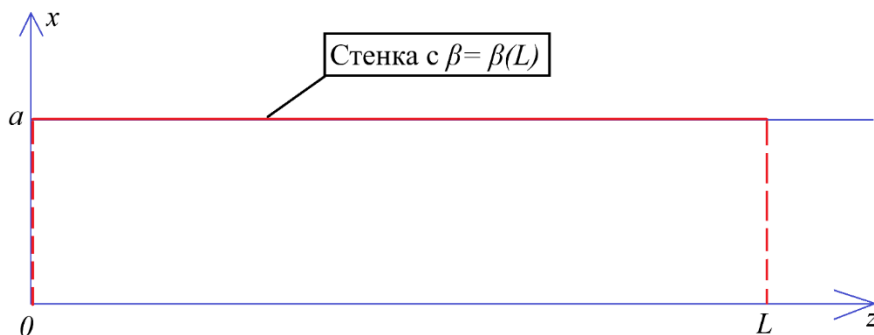


Рисунок 4.14 – Схема плоского канала с участком стенки, характеризующимся нелинейным адмиттансом

В рассматриваемой конфигурации, аналогично примерам, на которых проводилась верификация полуаналитической модели, высота канала $a = 4$ сантиметра, а участок стенки, характеризующийся нелинейным адмиттансом, располагается в пределах $0 \leq z \leq L$ при значении $L = 1$ метр. На стенке в сечении $z = 0$ задавался начальный уровень звукового давления $L_{start} = 150$ дБ, а исходное звуковое возмущение, падающее на рассматриваемый участок слева, представляло собой единственную распространяющуюся собственную моду, соответствующую первому корню характеристического уравнения (3.12) с $\beta_0 = \beta_0(L_{start})$. Как и ранее, такая конфигурация выбрана с целью соответствия параметрам установки «Интерферометр с потоком» ФАУ ЦАГИ.

Аналогично рассмотренному ранее случаю цилиндрического канала, для вычисления зависимости адмиттанса двуслойных сотовых ЗПК от уровня

звукового давления был использован описанный в главе 1 метод А.Ф. Соболева с приведенными ранее параметрами.

При таких значениях параметров зависимость импеданса от частоты при различных уровнях звукового давления на поверхности облицовки и числе Маха потока в канале $M = 0.29$, что является характерной величиной одного из рабочих режимов установки «Интерферометр с потоком», представлена на рисунке 4.15.

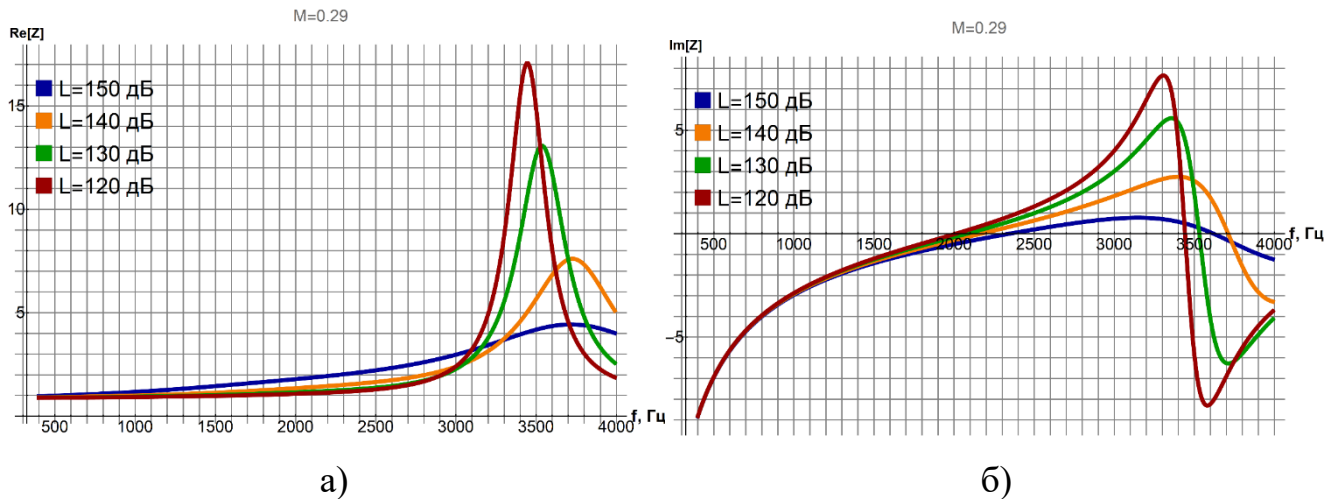


Рисунок 4.15 – Зависимость импеданса от частоты при различных уровнях звукового давления на поверхности облицовки двухслойной ЗПК при числе Маха потока в канале $M = 0.29$ согласно полуэмпирической модели А.Ф. Соболева: (а) – реальная часть; (б) – мнимая часть

Данные в примерах расчетов, представленных ниже, аналогично примерам, приведенным при верификации полуаналитической модели, выведены на прямых $x = a = 4$ см, $x = 0.8a = 3.2$ см, $x = 0.5a = 2$ см вдоль оси канала, изображенных схематически на рисунке 3.25.

Зависимости уровня звукового давления от продольной координаты на обозначенных прямых в канале в рассматриваемом случае при числе Маха потока в канале $M = 0.29$ и $M = -0.29$ при падающей звуковой моде на частоте $f = 3400$ Гц с $n = 0$ (распространение исходного возмущения по потоку и против потока соответственно), полученные с использованием итерационного алгоритма, представлены на рисунке 4.16 совместно с линейными решениями, которые получается на шаге 2 итерационной процедуры. На рисунке 4.17 представлена

зависимость адмиттанса от продольной координаты в рассматриваемых случаях в сравнении с адмиттансом, полученным на первом шаге итерационной процедуры.

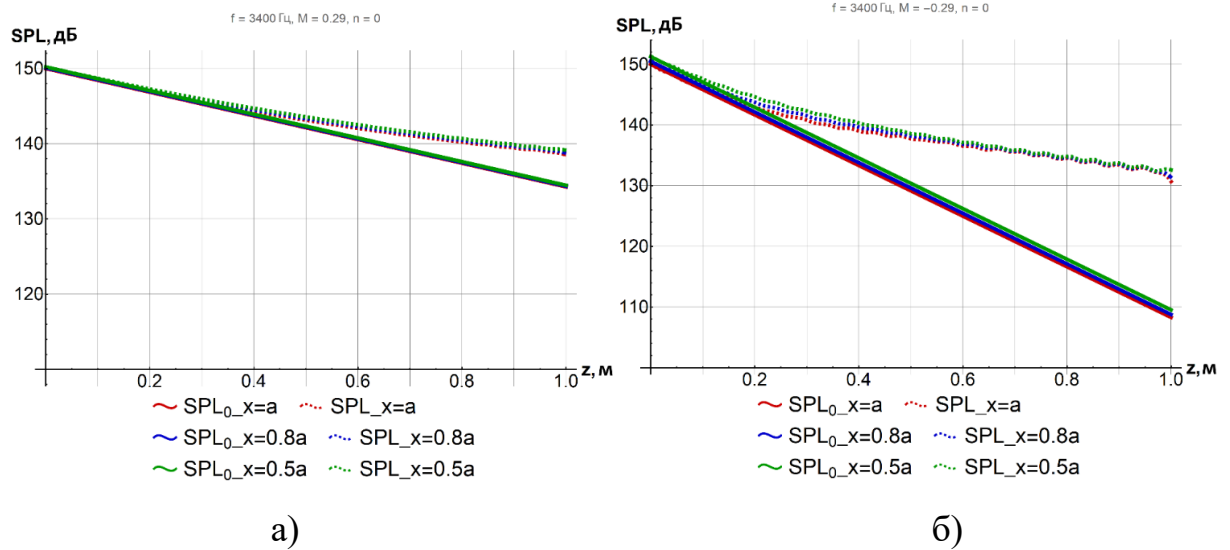


Рисунок 4.16 – Зависимость УЗД от продольной координаты при исходной звуковой моде с $n = 0$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = 0.29$ (а) и $M = -0.29$ (б) при различных значениях координаты x , полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с линейным решением

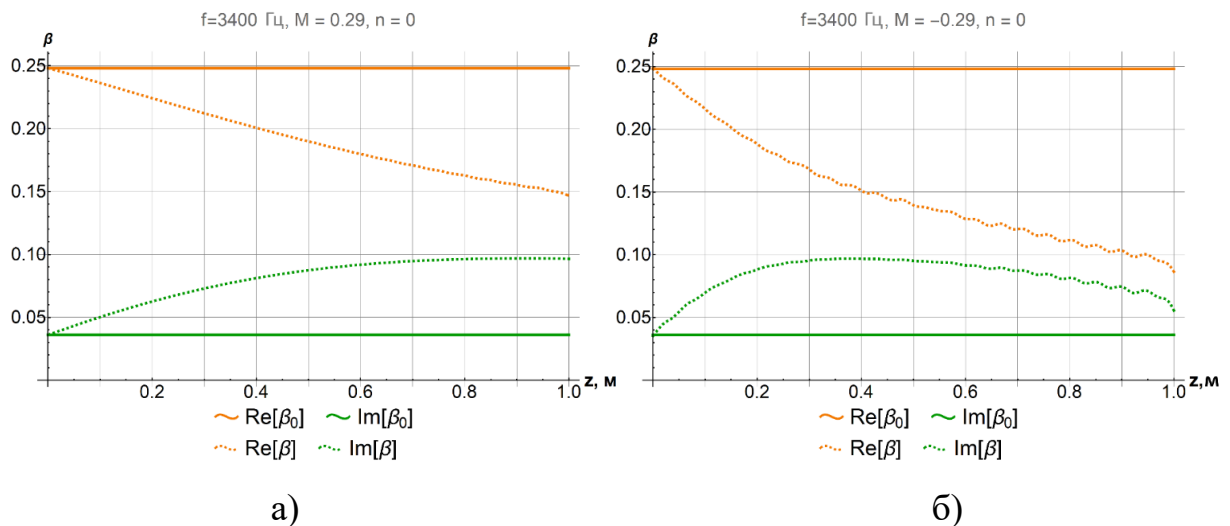


Рисунок 4.17 – Зависимость адмиттанса от продольной координаты при исходной звуковой моде с $n = 0$ на частоте $f = 3400$ Гц при начальном уровне звукового давления $L_{start} = 150$ дБ при числе Маха потока в канале $M = 0.29$ (а) и $M = -0.29$ (б), полученная с использованием итерационного алгоритма в сравнении с изначальным адмиттансом

Представленные на рисунках 4.16-4.17 примеры демонстрируют те же закономерности в проявлении учета нелинейного эффекта, что были обозначены ранее в примерах расчетов в цилиндрическом канале: при учете нелинейной зависимости адмиттанса от уровня звукового давления затухание отдельной звуковой моды уменьшается, при этом эффект проявляется более интенсивно для случая распространения исходного возмущения против потока в сравнении со случаем распространения по потоку (порядка 21 дБ на метр облицовки на стенке в случае распространения против потока в сравнении с 2.5 дБ на метр в случае распространения по потоку). При этом стоит отметить, что исходное возмущение в линейном случае на рассматриваемом участке затухает в случае распространения против потока куда более существенно, чем в противоположном случае: 40 дБ против порядка 16 дБ, что подтверждает ранее сделанные выводы.

4.4 Сравнение с экспериментом

Для сравнения результатов, получаемых с использованием разработанной итерационной процедуры, с результатами эксперимента, в расчетах была реализована конфигурация с параметрами экспериментальной установки «Интерферометр с потоком» ФАУ ЦАГИ, схема которой представлена на рисунке 4.18.

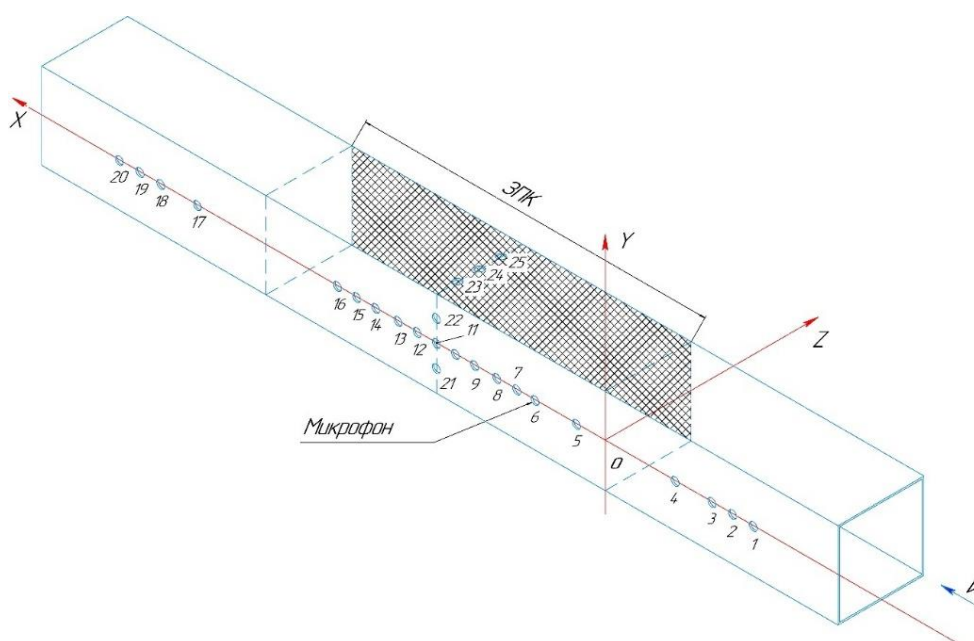


Рисунок 4.18 – Схема установки «Интерферометр с потоком»

Рабочая часть установки «Интерферометр с потоком» представляет собой прямоугольный в сечении канал со сторонами $a = b = 4 \text{ см}$ с вырезом длиной 40 см на одной из сторон для установки исследуемого образца панели ЗПК (на схеме на рисунке 4.18 отмечено «ЗПК»). Номерами от 1 до 25 на схеме установки на рисунке 4.18 обозначены места установки микрофонов для проведения измерений. Измерения на установке могут проводиться при наличии потока в канале, однако в настоящей работе сравнение результатов эксперимента с расчетом с использованием разработанного итерационного алгоритма было проведено при условии отсутствия потока во избежание влияния неоднородности полей газодинамических величин и шума турбулентного пограничного слоя на итоговые результаты.

Источник располагается выше 20-го микрофона по оси X, соответственно, исходное возмущение распространяется против оси X. Микрофоны под номерами 17-20 замеряют звуковое поле на стенке до образца, а микрофоны под номерами 1-4 – до образца. Расстояние от 20-го микрофона до сечения, в котором начинается образец, составляет $l_1 = 19.81 \text{ см}$, а расстояние от сечения, где образец заканчивается, до микрофона под номером 1 составляет $l_2 = 19.64 \text{ см}$. При этом в секции за образцом ниже 1-го микрофона по оси X прошедшее возмущение

отражается, то есть на образец в эксперименте падает как исходное возмущение, так и отраженное. Первый микрофон в пределах образца по направлению распространения исходного возмущения – микрофон номер 16, и расстояние до него от сечения, в котором начинается образец, составляет $l_3 = 7.53 \text{ см}$, что важно для будущего анализа. Для проведения расчетов с использованием итерационного алгоритма в секциях до и после образца с использованием данных измерений микрофонов под номерами 17-20 и 1-4 двухмикрофонным методом были определены амплитуды звуковых мод, падающих на секцию с установленным образцом с обеих сторон, которые были использованы в качестве начальных данных

Расчет с использованием итерационного алгоритма был проведен в представленной на рисунке 4.19 расчетной области. При этом начало координат было смещено на 20-й микрофон, а продольная ось координат (ось X на рисунке 4.18 и ось Z на рисунке 4.19) развернута. Оси Z на рисунке 4.18 соответствует ось X на рисунке 4.19. Черными прямоугольниками с номерами обозначены микрофоны, нумерация микрофонов на схеме на рисунке 4.18 сохранена.

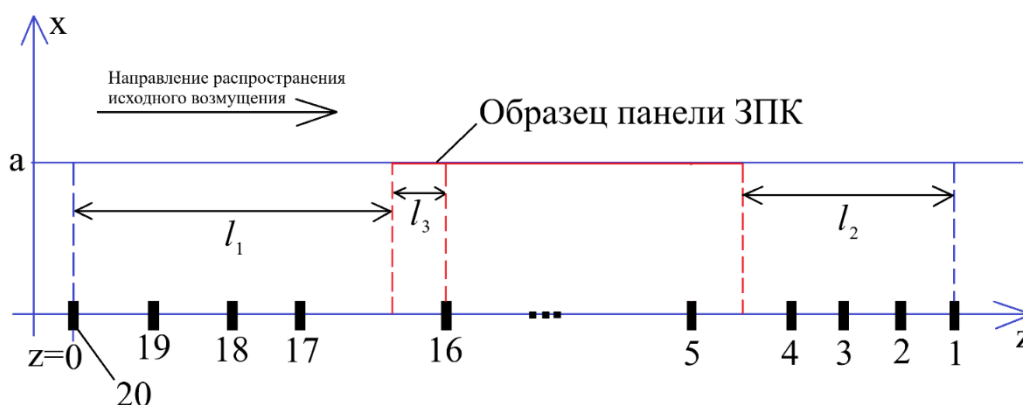


Рисунок 4.19 – Схема расчетной области для итерационного алгоритма

Важным отличием такой конфигурации от используемой в рассмотренных в предыдущем пункте примерах является наличие стыков жесткой стенки и облицовки на границах образца, то есть наличие разрывов в граничных условиях. Геометрические параметры самого образца панели ЗПК, с которым проводились измерения в эксперименте, и которые использовались в расчете в

полуэмпирической модели А.Ф. Соболева, представлены в таблице 1. При этом остальные параметры в полуэмпирической модели остались неизменными.

Таблица 1 – Геометрические параметры рассматриваемого образца ЗПК

Высота слоя заполнителя h_1 / h_2 , мм	23 / 7.5
Степень перфорации оболочки F_1 / F_2 , %	7 / 3.5
Диаметр отверстий d_1 / d_2 , мм	2 / 2
Толщина перфорированной пластины t_1 / t_2 , мм	1.71 / 0.65

В эксперименте источником был сгенерирован тональный шум, спектр которого на микрофонах с номерами 20 и 4 представлен на рисунке 4.20. Доминирующим является возмущение на частоте 1120 Гц.

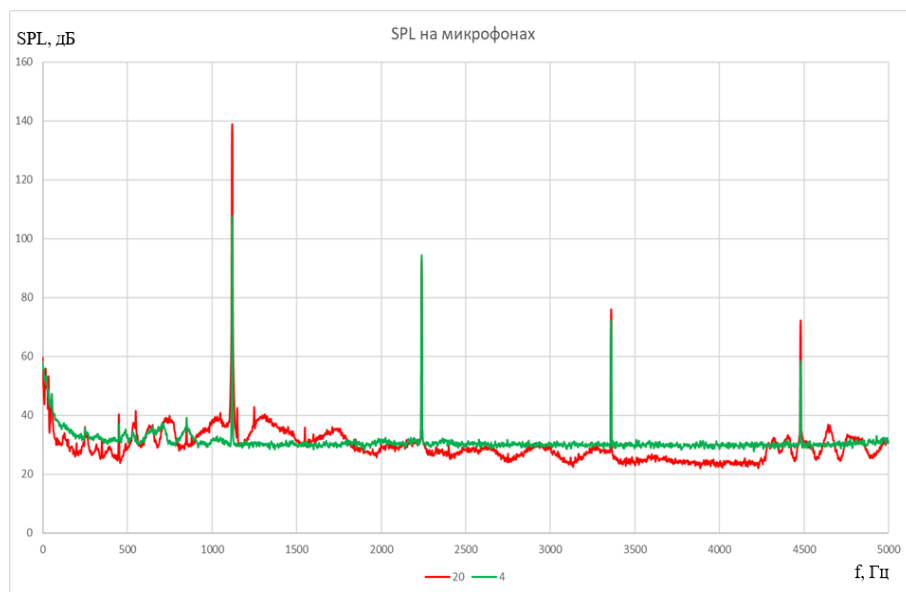


Рисунок 4.20 – Спектр звукового поля в эксперименте на микрофонах под номерами 20 и 4

Уровень звукового давления на стенке канала, противоположной той, на которой установлена панель ЗПК ($x=0$ на рисунке 4.19), полученный в эксперименте и в расчете с использованием итерационной процедуры, представлен на рисунке 4.21. Данные расчета представлены зеленой сплошной кривой, а данные

эксперимента – черными точками, которые для удобства восприятия соединены синей штриховой кривой. Красными прямыми выделены границы образца ЗПК.

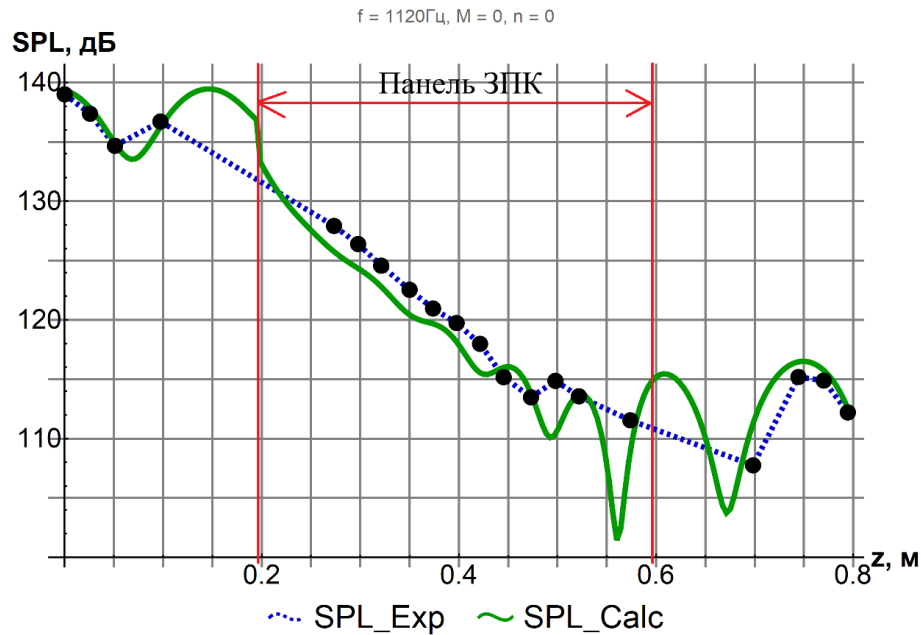


Рисунок 4.21 – Зависимость уровня звукового давления на стенке канала $x=0$ от продольной координаты, полученная с использованием итерационной процедуры (сплошная зеленая кривая) и на микрофонах в эксперименте (черные точки)

Сравнение результатов расчета и эксперимента, приведенное на рисунке 4.21, демонстрирует необходимость доработки установки «Интерферометр с потоком» для исследования нелинейного режима работы ЗПК, так как в области наиболее интенсивного проявления нелинейного эффекта, располагающейся между сечением, где начинается образец, и сечением микрофона под номером 16 (эта область с длиной l_3 отмечена на рисунке 4.19), отсутствуют микрофоны, а к микрофону под номером 16 уровень звукового давления опускается ниже 128 дБ, где нелинейный эффект проявляет себя уже не так интенсивно, как при более высоких уровнях.

4.5 Выводы к главе 4

- Разработана итерационная процедура решения задачи о распространении звука в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК на основе реализованного полуаналитического метода описания процесса распространения звука в каналах с потоком при наличии неоднородного вдоль оси канала адмиттанса стенки.
- Разработанная итерационная процедура реализована в частном случае цилиндрического и прямоугольного каналов с потоком. Проведены параметрические расчеты процесса распространения как одиночных звуковых мод, так и суперпозиции звуковых мод, в каналах, стенки которых облицованы двухслойными сотовыми ЗПК, импеданс которых зависит от уровня звукового давления. Для расчета импеданса ЗПК был использован метод А.Ф. Соболева, в основе которого лежит полуэмпирическая модель А.Ф. Соболева импеданса однослойных сотовых ЗПК. Установлено, что в рассмотренных случаях учет нелинейного эффекта при описании процесса распространения звука в каналах с потоком приводит к уменьшению затухания отдельных звуковых мод, причем эффект проявляется более интенсивно в случаях распространения исходного возмущения против направления потока в сравнении со случаем распространения по направлению потока, и сохраняется в том случае, если в качестве исходного возмущения рассматривается суперпозиция нескольких мод.
- Важным преимуществом разработанной итерационной процедуры является возможность рассмотрения исходного возмущения, являющегося суперпозицией нескольких звуковых мод, что в большей степени соответствует практическим задачам, так как в каналах авиационных двигателей реализуется многомодовый режим, и позволяет учесть зависимость импеданса ЗПК от общего уровня звукового давления. При этом такое рассмотрение не требует дополнительных временных затрат для расчетов.

- Проведено сравнение результатов решения задачи о распространении звука в прямоугольном канале с учетом нелинейного режима работы ЗПК при отсутствии потока в конфигурации, имитирующей рабочую часть экспериментальной установки «Интерферометр с потоком», с результатами эксперимента. Установлено, что для исследования нелинейного режима работы ЗПК необходима доработка установки «Интерферометр с потоком», а именно – установка в рабочую часть дополнительных микрофонов напротив образца ЗПК в близости к области первого стыка образца и стенки канала по пути распространения исходного возмущения.

Заключение

- Реализован полуаналитический метод описания процесса распространения звука в геометрически однородном канале с безвихревым изэнтропийным однородным потоком идеальной жидкости при наличии конечного участка с неоднородным вдоль оси канала адмиттансом стенки на основе метода поперечных сечений, получены основные соотношения в общем виде. Обозначены основные особенности практического применения реализованного метода. Реализован итерационный метод прогонки для практического применения реализованного полуаналитического метода.

- Полуаналитический метод описания процесса распространения звука в каналах с потоком при наличии неоднородного вдоль оси канала адмиттанса стенки реализован в частных случаях каналов цилиндрической и прямоугольной геометрии. Проведена верификация реализованной полуаналитической процедуры на основании сравнения с решением задачи о распространении звука в каналах с потоком с использованием численного метода конечных элементов в рассмотренных случаях цилиндрической и прямоугольной геометрии. Представлены параметры полуаналитической модели, позволяющие сохранить баланс между точностью расчета и быстродействием процедуры.

- Проведен анализ полученных в расчетах результатов с использованием возможностей полуаналитической модели: возникающий при определенных обстоятельствах эффект локального усиления звукового давления на стенке, наблюдаемый как в случае цилиндрического, так и в случае прямоугольного канала, объяснен особенностями поведения корней характеристического уравнения в комплексной плоскости.

- Разработана итерационная процедура решения задачи о распространении звука в однородных каналах с потоком с учетом нелинейного режима работы ЗПК на основе реализованного полуаналитического метода

описания процесса распространения звука в каналах с потоком при наличии неоднородного вдоль оси канала адмиттанса стенки.

- Разработанная итерационная процедура реализована в частном случае цилиндрического и прямоугольного каналов с потоком. Проведены параметрические расчеты процесса распространения как одиночных звуковых мод, так и суперпозиции звуковых мод, в каналах, стенки которых облицованы двухслойными сотовыми ЗПК, импеданс которых зависит от уровня звукового давления. Для расчета импеданса ЗПК был использован метод А.Ф. Соболева, в основе которого лежит полуэмпирическая модель А.Ф. Соболева импеданса однослойных сотовых ЗПК. Установлено, что в рассмотренных случаях учет нелинейного эффекта при описании процесса распространения звука в каналах с потоком приводит к уменьшению затухания отдельных звуковых мод, причем эффект проявляется более интенсивно в случаях распространения исходного возмущения против направления потока в сравнении со случаем распространения по направлению потока, и сохраняется в том случае, если в качестве исходного возмущения рассматривается суперпозиция нескольких мод.

- Важным преимуществом разработанной итерационной процедуры является возможность рассмотрения исходного возмущения, являющегося суперпозицией нескольких звуковых мод, что в большей степени соответствует практическим задачам, так как в каналах авиационных двигателей реализуется многомодовый режим, и позволяет учесть зависимость импеданса ЗПК от общего уровня звукового давления. При этом такое рассмотрение не требует дополнительных временных затрат для расчетов.

- Проведено сравнение результатов решения задачи о распространении звука в прямоугольном канале с учетом нелинейного режима работы ЗПК при отсутствии потока в конфигурации, имитирующей рабочую часть экспериментальной установки «Интерферометр с потоком», с результатами эксперимента. Установлено, что для исследования нелинейного режима работы ЗПК необходима доработка установки «Интерферометр с потоком», а именно – установка в рабочую часть дополнительных микрофонов напротив образца ЗПК в

близости к области первого стыка образца и стенки канала по пути распространения исходного возмущения.

Список литературы

1. Исакович М.А. Общая акустика, Издательство «Наука», Москва, 1973, 496 с.
2. Мунин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев Е.А. Аэродинамические источники шума, – М.: Машиностроение, 1981. 248 с.
3. Dougherty R.P., Mendoza J.M. Nacelle In-duct Beamforming using Modal Steering Vectors // AIAA Paper 2008-2812, 2008.
4. Sijtsma P. CLEAN based on spatial source coherence // Int. J. Aeroacoustics, 2009. V. 6. № 4. P. 357-374.
5. Lowis C.R., Joseph P.F., Kempton A.J. Estimation of the far-field directivity of broadband aeroengine fan noise using an in-duct axial microphone array // J. Sound. Vib., 2010. V. 329. P. 3940-3957.
6. Tester B. J., P. Murray B. An in-duct to far-field phased array technique for validation of fan broadband liner performance at representative Mach numbers // AIAA Paper 2013-2211, 2013.
7. Dougherty R.P. Mutual Incoherence of Broadband Duct Acoustic Modes // AIAA Paper 2016-3032, 2016.
8. Tapken U., Pardowitz B., Behnz M. Radial mode analysis of fan broadband noise // AIAA Paper 2017-3715, 2017.
9. Dougherty R.P., Bozak R.F. Two-dimensional Modal Beamforming in Wavenumber Space for Duct Acoustics // AIAA Paper 2018-2805, 2018.
10. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации, Изд-во «Советское радио», Москва, 1966.
11. Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Яковец М.А., Ипатов М.С., Кругляева А.Е., Сидоров С.Ю. Излучение звука из открытого конца канала, моделирующего воздухозаборник авиадвигателя в статических условиях и в потоке // Акустический журнал, 2019. Т. 65. № 1. С. 59-73.
12. Tam C.K.W., Parrish S.A., Envia E., Chien E.W. Physics of Acoustic Radiation from Jet Engine Inlets // AIAA Paper 2012-2242, 2012.
13. Рэлей. Теория звука. ГИТТЛ, 1940, 500 с.

14. Фок В.А. “Теоретические исследования проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперёк трубы”, ДАН СССР, 1941, т. XXXI, №9, с. 875-878.
15. Ingard K. U. On the theory and design of acoustic resonators // Journal of the Acoustical Society of America, 1953. V. 25. № 6. P. 1037-1061.
16. Ingard U. and Ising H. Acoustic Nonlinearity of an Orifice // Journal of the Acoustical Society of America, 1967. V. 42. P. 6-17.
17. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical acoustics. New York, McGraw-Hill Book Company. Inc., 1968, XIX, pp. 927.
18. Groeneweg J. F. Current understanding of Helmholtz resonator arrays as duct boundary conditions. Basic aerodynamic Noise Research // NASA SP-207, 1969. P. 357-368.
19. Ingard U. Nonlinear Distortion of Sound Transmitted through an Orifice // Journal of the Acoustical Society of America, 1970. V. 48. P. 32-33.
20. Melling, T. H. The Acoustic Impedance of Perforates at Medium and High Sound Pressure Levels // Journal of Sound and Vibration, 1973. V. 29. P. 1–65.
21. Писаревский Н. Н., Голубкова Л.В. Экспериментальная установка для измерения характеристик ЗПК // Труды ЦАГИ, 1976. № 1806. С. 54-73.
22. Cummings A. Transient and Multiple Frequency Sound Transmission through Perforated Plates at High Amplitude // Journal of the Acoustical Society of America, 1986. V. 79. P. 942–951.
23. Руденко О.В., Хирных К.Л. Модель резонатора Гельмгольца для поглощения интенсивного звука // Акустический журнал, 1990. Т. 36. № 3. С. 527-534.
24. Elnady T. and Bodén H. On Semi-empirical Liner Impedance Modeling with Grazing Flow // AIAA Paper 2003-3304, 2003.
25. Bodén H., Ying G. and Tozun H.B. Experimental investigation of nonlinear acoustic properties for perforates // AIAA Paper 2006-2404, 2006.
26. Bodén H. The effect of high level multi-tone excitation on the acoustic properties of perforates and liner samples // AIAA Paper 2012- 2404, 2012.

27. Bodén H. and Zhou L. Acoustic properties of an in-duct orifice subjected to bias flow and high level acoustic excitation // Proceedings of FIV, 2012.
28. Bodén H. One-sided multi-port techniques for characterisation of in-duct samples with nonlinear acoustic properties // Journal of Sound and Vibration, 2012. V. 331. P. 3050-3067.
29. Zhou L. and Bodén H. The effect of combined high level acoustic excitation and bias flow on the acoustic properties of an in-duct orifice // AIAA Paper 2013-2128, 2013.
30. Bodén H. Acoustic properties of perforates under high level multi-tone excitation // AIAA Paper 2013-2175, 2013.
31. Singh D.K. and Rienstra S.W. A Systematic Impedance Model for Non-Linear Helmholtz Resonator Liner // AIAA Paper 2013-2223, 2013.
32. Соболев А.Ф. Полуэмпирическая теория однослойных сотовых звукопоглощающих конструкций с лицевой перфорированной панелью // Акустический журнал, 2007. Т. 53. № 6. С. 861-872.
33. Lavieille M., Abboud T., Bennani A., Balin N. Numerical simulations of perforate liners: Part I Model description and impedance validation // AIAA Paper 2013-2269, 2013.
34. Adrien Mann, Franck Pérot, Min-Suk Kim, Damiano Casalino. Characterization of Acoustic Liners Absorption using a Lattice-Boltzmann Method // AIAA Paper 2013-2271, 2013.
35. Jia Yu, Marta Ruiz and Hwa Wan Kwan. Validation of Goodrich Perforate Liner Impedance Model Using NASA Langley Test Data // AIAA Paper 2008-2930, 2008.
36. Minotti A., Simon F., Gantie F. Characterization of an acoustic liner by means of Laser Doppler Velocimetry in a subsonic flow // Aerospace Science and Technology, 2008. V. 12. P. 398-407.
37. Schulz A., Bake F., Enghardt L., Haufe D., Fischer A., Czarske J. Acoustic Damping Analysis of Bias Flow Liners Based on Spectral Flow Characteristics // AIAA Paper 2013-2177, 2013.
38. Haufe D., Schluyler R., Fischer A., Buttner L. and Czarske J. Optical multi-point measurement of the acoustic particle velocity in a superposed flow using a spectroscopic

laser technique // *Measurement Science and Technology*, 2012. V. 23. № 8. P. 085306-085313.

39. Дубень А.П., Козубская Т.К., Королев С.И., Маслов В.П., Миронов А.К., Миронова Д.И., Шапаронов В.М. Исследование акустического течения в горле резонатора // *Акустический журнал*, 2012. Т. 58. № 1. С. 80-92.

40. Chenzhen Ji, Dan Zhao. Numerical Investigation of Acoustically Excited Flow Through an Orifice Using Lattice Boltzmann Method // *AIAA Paper 2013-2127*, 2013.

41. Tam C.K.W., Kurbatski K.A., Ahuja K.K. and Gaeta Jr. R.J. A Numerical and Experimental Investigation of the Dissipation Mechanisms of Resonant Acoustic Liners // *Journal of Sound and Vibration*, 2001. V. 245. P. 545-557.

42. Duben Alexey, Kozubskaya Tatiana, Mironov Mikhail. Numerical Investigation of Resonators for Acoustic Liners // In Book of Abstracts of Trilateral Russian-French-German Workshop “Computational Experiment in Aeroacoustics”, Svetlogorsk, September 22-25, 2010. MAKS press, Moscow. P. 34-36.

43. Zhang Q., Bodony D. J. Impedance Predictions of 3D Honeycomb Liner with Circular Apertures by DNS // *AIAA Paper 2011-2727*, 2011.

44. Lavieille M., Abboud T., Bennani A., Balin N. Numerical simulations of perforate liners: Part I - Model description and impedance validation // *AIAA Paper 2013-2269*, 2013.

45. Lavieille M., Piot E., Micheli F. Numerical simulations of perforate liners: Part II – Local velocity fields validation // *AIAA Paper 2013-2270*, 2013.

46. Xu J., Li X.D. and Guo Y.P. Nonlinear absorption characteristic of micro resonator under high sound pressure level // *AIAA Paper 2014-3353*, 2014.

47. Zhou L. and Bodén H. Effect of viscosity on impedance eduction and validation // *AIAA Paper 2015-2227*, 2015.

48. Xu J., Li X. and Guo Y. Nonlinear impedance modeling of resonator with high intensity acoustic wave // *AIAA Paper 2015-2696*, 2015.

49. Morse P.M. The transmission of sound inside pipes // *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 11, No. 205, 1939.

50. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. – Москва: Наука, 1981.
51. Tester B.J. The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow // Journal of Sound and Vibration, 1973. V. 27. № 4. P. 477-513.
52. Tester B.J. The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform or “plug” flow // Journal of Sound and Vibration, 1973. V. 28. № 2. P. 151-203.
53. Cremer, Lothar: Theorie der Luftschall-Dämpfung im Rechteckkanal mit schluckender Wand und das sich dabei ergebende höchste Dämpfungsmass // Acoustica, 1953, Vol. 3, No. 2, pp. 249-263.
54. Rice, Edward J. Acoustic liner optimum impedance for spinning modes with mode cut-off ratio as the design criterion // NASA TM X-73411, 1976.
55. Rice E.J. Spinning mode sound propagation in ducts with acoustic treatment and sheared flow // AIAA Paper, 1975, No. 75-519.
56. Rice E.J., Heidmann M.F., Sofrin T.G. Modal propagation angles in a cylindrical duct with flow and their relation to sound radiation // AIAA Paper, 1979, No. 79-0183.
57. Rice E.J. Acoustic liner optimum impedance (or the spinning modes with mode cut-off ratio as the design criterion // AIAA Paper, 1976, No. 76-516.
58. Rice E.J., Heidelberg L.J. Comparison of inlet suppressor data with approximate theory based on cutoff ratio // AIAA Paper, 1980, No. 80-0100.
59. Rice E.J. Optimum wall impedance for spinning modes - a correlation with mode cut-off ratio // Journal of Aircraft, 1979, Vol.16, No. 5, pp. 336-343.
60. Lilley G.M. The generation and radiation of supersonic jet noise. Theory of turbulence generated noise. AFAPL-TR-72-53, 1972, vol. IV, pp. 1-97.
61. Howe M.S. Contributions to the theory of aerodynamic sound with application to excess jet noise and theory of the flute. J. Fluid Mech., 1975, vol. 71, part 4, pp. 625-673.
62. Pridmore-Brown D.C. Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct”. J. Fluid Mech., vol. 4, 1958, pp 393-406.
63. Ingard U. Influence of fluid motion past a plane boundary on sound reduction, absorption, and transmission. Journal of Acoustical Society of America, 1959, Vol. 31, No. 7, pp. 1035-1036.

64. Myers, M. K. On the Acoustic Boundary Condition in the Presence of Flow // *Journal of Sound and Vibration*, 1980. V. 71. № 3. P. 429–434.
65. Л.А. Вайнштейн, Доклады АН СССР, 1947, т. 58, № 11, стр. 1957
66. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. Изд-во иностранной литературы, 1954.
67. Миттра Р. Ли С. Аналитические методы теории волноводов. Изд-во «МИР». М.: 1974.
68. Nayfeh, A. H. & Telionis, D. P. 1973 Acoustic propagation in ducts with varying cross-sections. *J. Acoust. Soc. Am.* 54, 1654{1661.
69. Nayfeh, A. H., Kaiser, J. E. & Telionis, D. P. 1975a Acoustics of aircraft engine-duct systems. *AIAA J.* 13, 130{153 (also AIAA Paper 73-1153).
70. Nayfeh, A. H., Kaiser, J. E. & Telionis, D. P. 1975b Transmission of sound through annular ducts of varying cross sections. *AIAA J.* 13, 60{65 (also AIAA Paper 74-58).
71. Nayfeh, A. H., Telionis, D. P. & Lekoudis, S. G. 1975 Acoustic propagation in ducts with varying cross-sections and sheared mean flow. In *Progress in Astronautics and Aeronautics: Aeroacoustics: Jet and Combustion Noise; Duct Acoustics* (ed. H. T. Nagamatsu), vol. 37, pp. 333-351. MIT Press.
72. Nayfeh, A. H. 1981 *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley & Sons.
73. Гладенко А.Ф., Леонтьев Е.А. Распространение акустических возмущений в плавно неоднородном цилиндрическом канале с потенциальным изоэнтропическим потоком // *Акустический журнал*, 1985, Т. 31, №. 2, С. 171-177.
74. Гладенко А.Ф., Леонтьев Е.А. Метод пограничного слоя в задаче распространения звука в канале переменного сечения с потоком // *Акустический журнал*, 1987, Т. 33, № 2, С. 212-218.
75. Гладенко А.Ф., Леонтьев Е.А. Распространение звука в плавно неоднородном цилиндрическом канале с потоком при наличии двух точек поворота // *Акустический журнал*, 1987, Т. 33, № 6, С. 1008-1013.
76. Гладенко А.Ф., Леонтьев Е.А. Раздвоение мод в волноводе с импедансными стенками // *Акустический журнал*, 1988. Т. 34. № 5. С. 820-827.
77. А.Ф. Гладенко, А.Ф. Соболев Функция Грина для плавно неоднородного канала с потоком // *Акустический журнал*, 1993. Т. 39. №6. С. 1037-1042.

78. Rienstra, S. W. 1986 Hydrodynamic instabilities and surface waves in a flow over an impedance wall. In Proc. IUTAM Symp. 'Aero- and Hydro-Acoustics' 1985 Lyon (ed. G. Comte-Bellot & J. E. Ffowcs Williams), pp. 483-490. Springer.
79. Rienstra, S. W. 1988 Sound transmission in a slowly varying lined flow duct. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Series 4, part 6, no. 1-2, pp. 157-167.
80. S.W. Rienstra and W. Eversman, "A numerical comparison between the multiple-scales and finite-element solution for sound propagation in lined flow ducts." *Journal of Fluid Mechanics* 437 (2001) 367-384.
81. S.W. Rienstra, «Sound propagation in slowly varying lined flow ducts of arbitrary cross section», *Journal of Fluid Mechanics* 495 (2003), 157-173.
82. В.В. Башкатов, Н.Н. Остриков. Особенности распространения звука в неоднородных каналах с потоком: сравнение аналитического и численного решений, Сборник Трудов XXXVI сессии Российского акустического общества. – М., ГЕОС, 2024, С. 361-367.
83. Башкатов В.В., Остриков Н.Н. Численное исследование процесса отражения звука при прохождении зон неоднородности в канале с потоком // Ученые записки ЦАГИ, 2026. Т. LVII. № 1. С. 20-33.
84. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. Л., Изд. ВКАС, 1949.
85. Гутман А.Л. К расчету волноводов с постепенно изменяющимся сечением. *Радиотехника*, 12, № 9, 20, 1957.
86. Гутман А.Л. Расчет переходов от прямоугольных волноводов к П- и Н-волноводам. *Радиотехника*, 13, № 12, 11, 1958.
87. Емелин Б. Ф. Волноводные уравнения для нерегулярных волноводов. *Радиотехника и электроника*, 3, № 5, 615, 1958.
88. Гутман А. Л. Применение асимптотического интегрирования волнового уравнения к решению некоторых волноводных и резонаторных задач. Докл. АН СССР, 125, № 6, 1252, 1959.
89. Гутман А. Л. Резонансные области в волноводах с плавным изменением сечения. *Радиотехника и электроника*, 4, № 12, 2020, 1959.

90. Каценеленбаум, Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 215 с.
91. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
92. Stevenson A. General Theory of Electromagnetic Horns, J. Appl. Phys., 22, N 12, 1447, 1951.
93. Schelkunoff S. Conversion of Maxwell's Equations into Generalized Telegraphist's Equations, BST, 34, N 5, 993, 1955.
94. Vlasov A. N., Antonsen T. M. // IEEE Trans. ED. 2001. V. 48. P. 45-55.
95. Кравченко В. Ф. и др. // Докл. РАН. 2007. Т. 412, №6. С. 759.
96. Rienstra S.W., Peake N. Modal Scattering at an Impedance Transition in a Lined Flow Duct // AIAA 2005-2852.
97. McAlpine A., Astley R.J. Acoustic scattering by an axially-segmented turbofan inlet duct liner at supersonic fan speeds // J. Sound Vib. 2006. V. 294. P. 780–806.
98. Rienstra S.W. Acoustic scattering at a hard–soft lining transition in a flow duct. J. Eng. Math. 2007. V.59. P. 451–475.
99. Brambley E.J. Low-frequency acoustic reflection at a hard-soft lining transition in a cylindrical duct with uniform flow // J. Eng. Math., 2009. V. 65. P. 345–354.
100. Gabard G. Mode-Matching Techniques for Sound Propagation in Lined Ducts with Flow // AIAA 2010-3940, 2010.
101. Liu, H. Jiang, X. Huang, S. Chen. Theoretical model of scattering from flow ducts with semi-infinite axial liner splices // J. Fluid Mech., 2016. V. 786. P. 62–83.
102. Соболев А.Ф., Яковец М.А. Применение метода Винера-Хопфа для описания распространения звука в цилиндрическом и прямоугольном каналах с потоком при наличии скачка импеданса // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 6. С. 583 – 595.
103. Остриков Н.Н., Яковец М.А. О робастном методе учета влияния разрывов импеданса стенок на распространение звука в каналах с потоком // Десятая российская конференция, г. Светлогорск Калининградской области, 16-21 сентября 2024 г.: Сборник тезисов. – М.: ИПМ им. Келдыша РАН, 2024. С. 180 – 184.

104. Остриков Н.Н., Башкатов В.В., Яковец М.А. Полуаналитический метод расчета звукового поля в цилиндрическом канале с неоднородным импедансом стенок при наличии однородного потока // Акустический журнал, 2026. Т. 72. № 3. С. 374 – 392.
105. Rémi R., Méry F., Piot E., Klotz P. Spatially-varying impedance model for locally reacting acoustic liners at a high sound intensity // Journal of Sound and Vibration, 2022. Vol. 524. No. 116741.
106. Lafont V., Méry F., Roncen R., Simon F., Piot E. Liner impedance eduction under shear grazing flow at a high sound pressure level // AIAA Journal, 2020, Vol. 58, No. 3, pp. 1107-1117.
107. Eversman W. Effect of local impedance variation and non-linearity on multiple tone attenuation // International Journal of Aeroacoustics, 2015. 14 (1-2). P. 281–303.
108. Eversman W. Effect of Local Impedance Variation and Non-linearity on Multiple Tone Attenuation // AIAA Paper 2010-3825, 2010.
109. Chen C., Li X., Hu F. On spatially varying acoustic impedance due to high sound intensity decay in a lined duct // Journal of Sound and Vibration, 2020, Vol. 483, No. 115430.
110. Casalino, D., Hazir, A., Mann, A. Turbofan Broadband Noise Prediction Using the Lattice Boltzmann Method // AIAA Journal, 2018. V. 56. № 2. P. 609-628.
111. Gonzalez-Martino I., Casalino D. Fan tonal and broadband noise simulations at transonic operating conditions using lattice-boltzmann methods // AIAA Paper 2018-3919, 2018.
112. Grace, S., Gonzalez-Martino, I., Casalino, D. Analysis of fan-stage gap-flow data to inform simulation of fan broadband noise // Phil. Trans. Royal Soc., 2019. V. A 377. Paper no. 20190080.
113. Bashkatov, V.V., Ostrikov, N.N. Influence of the Nonlinear Operating Mode of Acoustic Liners at High Sound Pressure Levels on Sound Wave Propagation in a Cylindrical Duct with a Flow // Acoust. Phys., 2024. V. 70. P. 9–20.

114. Kennedy S., Robinson T., Spence S., Richardson J. Computational Investigation of Inlet Distortion at High Angles of Attack // *Journal of Aircraft*, 2014. V. 51(2). P. 362–376.
115. Reedy, Tyler M. Analysis of Radial Inlet Distortion on Transonic Fan Performance // *Theses and Dissertations*, 2025. 10735.
116. Winkler J., Reimann C.A., Reba R.A., Gilson J. Turbofan Inlet Distortion Noise Prediction with a Hybrid CFD-CAA Approach // *AIAA Paper 2014-3102*, 2014.
117. Shur, M., Strelets, M., Travin, A., Spalart, P.R., Suzuki, T. Unsteady Simulations of a Fan/Outlet-Guide-Vane System: Aerodynamics and Turbulence // *AIAA Journal*, 2018. V. 56. № 6. P. 2283-2297.
118. Suzuki, T., Spalart, P.R., Shur, M., Strelets, M., Travin, A. Unsteady Simulations of a Fan/Outlet-Guide-Vane System: Tone-Noise Computation // *AIAA Journal*, 2018. V. 56. № 9. P. 3558-3569.
119. Suzuki, T., Spalart, P.R., Shur, M., Strelets, M., Travin, A. Unsteady Simulations of a Fan/Outlet-Guide-Vane System: Broadband-Noise Computation // *AIAA Journal*, 2019. V. 57. № 12. P. 5168–5181.
120. Chu B. T., Kovásznyai L. S. G. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas // *J. Fluid Mech.*, 1958. V. 3. № 5. P. 494-514.
121. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. В двух частях. – М.: Наука. 1965-1967 гг. 640+721 с.
122. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.–736 с.
123. Голдстейн М.Е. Аэроакустика: Пер. с англ./Пер. Р.К. Каравосова и Г.П. Караушева; Под ред. А.Г. Мунина. – М.: Машиностроение, 1981. – 294 с.
124. Остриков Н.Н. Асимптотический метод учета влияния пограничного слоя высокоскоростного потока на характеристики распространения звуковых мод в цилиндрическом канале с жесткими стенками // *Доклады российской академии наук. Физика, технические науки*, 2022. Т. 506. №1. С. 104–112.
125. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – изд. 4-е. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 512 с.

126. Пальчиковский В.В. Модификация метода Дина для определения импеданса при неоднородном звуковом поле в резонаторе // Акустический журнал, 2024. Т. 70. № 4. С. 608-621.
127. Jones M. G., Nark D. M. Comparisons of Impedance Prediction Models for Perforate-Over-Honeycomb Liners // AIAA Paper 2023-3637, 2013.
128. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн, том 1 и том 2 – М., Мир, 1978, 547+555 с. (перевод в двух томах монографии L. Felsen, N. Marcuvitz, Radiation and Scattering of Waves – Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973).
129. Rienstra S. W. Fundamentals of Duct Acoustics // VKI Lecture Series 2016-02. Notes of course "Progress in Simulation, Control and Reduction of Ventilation Noise", November 16-18, 2015. ISBN-13 978-2-87516-098-0.
130. Ostrikov N.N., Kopiev V.F, Axisymmetrical Instability Wave Control due to Resonance Coupling of Azimuthal Modes in High-Speed Jet Issuing from Corrugated Nozzle // AIAA Paper 2012-2144, 2012.
131. Башкатов В.В., Остриков Н.Н., Яковец М.А. Верификация численного метода конечных элементов для задачи определения коэффициентов отражения звуковых мод от открытого конца канала воздухозаборника при отсутствии потока // Акустика среды обитания (АСО – 2021): Шестая Всероссийская конф. молодых ученых и специалистов (Москва, 21 мая 2021 г.) : материалы конф., 2021. С. 26-35.
132. Gabard G., Astley R. J. Theoretical model for sound radiation from annular jet pipes: far- and near-field solutions // J. Fluid Mech., 2006. V. 549. P. 315–341.
133. Гладенко А.Ф. Распространение звука в плавно неоднородном канале с потоком: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.02.05 / Гладенко Александр Федорович; науч. рук. А. Г. Мунин. — Москва, 1990. — 159 с.