

**Федеральное автономное учреждение
«Центральный аэрогидродинамический институт
имени профессора Н. Е. Жуковского»**



УДК 539.43:629.7.018.4

На правах рукописи

экз. № ____

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'fclt'.

Шульга Александр Андреевич

**Разработка метода анализа влияния высокочастотных нагрузок
на усталостную прочность элементов конструкции самолета**

Специальность 2.5.14.

Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель: доктор
физико-математических наук, доцент
Медведский Александр Леонидович

Жуковский 2026

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1 Современное состояние вопроса анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность	16
1.1 Обзор исследований анализа усталости авиационных конструкций	16
1.2 Понятие и гипотезы усталостной повреждаемости.....	31
1.2.1 Гипотезы суммирования усталостных повреждений.....	40
1.2.2 Спектральные методы расчёта усталостной повреждаемости.....	41
1.3 Влияние факторов нагружения на усталостную долговечность.....	54
1.3.1 Постоянное среднее значение.....	54
1.3.2 Низкоамплитудные колебания.....	56
1.4 Постановка задачи исследования	59
1.5 Выводы по главе 1	60
Глава 2 Исследование влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность	62
2.1 Учёт низкоамплитудных колебаний нагрузки при обработке полётных данных среднемагистрального самолёта	62
2.2 Экспериментальное исследование влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементарных образцов.....	69
2.3 Влияние низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементов конструкции самолёта.....	79
2.4 Выводы по главе 2	80
Глава 3 Аналитические аспекты и обоснование метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта	82

3.1	Сравнительный анализ спектральных методов при расчёте усталостной повреждаемости конструкции среднемагистрального самолёта	83
3.2	Разработка метода расчёта усталостной повреждаемости от действия высокочастотной составляющей нагрузки	93
3.3	Сравнение разработанного и классического методов при расчёте высокочастотной усталостной повреждаемости.....	102
3.4	Выводы по главе 3	105
Глава 4	Численная реализация метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта	106
4.1	Постановка задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных линейных систем на примере прямого стержня и прямоугольной пластины.....	107
4.2	Численный алгоритм решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем.....	123
4.3	Валидация численного алгоритма решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем.....	127
4.4	Алгоритм численной реализации метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.....	137
4.5	Анализ усталости конструкции ресивера гидравлической системы среднемагистрального самолёта	139
4.6	Выводы по главе 4	155
	Заключение	157
	Список литературы	158
	Приложение А Акт о внедрении результатов работы	172
	Приложение Б Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.....	174

Введение

Самолёты гражданской авиации в процессе эксплуатации воспринимают внешние нагрузки различной природы и величины. При этом в зависимости от этапа полётного цикла изменяется уровень нагрузки, что зачастую связано с физической причиной возникновения нагрузки. Так, некоторые панели фюзеляжа и элементы хвостового оперения (при нормальной аэродинамической схеме) воспринимают повышенное акустическое давление, вызываемое попаданием реактивной струи, на протяжении всего полётного цикла, тогда как закрылки – более всего в выпущенном положении. Изменение параметров набегающего потока (главным образом давления и плотности) во время набора высоты и снижения является причиной изменения как избыточного давления в герметичных отсеках фюзеляжа, так и скоростного напора, воздействующего на внешние поверхности самолёта. На элементы конструкции (более всего на опоры шасси) воздействуют множественные ударные нагрузки, обусловленные взаимодействием колёс шасси с неровностями взлётно-посадочной полосы, отрывом от поверхности аэродрома и касанием поверхности во время руления, разбега, взлёта, посадки и пробега.

Маневрирование летательного аппарата (ЛА) с целью изменить режим полёта сопровождается возникновением нагрузок значительной величины, имеющих квазистатический характер, т. е. меняющихся во времени относительно медленно, с частотой не более 1 Гц. Преимущественно их воздействие определяет напряжённо-деформированное состояние (НДС) конструкции самолёта.

На данные медленно изменяющиеся нагрузки накладывается динамическое воздействие, источниками которого являются вибрация и шум силовой установки, нестационарные аэродинамические процессы (к которым относятся срывы потока и турбулентные флуктуации параметров среды) и т. д. Данные факторы формируют колебания нагрузок с относительно малыми амплитудами, большими средними значениями, а также существенно более высокими частотами по сравнению с квазистатическим нагружением.

Таким образом, переменное нагружение конструкции самолёта представляет собой суперпозицию низкочастотных (НЧ) высокоамплитудных (ВА) нагрузок и высокочастотных (ВЧ) низкоамплитудных (НА) нагрузок. При этом ВЧ НА нагрузки, вызываемые ударными, вибрационными и акустическими процессами, накладываются на НЧ ВА воздействие.

Стоит отметить, что подобное разделение нагрузок на две группы условно, и наряду с ними на ЛА действуют НЧ НА и ВЧ ВА нагрузки. К первым, например, можно отнести колебания ускорения свободного падения вследствие изменения высоты и широты полёта, однако их влияние пренебрежимо мало по сравнению с влиянием НЧ ВА нагрузок. Тогда как возникновения ВЧ ВА внешних нагрузок стараются избегать при проектировании ЛА или рассматривают отдельно.

Описанные внешние нагрузки при воздействии на конструкцию самолёта вызывают изменение внутренних силовых факторов и механических напряжений. Наиболее опасными случаями являются совпадение частоты внешнего нагружения с одной из низших частот собственных колебаний конструкции самолёта и его элементов, а также явления аэроупругости, такие как флаттер, бафтинг, реверс органов управления и др.

В данной работе рассматриваются особенности расчёта усталостной повреждаемости от действия ВЧ составляющей нагрузки и оценка влияния НА колебаний нагрузки на усталостную долговечность.

Актуальность темы исследования. На этапе демонстрации прочности самолёта в ходе сертификации выполняются наземные и лётные испытания. Классическим подходом при обосновании ресурса самолёта является проведение наземных ресурсных испытаний (РИ) наработку, превышающую проектный ресурс в несколько раз (с учётом коэффициентов надёжности).

Для установления эквивалента между нагруженностью конструкции ЛА в РИ и в реальной эксплуатации используется понятие усталостной повреждаемости (англ. fatigue damage). Классический метод расчёта данной величины заключается в поиске экстремумов случайного процесса нагружения, схематизации с помощью одного из двухпараметрических методов, учёте асимметрии циклов нагружения

и использовании линейной модели суммирования усталостных повреждений – гипотезы линейного суммирования.

Для определения данных о нагруженности конструкции самолёта в полёте проводятся лётные испытания (ЛИ). С помощью закреплённых на ней датчиков (главным образом, тензометров и вибропреобразователей) выполняется измерение внутренних силовых факторов. Проводится расчёт усталостной повреждаемости элементов конструкции для типовых полётных циклов, и комплексное воздействие, зарегистрированное в полёте и представленное в широком спектральном диапазоне, заменяется в РИ на медленно изменяющуюся нагрузку, эквивалентную по вкладу вносимых усталостных повреждений.

Применение данного подхода требует достоверной оценки вклада ВЧ НА колебаний нагружения в суммарную величину усталостной повреждаемости. Необходим метод, позволяющий учитывать эффект наложения их на НЧ ВА нагружение и особенности анализа усталости в области сверхмногоциклового циклической долговечности. Решение данной задачи является **актуальной темой исследования**, т. к. точность установления эквивалента между нагруженностью в РИ и в эксплуатации, будучи классическим подходом при обосновании ресурса самолёта, напрямую влияет на безопасность полётов.

Степень проработанности темы исследования. Проблема корректной оценки влияния ВЧ НА колебаний нагрузки на усталостную долговечность конструкции малоизучена. Существуют разнообразные рекомендации и положения по учёту вклада ВЧ НА нагрузок в величину усталостной повреждаемости. При этом известные подходы значительно различаются.

Распространённым способом учёта НА нагрузок является использование понятия предела выносливости – пороговой величины амплитуды циклов. Более подробное изучение И. С. Никитиным, А. Д. Никитиным, Л. А. Бохоевой и другими учёными воздействия НА колебаний нагрузки показало, что накопление усталости происходит и при значениях амплитуды цикла меньше предела выносливости, в области сверхмногоциклового усталости (СМЦУ). Также учёт НА нагрузок может выполняться неявно, на этапе обработки процесса, перед его схематизацией.

Учёт ВЧ нагрузок при анализе усталости элементов конструкции самолёта более всего отработан для области акустической усталости. Методика расчёта усталостной повреждаемости в случае, когда нагрузка задана в частотной области, может заключаться в использовании статистических спектральных методов, разработанных Т. Дирликом, Д. Бенашутти, Р. Тово, Я. М. Лоу и другими авторами. Большинство данных методов позволяет получить достоверный результат только при анализе стационарных эргодических нагрузок с нулевым средним значением.

Г. Гербером, А. Гудманом, В. Л. Райхером и другими учёными разработаны методы, позволяющие учесть влияние постоянного среднего значения нагрузки на расчётную величину интенсивности усталостной повреждаемости. Важно отметить проблему влияния частоты дискретизации процесса нагружения аналого-цифровым преобразователем (АЦП).

Таким образом, существуют различные рекомендации, касающиеся специальной обработки НА циклов нагружения при анализе усталости. Для учёта ВЧ нагрузок есть спектральные методы расчёта усталостной повреждаемости. Известные подходы различаются, что требует проведения дополнительных исследований. Нет установившегося метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта, необходимого для расчёта усталостной повреждаемости от действия ВЧ составляющей нагружения.

Цель работы. Разработка численно-экспериментального метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.

Задачи работы. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Экспериментальное исследование влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементарных образцов и разработка соответствующих рекомендаций для элементов конструкции самолёта.

2. Проведение сравнительного анализа спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости элементов конструкции самолёта на основе сравнения значений усталостной повреждаемости с классическим методом расчёта.

3. Разработка метода расчёта усталостной повреждаемости элементов конструкции самолёта от высокочастотной составляющей нагрузки с учётом влияния низкочастотных колебаний и постоянного среднего значения нагрузки.

4. Численная реализация метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

1. В ходе экспериментального исследования, заключающегося в проведении усталостных испытаний стальных элементарных образцов и отличающегося воздействием низкоамплитудных циклов нагрузки с высоким средним значением, получены данные о статистической незначимости влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность образцов данного типа, с разработкой соответствующих рекомендаций для элементов конструкции самолёта.

2. Проведён сравнительный анализ спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости, основанный на обработке полётных данных о нагрузках опытного экземпляра современного среднемагистрального самолёта и позволивший определить приоритетный спектральный метод для анализа усталостной прочности элементов конструкции самолёта.

3. Разработан метод анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта, основанный на разложении в степенной ряд выражения одномоментного метода расчёта интенсивности усталостной повреждаемости и позволяющий определять усталостную повреждаемость элементов конструкции самолёта от действия высокочастотной составляющей широкополосного процесса нагружения.

4. Выполнена численная реализация метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта, основанная на численном алгоритме решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем и позволяющая определять усталостную повреждаемость элементов конструкции самолёта от действия высокочастотной составляющей нагрузки.

Теоретическая значимость. Предложенный в исследовании метод расчёта усталостной повреждаемости от воздействия ВЧ составляющей нагрузки имеет теоретическую значимость для решения задач усталостной прочности элементов конструкций ЛА. Подтверждена теоретическая возможность разделения спектра нагрузки конструкции самолёта на НЧ и ВЧ компоненты и проведения их раздельной обработки с возможностью анализировать вклад НЧ составляющей нагрузки в накопление усталостной повреждаемости во временной области, а вклад ВЧ составляющей – в частотной области.

Практическая значимость. Выполнена численная реализация метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта. Проведён анализ усталостной прочности ресивера гидравлической системы (ГС) от воздействия случайной нагрузки, заданной согласно нормативным требованиям для авиационного оборудования, и внутреннего избыточного давления в качестве постоянной нагрузки.

Численный алгоритм решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем может применяться самостоятельно, независимо от разработанного метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта, для анализа прочности конструкций при воздействии случайной вибрационной нагрузки.

Представленный сравнительный анализ спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости по данным ЛИ среднемагистрального пассажирского самолёта представляет практическую значимость для специалистов в области усталостной прочности конструкций авиационной техники (АТ).

Для проведения сравнительного анализа спектральных методов разработан программный комплекс «Lavas», прототипом которого является разработанный ранее программный комплекс «Вибрационикс». В «Lavas» можно обрабатывать цифровые сигналы любого происхождения. Его особенностью является быстрая обработка большого объёма данных – практически значимое преимущество для инженеров, занимающихся обработкой сигналов.

Методология и методы исследования. Используемая методология включает в себя: нормативную документацию, в которой регламентированы процедуры подтверждения соответствия конструкции воздушного судна (ВС) требованиям раздела С «Прочность» НЛГ 25 ¹ и соответствия авиационного оборудования требованиям КТ-160G/14G ²; утверждённые в авиационной отрасли методики усталостных испытаний и расчётов на прочность конструкции самолёта, приведённые в стандартах (ГОСТ, ОСТ, ASTM); труды отечественных и зарубежных исследователей по анализу усталости конструкций АТ.

Методы исследования сформированы на основе опыта работ, выполненных сотрудниками инженерного центра ПАО «Яковлев» и работниками ФАУ «ЦАГИ», и заключаются в проведении аналитических расчётов в сочетании с физическими экспериментами (усталостные испытания образцов, проведённые в ФАУ «ЦАГИ»; испытательные полёты опытных образцов среднемагистрального пассажирского самолёта, выполненные ПАО «Яковлев») и численными экспериментами (расчёты в программных комплексах с использованием метода конечных элементов (МКЭ) и других численных методов).

Положения, выносимые на защиту. Следующие результаты работы автора выносятся на защиту:

1. Рекомендации по учёту влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементов конструкции самолёта.
2. Сравнительный анализ спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости элементов конструкции самолёта.
3. Метод анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта, учитывающий вклад низкочастотной составляющей и среднего значения нагрузки.

¹ Нормы летной годности самолетов транспортной категории. НЛГ 25 (Часть 25). Издание 1 / Федеральное агентство воздушного транспорта. – Москва, 2022.

² Квалификационные требования КТ-160G/14G. Условия эксплуатации и окружающей среды для бортового авиационного оборудования (внешние воздействующие факторы – ВВФ). Требования, нормы и методы испытаний / Межгосударственный авиационный комитет, Авиационный регистр. – Москва, 2015.

4. Численная реализация метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта с использованием метода конечных элементов.

Степень достоверности результатов. Для обоснования достоверности результатов работы были проведены усталостные испытания элементарных образцов, изготовленных из конструкционной стали. Испытания выполнялись в аккредитованной лаборатории ФАУ «ЦАГИ» в соответствии с государственными и отраслевыми стандартами. Полётные данные были получены на этапе сертификационных лётных испытаний опытного образца среднемагистрального пассажирского самолёта. Результаты численных экспериментов, проведённых в комплексе MSC Nastran при валидации численного алгоритма решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных конструкций, подтверждены результатами аналитических решений.

Личный вклад автора. Результаты исследований, которые изложены в диссертации, получены лично автором в процессе научной деятельности или при его непосредственном участии. Формулировка цели и задач работы, основных положений и выводов выполнены соискателем. Все заимствованные материалы обозначены ссылками.

Автор разработал программу испытаний стальных элементарных образцов для определения влияния НА колебаний нагрузки на усталостную долговечность; разработал метод расчёта усталостной повреждаемости от действия ВЧ составляющей нагрузки, учитывающий НА составляющую и ненулевое среднее значение нагрузки; выполнил численную реализацию метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкций самолёта; провёл анализ усталости конструкции ресивера ГС среднемагистрального самолёта.

Наполнение диссертационной работы выполнялось соискателем совместно с соавторами печатных работ. Так, анализ результатов усталостных испытаний стальных образцов и составление рекомендаций по учёту НА циклов нагрузки выполнялись вместе с Ю. А. Свирским и П. С. Бессоновым. Сравнительный анализ спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости проводился

совместно с Е. А. Никитиным. Разработка программного комплекса «Lavas» и расчёты усталостной повреждаемости предварительно растянутых стержня и пластины, на которые воздействует случайная поперечная нагрузка, проводились вместе с Д. В. Барышевой и Н. А. Аликиным.

Соответствие паспорту специальности. Содержание работы соответствует направлениям исследований, приведённым в «Паспорте научной специальности 2.5.14. Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов», а именно направлению 2 «Обеспечение прочности объектов авиационной, ракетной и космической техники на основе современных аналитических и численных методов, методов натурного и полунатурного моделирования в условиях стационарных и нестационарных внешних воздействий». Диссертация посвящена разработке метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.

Апробация результатов. Результаты работы были представлены автором на следующих конференциях:

1. XX Научно-техническая конференция по аэроакустике, Суздаль, 2023;
2. II Научно-практическая конференция аспирантов, Жуковский, 2023;
3. XXVI Туполевские чтения (школа молодых ученых), Казань, 2023;
4. IX Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики (АНТЭ-2024)», Казань, 2024;
5. III Научно-практическая конференция аспирантов, Жуковский, 2024;
6. Научно-техническая конференция «Прочность конструкций летательных аппаратов», Жуковский, 2024;
7. IV Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы прочности авиационных конструкций и материалов», Седова Заимка, 2025;
8. XXVII Туполевские чтения (школа молодых ученых), Казань, 2025;
9. IV Научно-практическая конференция аспирантов, Жуковский, 2025.

По результатам проведённых исследований опубликовано 13 научных работ, в том числе 4 статьи в научных изданиях, входящих в перечень ВАК РФ.

Внедрение. Результаты работы были внедрены при подтверждении соответствия: конструкции самолёта МС-21 требованиям АП-25 ³, раздела С «Прочность», п. 25.571 «Оценка допустимости повреждений и усталостной прочности конструкции»; бортового авиационного оборудования, установленного на самолёте МС-21, требованиям КТ-160G/14G, раздела 7 «Ударные эксплуатационные нагрузки и безопасность разрушения» и раздела 8 «Вибрация».

Использование результатов диссертации подтверждено Актом о внедрении результатов работы в ПАО «Яковлев», приведённым в Приложении А, и Свидетельством о государственной регистрации программы для ЭВМ, представленным в Приложении Б.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы из 141 наименований и 2 приложений. Общий объём работы составляет 174 страницы, включая 71 рисунок и 22 таблицы.

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, описана степень её проработанности, определена цель и поставлены задачи работы. Обоснована научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость работы. Описана методология и методы исследования. Определены положения, выносимые на защиту и степень достоверности результатов. Описаны личный вклад автора, соответствие работы паспорту специальности, апробация и внедрение результатов, приведена информация о публикациях автора по теме исследования. Приведена структура диссертации.

Глава 1 посвящена обзору открытых источников литературы, отечественных и зарубежных исследований анализа усталости конструкций АТ, описанию понятия и гипотез усталостной повреждаемости, методов расчёта данной величины и постановке задач работы.

³ Авиационные правила. Часть 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории (АП-25). Издание 5, с поправками 1–8. / Межгосударственный авиационный комитет, Авиационный регистр. – Москва, 2015.

В главе 2 разработаны рекомендации по учёту влияния НА колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементов конструкции. Описаны усталостные испытания элементарных образцов, изготовленных из конструкционной стали 30ХГСА. Добавление НА циклов нагружения в области СМЦУ изменило усталостную долговечность как в большую, так и в меньшую сторону. Сделан вывод, что данный фактор изменяет усталостную долговечность стальных элементов конструкции в пределах случайного разброса значений.

Глава 3 посвящена аналитическим аспектам и обоснованию метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта. В ходе сравнительного анализа спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости был выбран одномоментный метод, наиболее подходящий для обработки самолётных нагрузок и для применения при разработке метода. Вычисления проводились в программном комплексе «Lavas», созданном для анализа сигналов. Особенностью разработанного метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта является возможность разделять нагрузку конструкции самолёта на НЧ и ВЧ компоненты и проводить их обработку отдельно. Проведено сравнение нового и классического методов путём расчёта ВЧ усталостной повреждаемости по данным о нагружении элементов конструкции среднемагистрального самолёта в ходе ЛИ.

В главе 4 для численной реализации метода применён алгоритм решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем с использованием МКЭ в программном комплексе MSC Nastran. Данный алгоритм валидирован на простых шарнирно опёртых конструкциях (стержне и пластине), на которые воздействовала динамическая случайная широкополосная нагрузка, имеющая постоянную детерминированную составляющую. Сравнение результатов расчётов проводилось с аналитическими решениями данных задач и показало высокую точность алгоритма. Выполнена численная реализация разработанного в главе 3 метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта. Проведён анализ усталости конструкции ресивера ГС среднемагистрального пассажирского самолёта.

В **заключении** приведены основные выводы, сделанные в ходе выполнения диссертационной работы.

Приложение А включает Акт о внедрении результатов диссертационной работы в ПАО «Яковлев».

Приложение Б содержит Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Глава 1 Современное состояние вопроса анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность

1.1 Обзор исследований анализа усталости авиационных конструкций

В процессе эксплуатации самолёта на элементы конструкции воздействует внешнее переменное нагружение [1, 2], примерами которого являются: изменение усилий в местах крепления механизации при управлении ВС, циклы увеличения и уменьшения избыточного давления в фюзеляже при взлёте и посадке, изменение действующей на крыло нагрузки в течение полётного цикла и т. д. [3]. Внешние нагрузки являются причиной возникновения внутренних силовых факторов и механических напряжений, вызывающих деформации конструкции.

В ходе сертификации пассажирского самолёта для подтверждения прочности проводятся наземные испытания и ЛИ. Классическим подходом при обосновании ресурса планера является проведение наземных РИ на наработку, превышающую проектный ресурс в несколько раз. Согласно НЛГ 25 допустимая наработка в эксплуатации, соответствующая характеристикам сопротивления усталости, определяется делением наработки при РИ на суммарный коэффициент надёжности. Т. е. устанавливается эквивалент между нагруженностью планера самолёта при РИ и реальной эксплуатацией. Важно отметить, что в ходе наземных РИ на конструкцию опытного образца самолёта действуют медленно изменяющееся ВА программное нагружение [4, 5].

Эквивалент между нагруженностью конструкции ЛА в РИ и в эксплуатации устанавливается с использованием усталостной повреждаемости. Существует много методов расчёта данной величины [3, 6]. Широкое распространение [7, 8] получил метод анализа усталости, заключающийся в схематизации случайного процесса нагружения [9] (например, с использованием двухпараметрического метода полных циклов (МПЦ) или других методов), применении гипотезы линейного суммирования (ГЛС) усталостных повреждений [10, 11] и учёте

асимметрии циклов нагрузки (например, с помощью модифицированной формулы И. А. Одинга [12] или диаграмм постоянной усталостной долговечности, которые более подробно рассмотрены далее).

В отличие от наземных РИ, на этапе эксплуатации на конструкцию самолёта воздействует комплексная нагрузка, имеющая не только НЧ составляющую, но и ВЧ компоненты. Для подробного анализа нагруженности конструкции самолёта на этапе эксплуатации существуют несколько подходов. Одним из них является установление соответствия между регистрируемыми параметрами (ускорение в центре тяжести самолёта и двигателей) и параметрами полёта (высота и скорость полёта, углы атаки, положение органов управления и механизации крыла) с одной стороны и распределением нагрузок в контрольных сечениях планера самолёта (получение передаточных функций) с другой. Т. е. в качестве входного сигнала используются показания немногочисленных датчиков, установленных в самолёте на этапе эксплуатации. А выходным сигналом является распределение нагрузки в конструкции АТ. Описанное установление соответствия с использованием статистических связей на этапе опытной эксплуатации представлено, например, в работе [13]. При этом установка на ЛА дополнительных датчиков и систем не требуется.

В качестве альтернативы упомянутому способу для решения задачи можно использовать искусственную нейронную сеть. Данная математическая модель в настоящее время получает распространение в машиностроении в связи с увеличением мощности вычислений компьютерной техники [14–18]. Однако подобные системы пока широко не применяются при сертификации АТ.

Также существуют системы на основе волоконно-оптических датчиков деформации для мониторинга технического состояния высоконагруженных конструкций, в том числе с отслеживанием усталостной повреждаемости [19, 20]. Преимуществом является возможность отслеживать состояние конструкции в концентраторах напряжения. Однако такие системы требуют дополнительной установки датчиков и применяются редко.

Данные о нагруженности конструкции АТ в полёте в основном определяются на этапе ЛИ. Измерение нагружения конструкции самолёта выполняется с помощью закреплённых на ней датчиков. Современные системы бортовых измерений (СБИ), устанавливаемые в гражданских ВС, могут записывать данные о нагружении во временной области с высокой частотой регистрации (от 256 Гц для тензометрии и от 4096 Гц для датчиков вибрации). Также в последнее время в машиностроении получили распространение системы бесконтактных измерений деформаций с применением камер – видеограмметрические системы [21].

Возможно рассчитать усталостную повреждаемость от описываемого комплексного воздействия для типовых полётных циклов и заменить его в РИ на медленно изменяющуюся нагрузку, эквивалентную по вкладу вносимых усталостных повреждений. Для применения данного подхода требуется достоверная оценка вклада ВЧ НА колебаний нагружения в суммарную величину усталостной повреждаемости. Необходим метод, позволяющий корректно учитывать эффект их наложения на НЧ ВА нагружение [22] и особенности анализа усталости в области сверхмногоциклового циклической долговечности [23, 24].

Проблема корректной оценки влияния ВЧ НА колебаний нагрузки на усталостную долговечность конструкции, исследована недостаточно [25–27]. Несмотря на то, что известны различные рекомендации и положения по учёту влияния ВЧ НА нагрузок на усталостную долговечность, предлагаемые подходы значительно отличаются от работы к работе, что требует проведения дополнительных экспериментальных исследований.

Одним из способов учёта НА нагрузок является использование понятия предела выносливости. Подразумевается, что в случае нагружения конструкции циклической нагрузкой с амплитудой ниже предела выносливости не происходит накопления усталостных повреждений [28]. Кривая усталости представляется в виде двух участков: степенного и горизонтального. Предел выносливости выявлен не для всех конструкционных материалов, а для определения его значений необходимы продолжительные испытания. Поэтому используется понятие предела выносливости на определённой базе (например, 10^7 циклов).

Развитием подхода по учёту НА циклов, заключающегося в использовании предела выносливости, является представление кривой усталости в виде кусочно-степенной кривой, состоящей из нескольких участков с разными значениями степени. При более подробном изучении воздействия НА колебаний [27, 29] исследователи выявили, что накопление усталостной повреждаемости происходит при значениях амплитуды цикла меньше предела выносливости.

Большая работа была выполнена коллективом авторов под руководством И. С. Никитина в ходе научно-исследовательской работы [23, 24, 26, 30–33]. Авторы отметили, что при воздействии на образцы из металлических материалов большого количества НА колебаний наблюдается смена механизма зарождения усталостной трещины, и очаг трещины формируется под поверхностью образца. Случай, когда воздействие на элементы конструкции АТ нагружения из области СМЦУ привело к разрушению объектов испытаний, представлен в работе [34]. Развитие получают трещины, имеющие достаточно большую длину и острую вершину, а к окончательному разрушению детали приводит одна из таких трещин.

Также учёт НА циклов может выполняться неявно при проведении обработки случайного процесса нагружения, предшествующей его схематизации. Описание методов одно- и двухпараметрической схематизации [9] подробно изложено в стандартах: ГОСТ 25.101 ⁴ и ASTM Standard E1049 ⁵.

Согласно ГОСТ 25.101 диапазон изменения нагрузок исследуемого процесса нагружения разбивается равноотстоящими уровнями на классы общим количеством от 14 до 32. Затем проводится выделение экстремумов. При такой обработке выделению не подлежат соседние экстремумы, образующие размах меньше ширины класса. Т. е. присутствующие в нагружении колебания с амплитудами меньшими, чем половина ширины класса, не учитываются в процедуре схематизации и, соответственно, при дальнейшем расчёте усталостной

⁴ ГОСТ 25.101-83. Расчеты и испытания на прочность. Методы схематизации случайных процессов нагружения элементов машин и конструкций и статистического представления результатов.

⁵ ASTM E1049-85(2023). Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis / ASTM International. – West Conshohocken, PA, 2023.

повреждаемости. Данный пункт ГОСТ 25.101 можно рассматривать как гипотезу об отсутствии влияния нагрузок, не превышающих ширину класса, на усталостную долговечность конструкций.

В американском стандарте ASTM Standard E1049 нет прямого указания по отбрасыванию НА колебаний нагружения при схематизации. Однако в данном документе приведены группы наиболее распространённых методов схематизации, и для одной из них (Simple-Range Counting) изложена рекомендация: «Ranges smaller than a chosen value are usually eliminated before counting», – т. е.: «Размахи, меньшие, чем выбранное значение, обычно исключаются перед схематизацией».

Таким образом, в открытых источниках содержатся разные рекомендации о необходимости специальной обработки НА циклов нагружения при анализе усталости. Существующие подходы значительно различаются, что требует проведения дополнительных исследований.

Вопрос учёта ВЧ нагрузок при анализе усталости элементов конструкции самолёта хорошо отработан для области акустической усталости [35, 36], имеющей значение при подтверждении соответствия конструкции самолёта требованиям НЛГ 25, п. 25.571(d) «Усталостная прочность при акустических нагрузках». Основными источниками акустической нагрузки являются работающие двигатели самолёта. Наибольшее звуковое давление при нормальной аэродинамической схеме воздействует на: нижние панели закрылков, боковые панели пилонов, некоторые панели фюзеляжа, а также хвостовое оперение. Описанное воздействие акустической нагрузки стоит учитывать при проектировании ЛА и проведении РИ.

Важным случаем является воздействие на конструкцию ВС акустического шума со стороны реактивных струй двигателей и пульсаций давления в турбулентном пограничном слое. В процессе эксплуатации уровни акустических нагрузок на некоторые элементы конструкции (мотогондолы, пилоны, хвостовое оперение, закрылки) вносят существенный вклад в общую долговечность конструкции [35, 37]. При этом напряжения, вызванные ВЧ акустическими нагрузками, накладываются на НЧ повторно-статические полётные нагрузки, регистрируемые во временной области.

При акустическом воздействии зависимость нагрузки от времени во всём спектральном диапазоне установить трудно. Частота регистрации данных из тензометрии (от 256 Гц) и датчиков вибрации (от 4096 Гц) не всегда достаточна для достоверной регистрации данных о нагружении, поскольку акустический шум может быть представлен в диапазоне частот до десятков и сотен кГц [36].

Методики расчёта усталостной повреждаемости в случае, если неизвестна временная реализация процесса нагружения (как, например, при уже упомянутом акустическом воздействии), имеют особенности, обусловленные представлением данных о нагружении в частотной области и возможностью проведения расчётов с использованием статистических спектральных методов [38, 39].

Выражение усталостной повреждаемости от действия моногармонического процесса является достаточно точным для анализа узкополосных процессов [40], но не подходит для процессов, представленных в широком диапазоне частот.

Существует большое количество спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости от действия широкополосного процесса нагружения, основанных на разных принципах [6]. Так, часть методов подразумевает представление нагрузки в виде суммы двух (НЧ и ВЧ) или более частотных узкополосных составляющих [41–44]. В других методах применяется корректировка выражения для узкополосного процесса поправочным коэффициентом [45–47]. Есть методы, в которых усталостная повреждаемость вычисляется в соответствии с выражениями, полученными аппроксимацией плотности распределения амплитуды циклов, полученной методом дождя (МД) [48–50]. Спектральные методы рассмотрены далее более подробно.

В инженерном центре ПАО «Яковлев» при подтверждении соответствия конструкции планера самолёта МС-21 требованиям нормативной документации в области акустической усталости применяется спектральный метод из последней группы – метод Дирлика (Dirlik) [51]. Специалисты ФАУ «ЦАГИ» при анализе ВЧ усталости помимо метода Дирлика (например, в работе [52]) используют также одномоментный метод (например, в работе [53]), который основан на гипотезе спектрального суммирования (ГСС), предложенной В. Л. Райхером [54].

Применение большинства спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости позволяет получить достоверный результат только при анализе усталости от воздействия стационарных нормальных нагрузок [6, 55, 56], что является существенным ограничением применяемости данных методов.

Предстоит также оценить влияние, которое оказывает частота регистрации СБИ на расчётную величину усталостной повреждаемости. В настоящее время на практике в ходе ЛИ используется частота записи процессов нагружения 256 Гц и выше. Однако, в годы принятия упомянутых стандартов в авиационной отрасли применялись АЦП с частотой дискретизации 8 – 16 Гц. При анализе полётных данных важно применять корректные способы обработки данных [57].

Стоит отметить проблему влияния среднего значения нагрузки на величину усталостной повреждаемости. Возможно применение метода, заключающегося в масштабировании спектральной плотности мощности (СПМ) коэффициентом, характеризующим влияние постоянной нагрузки. В работах [58, 59] приведён обзор выражений для коэффициента: модели Гербера (Gerber), Квофи (Kwofie), Гудмана (Goodman), Морроу (Morrow), Содерберга (Soderberg) и Смита (Smith). Метод позволяет учесть величину постоянного среднего значения процесса, а не среднего значения каждого отдельного цикла. Метод не учитывает отсутствие накопления усталостных повреждений в области чисто сжимающих напряжений для металлов.

Таким образом, при учёте ВЧ нагрузок наблюдается ситуация, аналогичная учёту НА циклов. Существуют разные спектральные методы расчёта усталостной повреждаемости и методы учёта ненулевого среднего значения, однако в авиации нет установившегося метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.

Усталость металлических конструкций зачастую анализируют на основе данных о внутреннем механическом напряжении [24, 29, 32, 60]. А для анализа усталости конструкций из композиционных материалов помимо напряжения [22] также используют данные о деформации [61]. В частных случаях для анализа усталости конструкций помимо напряжений и деформаций применяют другие пропорциональные им силовые факторы [62]. Например, силу или момент сил.

Для того, чтобы определить НДС конструкции, необходимо, зная внешнюю нагрузку, решить задачу механики деформируемого твёрдого тела. Конструкция современного пассажирского самолёта состоит преимущественно из стержней, пластин и оболочек, которые могут быть выполнены из металлических или композиционных материалов. Весовая эффективность данных конструктивных элементов неразрывно связана с совершенствованием методов их расчёта [63]. Так, большой вклад в развитие теории изгиба стержней и пластин внёс С. П. Тимошенко. В его трудах [64, 65] описаны способы учёта сдвиговых деформаций, позволяющие более точно проводить некоторые виды расчётов на прочность (например, для случая стержня малого удлинения).

Поскольку в процессе эксплуатации конструкция самолёта регулярно деформируется под действием внешних переменных нагрузок, важным классом задач являются механические колебания [66]. Нередко данное явление приводит к разрушению конструкции. Особенно опасным является явление резонанса – совпадение частоты внешнего воздействия с частотой собственных колебаний изделия. На практике резонанс возникает, когда частота внешнего воздействия оказывается близка к одной из низших частот собственных колебаний конструкции или отдельных конструктивных элементов.

Основанные на понятии детерминизма методы классической механики могут быть недостаточны для прочностных расчётов, поскольку эксплуатационные нагрузки всегда имеют случайную составляющую [67]. В случае воздействия стохастических внешних нагрузок необходимо использовать методы анализа случайных процессов, в частности корреляционную теорию [68]. Примеры стохастического воздействия на конструкцию самолёта: работа двигателей, турбулентный пограничный слой, срывные аэродинамические явления.

В настоящее время основным инструментом для анализа прочности технических изделий является МКЭ. Этот метод решения дифференциальных уравнений (ДУ) с частными производными позволяет в численной постановке решать задачи механики деформируемого твёрдого тела, определять НДС конструкций технических изделий, имеющих произвольную форму.

Авторами основных идей, составляющих МКЭ, являются Хренников и Курант (Courant). Они отметили в научных работах [69, 70] важность разбиения непрерывной области на набор отдельных элементов (сетку). Данные элементы называют конечными элементами (КЭ). Положения МКЭ приведены в трудах отечественных и зарубежных авторов [71–73].

Для всех КЭ из набора задаётся определённая аппроксимирующая функция. Её часто представляют в виде линейного полинома. Вне границы КЭ функцию принимают равной нулю. А её значения в узлах КЭ неизвестны и должны быть определены. Для их поиска коэффициенты полинома выражают через значения функций в узлах КЭ. Затем из условия равенства значений функций в узлах соседних КЭ составляется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), количество уравнений которой равно количеству неизвестных значений в узлах. Т. к. каждый КЭ связан с ограниченным количеством соседних КЭ, матрица СЛАУ имеет разрежённый вид. Разрежённость матрицы упрощает поиск решения.

Матричную форму СЛАУ можно представить в виде суммы нескольких слагаемых. Тогда матрицы, стоящие у вектора обобщённых перемещений узлов системы и у векторов их первой и второй производных по времени, при решении задач прочности называют матрицей жёсткости, матрицей диссипации и матрицей масс. Накладываются дополнительные условия на граничных узлах сетки – граничные условия (ГУ), после чего СЛАУ решается одним из известных методов.

Помимо МКЭ для решения задач прочности также используют другие численные методы [74], например, метод конечных разностей или метод граничных элементов. Однако МКЭ является основным универсальным инструментом для профильных специалистов. Он получил широкое распространение при решении задач прочности конструкций технических изделий [75–80]. Для составления и решения СЛАУ высоких порядков существуют как коммерческие продукты (например, комплекс MSC Nastran⁶), так и большое количество пользовательских программ.

⁶ MSC Software. MSC Nastran 2021.1. Getting Started Guide. – Irvine, CA : MSC Software Corporation, 2021, – 295 p.

После получения поля напряжений (деформаций) за определённый отрезок времени, проводится анализ усталости, заключающийся в расчёте усталостной повреждаемости [6–8]. При известном поле напряжений (деформаций) в конструкции усталостная повреждаемость также определяется как физическое поле. При этом согласно принимаемому допущению разрушение происходит тогда, когда критерий разрушения выполняется в любой точке конструкции. Таким образом, при расчёте усталостной повреждаемости не учитывается причина возникновения и динамика роста трещин, как в случае решения задач механики разрушения твёрдых тел [81, 82].

В общем случае усталостная повреждаемость является нелинейной функцией от количества циклов нагружения [3]. Однако на практике часто применяется линейный закон [6, 83]. Поскольку он является значительным приближением, в качестве критерия разрушения используется обобщённое соотношение [3, 7, 84].

Существует также кусочно-линейный закон накопления усталостных повреждений, согласно которому процесс исчерпания усталостной долговечности разделяется на этапы зарождения трещины и её распространения [84].

Для определения усталостной долговечности проводят испытания на усталость. Методы испытаний описаны в ГОСТ 25.502⁷. Т. к. не представляется достижимым экспериментально определить значения усталостной долговечности для всевозможных циклических нагрузок, применяется подход, называемый в честь А. Вёлера (A. Wöhler) [85] и состоящий в построении кривой усталости – зависимости характеристики цикла (например, амплитуды) от циклической долговечности. Кривую получают с помощью испытаний на нескольких уровнях нагружения при постоянном значении коэффициента асимметрии [3, 7]. Зачастую испытания проводят на элементарных образцах с концентраторами напряжений [8]. К таким образцам можно отнести, например, образцы типа полоса с отверстием, испытания которых описаны в главе 2 и были проведены для оценки влияния НА колебаний нагрузки на усталостную долговечность.

⁷ ГОСТ 25.502-79. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний металлов. Методы испытаний на усталость.

Широкое распространение получило степенное выражение кривой усталости [6, 7, 61], которое является достаточно точным в практически важном диапазоне усталостной долговечности [86]. При этом зачастую степенную зависимость записывают в логарифмических координатах [87, 88].

В работе [89] приведены результаты экспериментального исследования взаимосвязи усталостных характеристик. Авторы изучили материалы, которые применяются в основной силовой конструкции современных пассажирских самолётов: алюминиевые и титановые сплавы, конструкционные и нержавеющие стали и полимерные композиционные материалы (ПКМ). Был проведён анализ значений степени и константы кривых усталости, определена и описана связь между данными величинами.

При продолжительной эксплуатации самолёта вследствие длительного воздействия внешних факторов (коррозия, удары и др.) происходит деградация свойств материалов, в том числе усталостных характеристик [90–92]. Помимо упомянутых факторов усталостная прочность зависит от температуры [93, 94].

Под действием внешней повторяющейся нагрузки материал подвергается деформированию. Механизм разрушения металлических материалов хорошо изучен, известны критерии усталостного разрушения и методы оценки усталостной долговечности конструкций [95–97]. С каждым новым циклом нагружения накопленная энергия увеличивается, что приводит к критическому значению, и материал разрушается [98]. Данное явление можно наблюдать при появлении трещины, диагностируемой специальным оборудованием [99–102].

Область определения усталостной долговечности разделяют на диапазоны значений: однократный, малоцикловый, многоцикловый и сверхмногоцикловый (терминология согласно работе [26]). Для некоторых конструкционных материалов в области СМЦУ принимают предел выносливости [60].

Зависимость между амплитудой и средним значением циклической нагрузки для небольших по величине значений, не превышающих пределы выносливости, реализуется с помощью диаграммы Хейга (Haigh) или диаграммы предельных амплитуд [3].

Для более высоких циклических нагрузок используют диаграммы постоянной усталостной долговечности (ДПУД) [22]. Так, для металлических материалов в отечественном авиастроении широко распространена ДПУД [7], состоящая из: обобщённой формулы И. А. Одингга [12] для неотрицательных средних значений напряжения, линейной зависимости [103] амплитуды для малых положительных наибольших значений напряжения и пренебрежения накоплением усталости в зоне исключительно сжимающих напряжений. Важно, что для высоких уровней напряжения последнее предположение не является справедливым [104].

В случае использования волокнистых композиционных материалов нельзя пренебрегать накоплением усталости в зоне отрицательных линейных деформаций, поэтому ДПУД имеет другие формы [22, 105–109]. Стоит отметить простоту метода расчёта при наименьшей усталостной долговечности для двух типов испытаний [105]. Но данный способ является неприменимым, если ДПУД имеет достаточно пологий максимум [106]. Известно большое количество более точных методов построения ДПУД [22, 107, 108]: нелинейная асимметричная диаграмма Гербера, колоколообразная диаграмма Харриса (Harris), анизоморфные диаграммы Каваи (Kawai), модифицированная колоколообразная диаграмма Харриса и др.

Подробный сравнительный анализ ДПУД для образцов, изготовленных из ПКМ, приводится в работах В. Е. Стрижиуса [22, 107]. Автор делает вывод, что из перечисленных способов аппроксимации ДПУД наиболее точное описание влияния средних напряжений на циклическую долговечность образцов из ПКМ позволяет получить модифицированная колоколообразная диаграмма Харриса.

На элементы конструкции АТ в полёте воздействует совокупность циклов нагружения с различными характеристиками, и для определения усталостной повреждаемости необходимо каким-то образом сложить действия всех циклов. Можно выделить два основных подхода [88, 110]: схематизация нагрузки с последующим суммированием усталостных повреждений во временной области и переход в частотную область, заключающийся в получении вероятностных характеристик и определении усталостной повреждаемости с использованием спектрального метода.

Существует несколько моделей суммирования усталостных повреждений. Наиболее простой является ГЛС усталостных повреждений, предложенная А. Палмгреном (Palmgren) [10], математически сформулированная М. А. Майнером (Miner) [11] и впоследствии получившая широкое распространение [8, 25, 111].

В качестве существенного недостатка ГЛС упоминается независимость усталостной повреждаемости от последовательности воздействия различных циклов нагрузки [88]. С целью учесть неравномерность накопления повреждений сначала Лангер (Langer), а затем Гровер (Grover) предложили гипотезу кусочно-линейного суммирования (ГКЛС), разделив процесс исчерпания усталостной долговечности на этапы зарождения трещины и её распространения и применяя ГЛС отдельно к каждому из этапов [84, 112]. Более подробное обоснование ГКЛС было предложено Мэнсоном (Manson) и Хэлфордом (Halford) в работе [113]. Авторы отметили, что ГКЛС пусть и является удовлетворительной для упомянутых ими результатов блочных усталостных испытаний, однако её полезность должна оцениваться на основе того, можно ли правильно проанализировать обобщённые последовательности нагружения, поскольку это требует разработки и реализации более сложных испытательных программ испытаний.

Ричарт (Richart) и Ньюмарк (Newmark), а затем Марко (Marko) и Старки (Starkey) предложили другую нелинейную гипотезу суммирования усталостных повреждений [114, 115] – гипотезу степенного суммирования (ГСТС). Данная модель суммирования усталостных повреждений требует проведения большего числа испытаний, поскольку для её использования необходимо определить значения степени на разных уровнях усталостной долговечности. Применяется ГСТС, например, при анализе малоциклового усталости [93].

Помимо описанных гипотез суммирования усталостных повреждений (ГЛС, ГКЛС, ГСТС) известны энергетические [116, 117], континуальные [118, 119] и вероятностные [120] модели. Однако их применение на практике, также как использование ГКЛС и ГСТС, сопряжено с необходимостью проводить больший объём испытаний образцов. По этой причине наиболее широкое применение среди гипотез суммирования усталостных повреждений имеет ГЛС.

Спектральные методы расчёта усталостной повреждаемости позволяют анализировать усталость конструкций от действия случайных процессов на основе вероятностных характеристик [6, 55, 56]. Поскольку на исследуемую нагрузку, как правило, накладываются определённые требования, в частности, требование к эргодичности процесса, вероятностные характеристики могут быть определены по СПМ одной реализации: определение СПМ в случае сложного НДС тела описано в работе [121], получение момента амплитуды циклов – в работе [122], плотность распределения максимумов для общего случая широкополосного процесса получил Райс (Rice) [123].

При анализе усталости в частотной области используется понятие усталостной повреждаемости в единицу времени или интенсивности усталостной повреждаемости [7, 124].

Обширный обзор спектральных методов выполнен Зорманом (Zorman), Славичем (Slavič) и Болтезаром (Boltežar) [6]. В работе они классифицировали спектральные методы по принципу расчёта усталостной повреждаемости. Авторы выделили узкополосное приближение и 4 группы методов для широкополосных процессов. Данный сравнительный анализ спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости достаточно подробный, однако есть другие источники, в которых приводится описание и сравнение методов [3, 39, 83].

Для узкополосных процессов нагружения применим спектральный метод, описанный Бендатом (Bendat) [40]. Для широкополосных процессов выражение Бендата можно корректировать поправочным коэффициентом. Эмпирическая формула для поправочного коэффициента получена Виршингом (Wirsching) и Лайтом (Light) [45] с помощью метода Монте – Карло. Другое выражение было разработано Орзизом (Ortiz) и Чен (Chen) [46]. Ещё два решения получены Тово (Tovo) и Бенашутти (Benasciutti): первое [47] в виде линейной комбинации узкополосного приближения и аппроксимации интенсивности усталостной повреждаемости Мадсена (Madsen) [125]; второе [124] – простая эмпирическая формула с использованием одного параметра.

Существуют спектральные методы расчёта усталостной повреждаемости, заключающиеся в аппроксимации плотности распределения амплитуды циклов, полученной МД. Разные выражения предложены Дирликом [51], Чжао (Zhao) и Бэйкером (Baker) [48], Парком (Park) [49], а также Чжун (Jun) и Парком [50].

Для полимодального широкополосного процесса нагружения усталостная повреждаемость от действия каждой компоненты может быть получена по формуле Бендата с учётом нелинейного суммирования спектральных составляющих для корректной оценки суммарной усталостной повреждаемости. Различные способы сложения вкладов спектральных составляющих были предложены Лотсбергом (Lotsberg) [41] и В. Л. Райхером [54].

В. Л. Райхер утверждал [7], что ГЛС и ГСС имеют один класс точности. ГСС лежит в основе одномоментного метода [43]. Дискретной формой одномоментного метода является метод проекции за проекцией [126]. Одномоментный метод широко применяется в отечественной авиационной отрасли [1, 53, 67, 127]. В обзорной работе [6] приводятся также метод Хан – Ма (Han, Ma) и метод полос, однако они эквивалентны одномоментному методу.

Существует также спектральный метод, основанный на реконструкции фазового спектра с помощью метода Монте – Карло и реализующий моделирование нагрузки во временной области через обратное преобразование Фурье [57, 128]. Определение усталостной долговечности выполняется на основе данных о нагрузках, представленных в частотной области, с учётом физических моделей расчёта сопротивления усталости, используемых во временной области. Фазовый спектр, необходимый для перехода во временную область, моделируется как совокупность независимых равномерно распределённых случайных величин.

Отличное от нуля постоянное среднее значение нагрузки оказывает воздействие на усталостную долговечность. Для учёта влияния данного фактора существует метод, заключающийся в масштабировании СПМ путём умножения её на коэффициент, характеризующий влияние среднего значения [59]. Различные выражения коэффициента были предложены Гербером, Квофи, Гудманом, Морроу, Содербергом, Смитом и другими [58, 59].

Метод фазовой реконструкции в отличие от остальных упомянутых спектральных методов учитывает ненулевое среднее значение нагрузки [57] и не требует масштабирования СПМ. А при использовании одномоментного метода возможно учесть ненулевое среднее значение нагрузки путём корректировки значений параметров кривой усталости [7]. Однако изменённые соотношения параметров не выражаются с помощью элементарных и специальных функций.

1.2 Понятие и гипотезы усталостной повреждаемости

На рисунке 1.1 показано циклическое нагружение – простой случай переменного нагружения $X(t)$, где t – время.

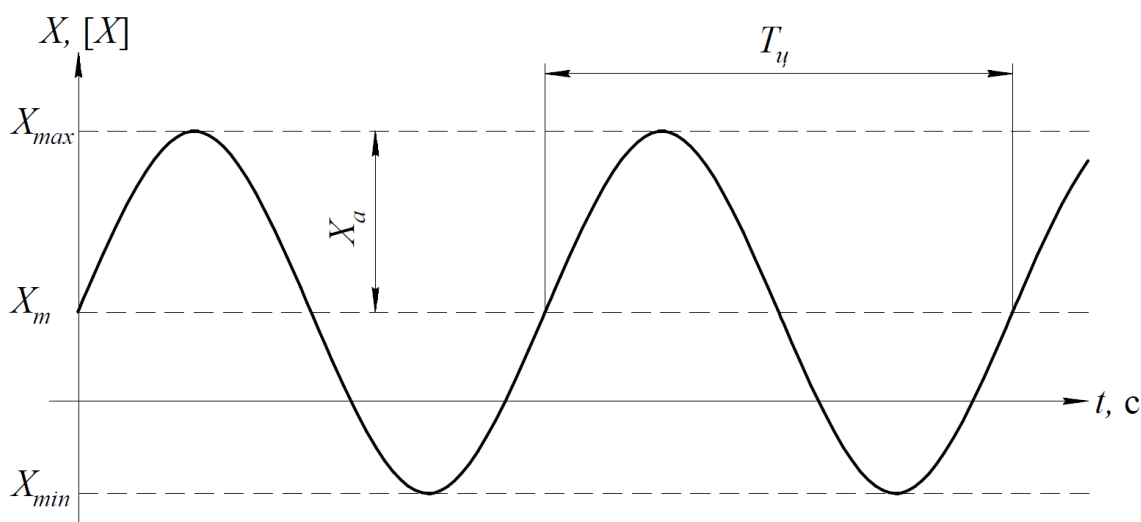


Рисунок 1.1 – Циклическое нагружение

Некоторые из характеристик цикла: T_u – период; X_{max} – наибольшее значение; X_{min} – наименьшее значение; $X_a = (X_{max} - X_{min}) / 2$ – амплитуда; $X_m = (X_{max} + X_{min}) / 2$ – среднее значение; $R = X_{min} / X_{max}$ – коэффициент асимметрии. В работе также упоминается размах – характеристика, равная $2 X_a$.

В качестве величины X при анализе усталости металлических конструкций часто используют внутреннее механическое напряжение. В основном применяют эквивалентные значения, например, интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}, \quad (1.1)$$

где σ_x , σ_y и σ_z – нормальные напряжения в направлении осей Ox , Oy и Oz ; τ_{xy} , τ_{yz} и τ_{xz} – касательные напряжения в плоскостях Oxy , Oyz и Oxz . При анализе усталости металлических конструкций используют и другие критерии, например, первое главное напряжение σ_1 , разность главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_3$ и др.

Для конструкций из композиционных материалов в качестве параметра X при известном деформированном состоянии в точке можно использовать деформацию. Например, интенсивность деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}, \quad (1.2)$$

где ε_x , ε_y и ε_z – линейные деформации в направлении осей Ox , Oy и Oz ; γ_{xy} , γ_{yz} и γ_{xz} – угловые деформации в плоскостях Oxy , Oyz и Oxz .

Для подробного анализа усталости необходимо определить поле напряжений (деформаций) во всём объёме анализируемого изделия.

Под усталостной повреждаемостью D понимают количественную безразмерную величину усталостных повреждений. В общем случае для циклического нагружения X она удовлетворяет зависимости

$$D = D(X, n), \quad (1.3)$$

где n – число повторений цикла.

Соотношение (1.3) можно представить в виде

$$D = D \left[\frac{n}{N(X)} \right], \quad (1.4)$$

где $N(X)$ – число циклов до разрушения. Процесс накопления усталостных повреждений называют автомодельным, если зависимость (1.4) описывается одним уравнением для разных уровней X . Таким свойством обладает степенной закон

$$D = \left(\frac{n}{N} \right)^{h_D} \quad (1.5)$$

при параметре $h_D = \text{const.}$ Частным случаем степенного (1.5) закона при $h_D = 1$ является линейный закон накопления усталостных повреждений

$$D = \frac{n}{N}. \quad (1.6)$$

В начальном состоянии материала $D = 0$, а критерием разрушения является условие равенства числа повторений цикла и числа повторений до разрушения

$$D = 1. \quad (1.7)$$

На практике часто используют обобщение критерия разрушения (1.7) в виде

$$D = D_p, \quad (1.8)$$

где D_p – эмпирически определяемая критическая величина, получаемая для разных структур нагружения, типов материала, уровней концентрации напряжений и т. д.

Недостатком линейного закона является равномерное возрастание усталостной повреждаемости, независящее от количества дефектов и трещин в материале. Согласно кусочно-линейному закону накопления усталостных повреждений предлагается рассматривать процесс исчерпания долговечности как последовательность двух этапов: зарождения трещины и её распространения. Критерий разрушения при этом выполняется последовательно для усталостных повреждаемостей первого D_I и второго D_{II} этапов.

Для определения циклической долговечности N проводят испытания на усталость. Кривую усталости получают с помощью испытаний на нескольких уровнях нагружения при постоянном значении коэффициента асимметрии R .

Результатом испытаний на усталость образца при воздействии на него симметричной нагрузки ($R = -1$) с амплитудой X_{a-1} является кривая усталости, уравнение которой может быть представлено в виде

$$N X_{a-1}^{m_{-1}} = A_{a-1}, \quad (1.9)$$

где A_{a-1} и m_{-1} – параметры кривой усталости, относящиеся к рассматриваемому месту конструкции. Далее в работе используются обозначения $A = A_{a-1}$ и $m = m_{-1}$.

Подстановкой выражения (1.9) в линейный закон накопления усталостных повреждений (1.6) получается соотношение

$$D = \frac{1}{A} n X_{a-1}^m. \quad (1.10)$$

При сравнении усталостной повреждаемости в одном и тоже же месте конструкции можно применять усталостную повреждаемость в размерной форме

$$\xi = n X_{a-1}^m. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.9) также применяют в логарифмических координатах, где оно превращается в уравнение прямой линии

$$\lg N = \lg A - m \lg X_{a-1}. \quad (1.12)$$

Область определения циклической долговечности разделяют на диапазоны значений: однократный $N = 10^0$, малоцикловый $10^0 < N < 10^3 \dots 10^4$, многоцикловый $10^3 \dots 10^4 < N < 10^6 \dots 10^7$ и сверхмногоцикловый $10^6 \dots 10^7 < N < 10^8 \dots 10^{10}$. Последний также называют гиперцикловым. В зависимости от области значений циклической долговечности N степень m может различаться.

В отечественном машиностроении испытания на усталость часто проводят при воздействии отнулевой растягивающей нагрузки ($R = 0$) с наибольшим за цикл значением X_{max_0} . Результатом испытаний является кривая усталости в виде

$$N X_{max_0}^{m_0} = A_{max_0}, \quad (1.13)$$

где A_{max_0} и m_0 – параметры кривой усталости, относящиеся к рассматриваемому месту конструкции.

Для металлических материалов значения степеней считают равными $m_0 = m_{-1} = m$, тогда как параметры A_{max_0} и A_{a-1} связывают соотношением

$$\frac{A_{max_0}}{A_{a-1}} = 2^{(1-\kappa)m}, \quad (1.14)$$

где κ – эмпирически получаемый параметр, учитывающий влияние среднего значения на усталостную долговечность при циклах с неотрицательными значениями нагружения. Для металлических материалов $\kappa \approx 0.5$.

В случае применения волокнистых композиционных материалов нельзя пренебрегать накоплением усталости в зоне отрицательных линейных деформаций. Испытания на усталость необходимо проводить также при воздействии сжимающей нагрузки, например, отнулевой ($R = \infty$).

Для материалов, используемых в силовой конструкции современных пассажирских самолётов материалов, известна связь между усталостными характеристиками

$$\lg A = \psi_1 m + \psi_2, \quad (1.15)$$

где ψ_1 и ψ_2 – постоянные коэффициенты. Для металлов и композитов в общем случае были получены значения коэффициентов $\psi_1 = 2.58$ и $\psi_2 = 0.28$.

Для построения кривых усталости испытания проводят при воздействии нагрузки с симметричными ($R = -1$) или с отнулевыми циклами ($R = 0, R = \infty$). Однако в эксплуатации много деталей функционируют при периодической нагрузке, отличной от данных. Появляется необходимость связать упомянутые нагрузки из испытаний и нагрузки с произвольным значением коэффициента R .

Такая связь для нагрузок, не превышающих пределы выносливости для разных значений коэффициента R , в расчётной практике реализуется с помощью диаграммы предельных амплитуд. Построение диаграммы выполняется в координатах X_m и X_a . Для металлических материалов требуется провести испытания минимум при двух значениях коэффициента асимметрии $R = -1, 1$ (значение $R = 1$ здесь соответствует статическому нагружению до разрушения). Если необходимо уточнить диаграмму, то целесообразно провести дополнительное испытание при $R = 0$ – отнулевом нагружении.

Для циклических нагрузок, амплитуда которых превышает предел выносливости, используют другой подход – ДПУД. Для металлических материалов широко применяется следующая ДПУД: обобщённая формула И. А. Одингга при неотрицательных средних значениях $X_m \geq 0$; линейная зависимость

амплитуды при наибольших значениях $0 < X_{max} < X_a$; пренебрежение накоплением усталости в зоне сжимающих напряжений $X_{max} \leq 0$ – асимметричный цикл нагружения ($R \neq -1$) приводится к симметричному с амплитудой

$$X_{a-1} = \begin{cases} X_a^{1-\kappa} X_{max}^{\kappa}, & X_m \geq 0; \\ X_a + b_m X_m, & -X_a < X_m < 0; \\ 0, & X_m \leq -X_a, \end{cases} \quad (1.16)$$

где b_m – эмпирически получаемый параметр, учитывающий влияние среднего значения процесса на усталостную долговечность при циклах нагружения со знакопеременными значениями. Для металлических материалов $b_m \approx 0.2$. Кусочно-заданная функция (1.16) получена путём аппроксимации экспериментально определённых кривых.

Описанная форма ДПУД для металлов в координатах X_m и X_a показана на рисунке 1.2. Стремление $X_m \rightarrow \infty$ при $X_a \rightarrow 0$ условно, поскольку при достижении средним значением X_m некоторой пороговой величины происходит выход за границы области многоциклового усталости. Также условно стремление $X_m \rightarrow -\infty$ при $X_a \rightarrow -\infty$, поскольку при значениях $X_m = -X_a$ эквивалентная амплитуда симметричного цикла $X_{a-1} = 0$.

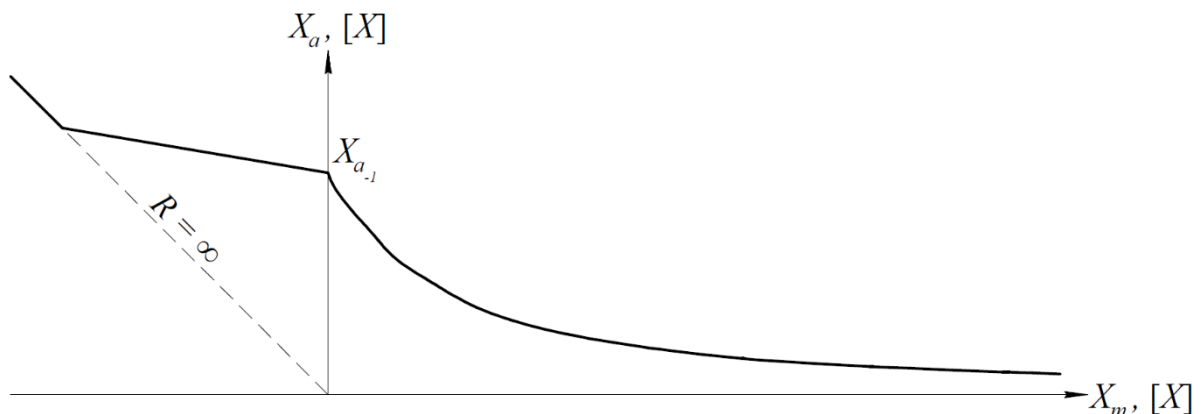


Рисунок 1.2 – ДПУД металлических материалов

ДПУД композиционных материалов в области знакопостоянных линейных деформаций ($0 \leq R \leq \infty$) имеет такой же вид, как и для металлических материалов при неотрицательных средних значениях $X_m \geq 0$. В диапазоне среднего значения $-X_a < X_m < X_a$ ($-\infty < R < 0$) необходим другой подход. Если испытания проведены только при двух значениях коэффициента $R = 0, \infty$, то можно использовать метод расчёта при наименьшей усталостной долговечности для двух типов испытаний.

На конструкции самолёта в полёте воздействует случайное нагружение, которое можно представить в виде совокупности различных по характеристикам циклов, т. е. заменить его некоторым схематизированным процессом, эквивалентным реальному по уровню вносимых усталостных повреждений. Данному схематизированному процессу соответствуют функции распределения характеристик цикла, таких как амплитуда X_a , среднее значение X_m и др.

Классификация методов схематизации случайного процесса нагружения приведена в ГОСТ 25.101 (см. рисунок 1.3). Однопараметрические методы сводятся к нахождению функции распределения одной случайной величины (при выборе амплитуды X_a не учитывается влияние среднего значения X_m , и наоборот), двухпараметрические – к нахождению функции распределения двух случайных величин (например, амплитуды X_a и среднего значения X_m).

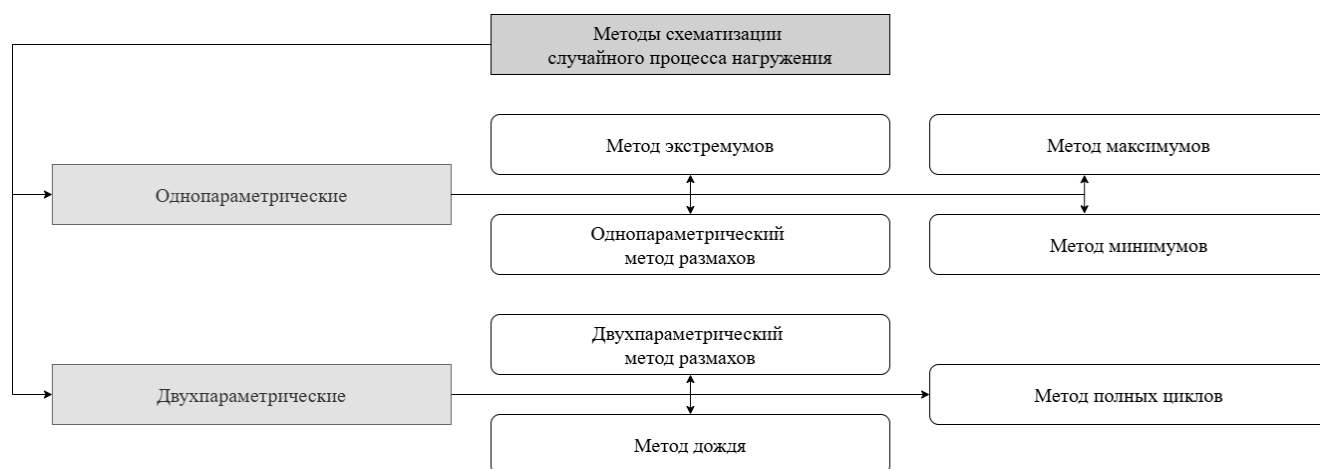


Рисунок 1.3 – Классификация методов схематизации случайного процесса нагружения

К однопараметрическим относят: метод экстремумов, метод максимумов, метод минимумов, однопараметрический метод размахов; к двухпараметрическим: МПЦ, МД и двухпараметрический метод размахов. Преимуществом МПЦ является высокая скорость вычислений. Тогда как МД позволяет проводить схематизацию в режиме реального времени: запоминать траектории «потоков дождя» и продолжать обработку по мере ввода новых экстремумов.

Таким образом, возможно применение различных методов схематизации, но при необходимости совместного учёта амплитуды и среднего значения подходят двухпараметрические методы. При этом общее число выделенных циклов соотносится с количеством экстремумов n_{ε} ,

$$\sum_{j=1}^{n_{\varepsilon}} n_j = \frac{n_{\varepsilon} - 1}{2}, \quad (1.17)$$

где n_{ε} – количество циклов с различными характеристиками; n_j – количество повторений j -го цикла.

Поскольку на элементы конструкции самолёта в процессе эксплуатации воздействует совокупность различных по характеристикам циклов нагружения, то для получения усталостной повреждаемости нужно сложить действия всех циклов. Первый подход заключается в поиске экстремумов процесса нагружения, его схематизации и дальнейшей обработке по одной из моделей суммирования усталостных повреждений. Условием применения такого подхода является наличие временной зависимости рассматриваемого процесса нагружения – реализации. Второй подход предполагает переход в частотную область с получением вероятностных характеристик случайного процесса и проведением расчёта согласно одному из разнообразных спектральных методов. Применение данного подхода накладывает ограничения на процесс нагружения. Однако к преимуществам можно отнести отсутствие необходимости наличия временной реализации процесса и меньшее количество компьютерных вычислений.

1.2.1 Гипотезы суммирования усталостных повреждений

Известно несколько моделей суммирования усталостных повреждений. Они основаны на рассмотренных ранее законах накопления усталостных повреждений.

Согласно ГЛС усталостных повреждений для выражения усталостной повреждаемости D от действия циклов нагружения с разными значениями коэффициента асимметрии R используется линейный закон (1.6)

$$D = \sum_{j=1}^{n_u} D_j = \sum_{j=1}^{n_u} \frac{n_j}{N_j}, \quad (1.18)$$

где D_j – усталостная повреждаемость от действия j -го цикла; N_j – циклическая долговечность при нагружении только j -м циклом.

Несмотря на применимость и простоту ГЛС, она не является совершенной. Помимо недостатка линейного закона накопления усталостных повреждений (1.6), заключающегося в независимости усталостной повреждаемости от количества дефектов и трещин в материале, другим недостатком ГЛС является независимость усталостной повреждаемости от порядка воздействия циклов нагружения.

Альтернативой ГЛС является ГКЛС, согласно которой процесс исчерпания усталостной долговечности разделяется на этапы зарождения трещины и её распространения. Данное предположение основано на кусочно-линейном законе накопления усталостных повреждений.

Также существует ГСТС, основанная на степенном законе накопления (1.5), согласно которой действие разных циклов нагружения оценивается нелинейно, с возведением в степень $h_D^{(j)}$, зависящую от характеристик j -го цикла нагружения

$$D = \sum_{j=1}^{n_u} D_j = \sum_{j=1}^{n_u} \left(\frac{n_j}{N_j} \right)^{h_D^{(j)}}. \quad (1.19)$$

1.2.2 Спектральные методы расчёта усталостной повреждаемости

Приведённые соотношения справедливы для стационарного нормального случайного процесса $X(t)$ с нулевым средним значением. Для его описания используется понятие СПМ $W_X(\omega)$ с радиальной частотой ω в качестве аргумента. Двусторонняя $W_X(\omega)$ и односторонняя $S_X(\omega)$ СПМ связаны соотношением вида

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0; \\ W_X(\omega), & \omega = 0; \\ 2W_X(\omega), & \omega > 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Спектральный момент процесса связан со СПМ следующим образом

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^j W_X(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \omega^j S_X(\omega) d\omega, \quad (1.21)$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$ – порядок момента.

При $j = 0, 2, 4$ спектральные моменты (1.21) совпадают с дисперсией σ_X^2 случайного процесса $X(t)$ и дисперсиями его производных

$$\sigma_X^2 = \mu_0; \sigma_{\dot{X}}^2 = \mu_2; \sigma_{\ddot{X}}^2 = \mu_4. \quad (1.22)$$

Частота восходящего пересечения нуля ν_0^+ и частота максимумов ν_{max} (выражены в Гц) определяются как

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0}}; \nu_{max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_4}{\mu_2}}. \quad (1.23)$$

Для описания ширины спектра случайного процесса используется коэффициент ширины спектра

$$\alpha_j = \frac{\mu_j}{\sqrt{\mu_0 \mu_{2j}}}, \quad (1.24)$$

частным случаем которого при $j = 2$ является коэффициент нерегулярности

$$\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_0 \mu_4}} = \frac{\nu_0^+}{\nu_{max}}. \quad (1.25)$$

Для узкополосного процесса коэффициент нерегулярности α_2 близок к единице, а для широкополосного – стремится к нулю с увеличением ширины спектра. Вводится также параметр ширины спектра

$$\epsilon = \sqrt{1 - \alpha_2^2}. \quad (1.26)$$

Важное различие между узкополосным и широкополосным случайными процессами проявляется в их плотности распределения максимумов. Для общего случая широкополосного процесса согласно Райсу

$$f_{max}(X) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} e^{-\frac{X^2}{2\sigma_X^2 \epsilon^2}} + \frac{\alpha_2 X}{\sigma_X^2} e^{-\frac{X^2}{2\sigma_X^2}} \Phi\left(\frac{\alpha_2 X}{\sigma_X \epsilon}\right), \quad (1.27)$$

где $\Phi(c)$ – интегральная функция распределения стандартной нормальной случайной величины c

$$\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (1.28)$$

Для исследуемых процессов целесообразно ввести математическое ожидание (оператор $M[\]$) усталостной повреждаемости, применяя ГЛС (1.18) с учётом $n_j = 1$ ($j = \overline{1, n_u}$) и используя данные о кривой усталости, например, (1.9)

$$D = M \left[\sum_{j=1}^{n_u} \frac{1}{N_j(X_a^{(j)})} \right] = \frac{1}{A} M \left[\sum_{j=1}^{n_u} (X_a^{(j)})^m \right] = \frac{\bar{n}}{A} M [X_a^m], \quad (1.29)$$

где $\bar{n} = M[n_u]$ – среднее число циклов нагружения $X(t)$, подсчитанное за период времени T . Тогда m -й момент амплитуды циклов задается как

$$M[X_a^m] = \int_0^{\infty} X^m f_a(X) dX, \quad (1.30)$$

где $f_a(X)$ – плотность распределения амплитуды циклов. Момент $M[X_a^m]$ может быть получен как во временной, так и в частотной областях. В общем случае анализ во временной области является более трудоёмким.

В частотной области целесообразно использовать понятие интенсивности усталостной повреждаемости, которая, с учётом (1.29) и (1.30), равна

$$d = \frac{D}{T} = \frac{\nu_{max}}{A} \int_0^{\infty} X^m f_a(X) dX. \quad (1.31)$$

Данное выражение справедливо для стационарного нормального случайного процесса X , поскольку его частота максимумов удовлетворяет выражению

$$\nu_{max} = \frac{\bar{n}}{T}. \quad (1.32)$$

На рисунке 1.4 представлена классификация спектральных методов: метод узкополосного приближения (УП), фазовая реконструкция методом Монте – Карло, метод Виршинга – Лайта (ВЛ), метод Ортиза – Чен (ОЧ), метод Тово – Бенашутти (ТБ), метод $\alpha_{0.75}$, метод Дирлика (ДК), метод Чжао – Бэйкера (ЧБ), метод Парка (ПК), метод Чжун – Парка (ЧП), метод Лотсберга (ЛБ), одномоментный метод (ОМ), метод Хан – Ма, метод полос, метод Цзяо (Jiao) – Моан (Moan), метод Сакаи (Sakai) – Окамура (Okamura), метод Фу (Fu) – Кебона (Sebon), модифицированный метод Фу – Кебона, метод Лоу (Low), бимодальный метод Лоу, метод Гао (Gao) – Моан.

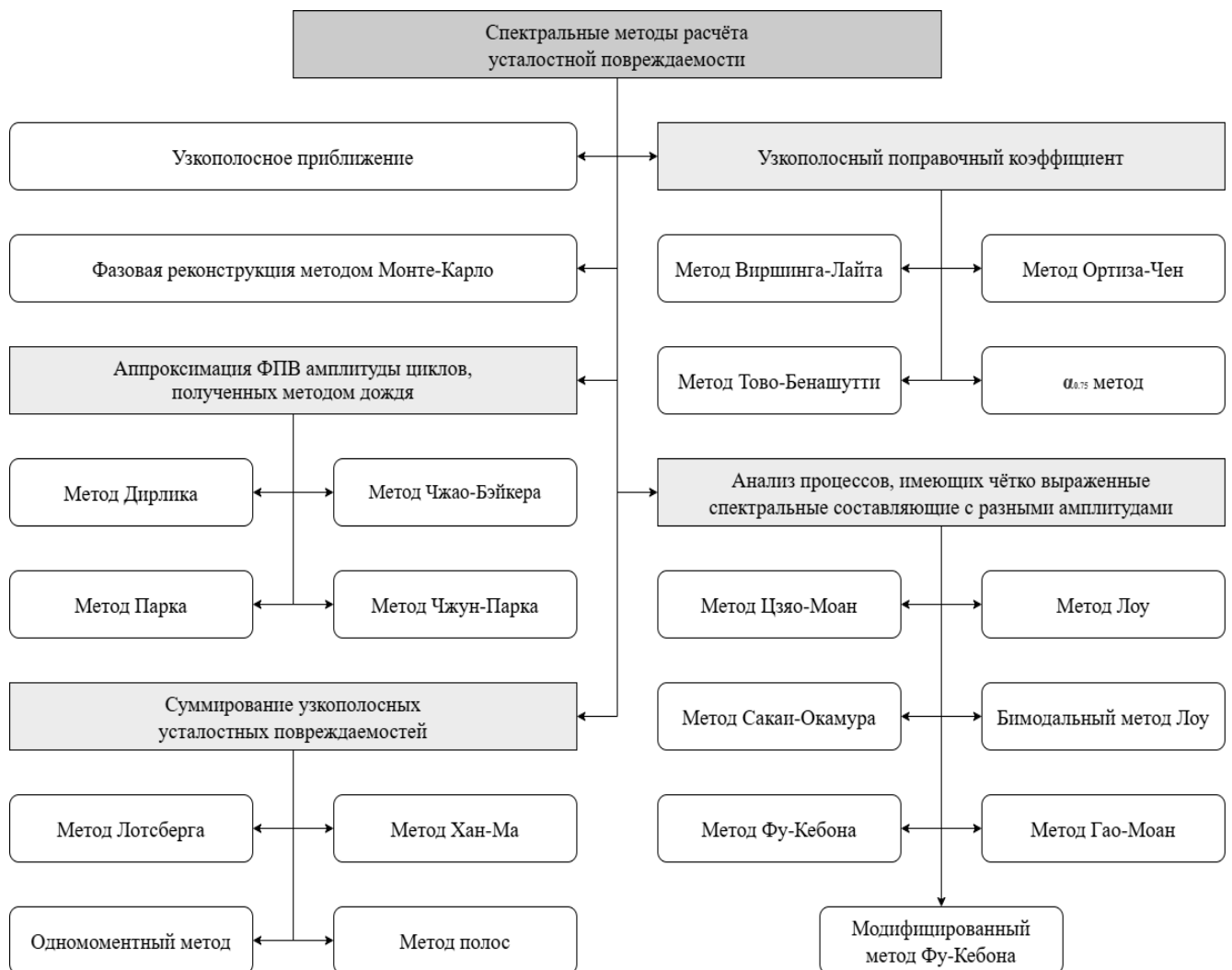


Рисунок 1.4 – Классификация спектральных методов

Спектральные методы расчёта усталостной повреждаемости от действия процессов, имеющих чётко выраженные НЧ и ВЧ составляющие с разными амплитудами, не рассматриваются, т. к. их применение для конструкции самолёта ограничено (в отличие, например, от анализа прочности вертолётных).

Фазовая реконструкция методом Монте – Карло не приводится, поскольку метод требует большого количества вычислений, а также является алгоритмом, не подходящим для представления в виде формулы при разработке метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.

В случае узкополосного случайного процесса частота пересечения нуля с положительным наклоном и частота максимумов (1.23) совпадают, как и плотности распределения амплитуд и максимумов циклов

$$\nu_0^+ = \nu_{\max}; f_a(X) = f_{\max}(X), \quad (1.33)$$

и распределение Райса (1.31) превращается в распределение Рэлея (Rayleigh)

$$f_a^{YII}(X) = \frac{X}{\sigma_X^2} e^{-\frac{X^2}{2\sigma_X^2}}. \quad (1.34)$$

Интенсивности усталостной повреждаемости интегрированием соотношения (1.31) с учётом выражений (1.22) и (1.34) представляется в виде

$$d_{YII} = \frac{\nu_0^+ (2\mu_0)^{\frac{m}{2}}}{A} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right), \quad (1.35)$$

где $\Gamma(c)$ – гамма-функция Эйлера аргумента c

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1} e^{-t} dt. \quad (1.36)$$

Применение метода УП (1.35) для случая широкополосного случайного процесса приводит к получению неверного значения интенсивности усталостной повреждаемости. Поэтому выражение корректируют следующим образом

$$d_{метод} = \rho_{метод} d_{УП}, \quad (1.37)$$

где $\rho_{метод}$ – поправочный коэффициент метода.

Согласно методу Виршинга – Лайта поправочный коэффициент выражается с использованием параметра ширины спектра ϵ (1.26) в виде

$$\rho_{БЛ} = a_{БЛ} + [1 - a_{БЛ}] (1 - \epsilon)^{b_{БЛ}}, \quad (1.38)$$

где $a_{БЛ}$ и $b_{БЛ}$ – параметры, эмпирически определённые для ряда значений степени кривой усталости $m = 3, 4, 5, 6$

$$a_{БЛ} = 0.926 - 0.033m; b_{БЛ} = 1.587m - 2.323. \quad (1.39)$$

Выражение для поправочного коэффициента согласно методу Орзиза – Чен содержит коэффициент нерегулярности α_2

$$\rho_{ОЧ} = \frac{\beta_{ОЧ}^m}{\alpha_2}, \quad (1.40)$$

где $\beta_{ОЧ}$ – обобщённый коэффициент ширины спектра, зависящий от степени кривой усталости m

$$\beta_{ОЧ} = \sqrt{\frac{\mu_2 \mu_{2/m}}{\mu_0 \mu_{2/m+2}}}. \quad (1.41)$$

Согласно методу Тово – Бенашутти поправочный коэффициент равен

$$\rho_{TB} = b_{TB}^{(j)} + (1 - b_{TB}^{(j)}) \alpha_2^{m-1}, \quad (1.42)$$

где $b_{TB}^{(j)}$ – параметр, для которого авторами предложены две формулировки

$$b_{TB}^{(1)} = \min \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1}, 1 \right\};$$

$$b_{TB}^{(2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \{ 1.112 [1 + \alpha_1 \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)] e^{2.11 \alpha_2} + (\alpha_1 - \alpha_2) \}}{(1 - \alpha_2)^2}. \quad (1.43)$$

Тово и Бенашутти также была предложена простая эмпирическая формула с использованием коэффициента ширины спектра α_j (1.24) порядка $j = 0.75$

$$\rho_{\alpha_{0.75}} = \alpha_{0.75}^2. \quad (1.44)$$

Таким образом, для определения поправочного коэффициента (1.37) формулы метода УП (1.35) приведено 4 метода: (1.38), (1.40), (1.42) и (1.44).

Далее рассматривается группа спектральных методов, в которых для интегрирования выражения (1.30) разными способами аппроксимируется плотность распределения амплитуды циклов, полученная МД, $f_a^{MD}(X)$.

Дирликом разработана эмпирическая формула

$$f_a^{DK}(Z) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \left(\frac{G_1}{G_5} e^{-\frac{Z}{G_5}} + \frac{G_2 Z}{G_4^2} e^{-\frac{Z^2}{2 G_4^2}} + G_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \right), \quad (1.45)$$

где $Z = X / \sqrt{\mu_0}$ – нормированная амплитуда; G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 – параметры, полученные на основе численных экспериментов

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{2(\nu_m - \alpha_2^2)}{1 + \alpha_2^2}; G_2 = \frac{1 - \alpha_2 - G_1 + G_1^2}{1 - G_4}; G_3 = 1 - G_1 - G_2; \\
G_4 &= \frac{\alpha_2 - \nu_m - G_1^2}{1 - \alpha_2 - G_1 + G_1^2}; G_5 = \frac{1.25(\alpha_2 - G_3 - G_2 G_4)}{G_1},
\end{aligned} \tag{1.46}$$

здесь ν_m – относительная средняя частота (безразмерна), равная

$$\nu_m = \frac{\mu_1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_4}}. \tag{1.47}$$

Тогда интенсивность усталостной повреждаемости можно получить путём интегрирования выражения (1.31) с учётом (1.45)

$$d_{DK} = \frac{\nu_{max} \mu_0^{\frac{m}{2}}}{A} \left[G_1 G_5^m \Gamma(1+m) + 2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) (G_2 |G_4|^m + G_3) \right]. \tag{1.48}$$

В методе Чжао – Бэйкера плотность распределения представляется в виде линейной комбинации распределения Вейбулла (Weibull) и распределения Рэлея

$$f_a^{ЧБ}(Z) = \Omega_{ЧБ} \alpha_{ББ} \beta_{ББ} Z^{\beta_{ББ}-1} e^{-\alpha_{ББ} Z^{\beta_{ББ}}} + (1 - \Omega_{ЧБ}) Z e^{-\frac{Z^2}{2}}, \tag{1.49}$$

где $\Omega_{ЧБ}$ – весовой коэффициент; $\alpha_{ББ}$, $\beta_{ББ}$ – коэффициенты распределения Вейбулла (ББ)

$$\begin{aligned}
\Omega_{ЧБ} &= \frac{1 - \alpha_2}{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta_{ББ}}\right) \alpha_{ББ}^{\frac{1}{\beta_{ББ}}}}; \\
\alpha_{ББ} &= 8 - 7 \alpha_2; \beta_{ББ} = \begin{cases} 1.1, & \alpha_2 < 0.9; \\ 1.1 + 9(\alpha_2 - 0.9), & \alpha_2 \geq 0.9. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.50}$$

В этом случае усталостная повреждаемость в единицу времени после интегрирования выражения (1.31) и с учётом соотношения (1.49) равна

$$d_{чБ} = \frac{\nu_{\max} \mu_0^{\frac{m}{2}}}{A} \left[\Omega_{чБ} \alpha_{ББ}^{\frac{m}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{m}{\beta_{ББ}}\right) + (1 - \Omega_{чБ}) 2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \right]. \quad (1.51)$$

В методе Парка объединены три распределения для аппроксимации плотности распределения амплитуды циклов, полученной МД: рэлеевское, стандартное рэлеевское и полугауссово распределения

$$f_a^{ПК}(Z) = C_{G_1} \frac{Z}{\sigma_{G_1}^2} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma_{G_1}^2}} + C_{G_2} Z e^{-\frac{Z^2}{2}} + C_{G_3} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{G_3}} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma_{G_3}^2}}, \quad (1.52)$$

где $C_{G_1}, C_{G_2}, C_{G_3}, \sigma_{G_1}, \sigma_{G_3}$ – параметры, полученные на основе численных экспериментов

$$C_{G_1} = \frac{\bar{M}[Z^2] - \bar{M}[Z^3]}{\sigma_{G_1}^2(1 - \sigma_{G_1})}; C_{G_2} = \frac{-\sigma_{G_1} \bar{M}[Z^2] + \bar{M}[Z^3]}{1 - \sigma_{G_1}}; C_{G_3} = 1 - C_{G_1} - C_{G_2}; \quad (1.53)$$

$$\sigma_{G_1} \approx \alpha_2; \sigma_{G_3} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1.5)}{C_{G_3} \Gamma(1)} (\bar{M}[Z] - C_{G_1} \sigma_{G_1} - C_{G_2})$$

и $\bar{M}[c^j]$ – j -й нормированный момент случайной величины c

$$\bar{M}[c^j] = \frac{\int_0^\infty c^j f_a^{МД}(c) dc}{\int_0^\infty c^{j+1} e^{-\frac{c^2}{2}} dc}; \quad (1.54)$$

$$\bar{M}[Z] \approx \alpha_2; \bar{M}[Z^2] \approx \alpha_{0.95} \alpha_{1.97}; \bar{M}[Z^3] \approx \alpha_{0.54} \alpha_{0.93} \alpha_{1.95}.$$

Интенсивность усталостной повреждаемости рассчитывается с помощью интегрирования выражения (1.31) с учётом соотношения (1.52)

$$d_{ПК} = \frac{\nu_{max} (2\mu_0)^{\frac{m}{2}}}{A} \left[\frac{C_{G_3}}{\sqrt{\pi}} \sigma_{G_3}^m \Gamma\left(\frac{1+m}{2}\right) + C_{G_1} \sigma_{G_1}^m \Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right) + C_{G_2} \Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right) \right]. \quad (1.55)$$

Спектральный метод Чжун – Парка аналогичен методу Парка за исключением того, что плотность распределения амплитуды циклов, полученная МД, аппроксимируется дополнительным экспоненциальным членом

$$f_a^{ЧП}(Z) = Q_c \left(J_1 \frac{1}{\sigma_{E_1}} e^{-\frac{Z}{\sigma_{E_1}}} + J_2 \frac{Z}{\sigma_{E_2}^2} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma_{E_2}^2}} + J_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}} + J_4 \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma_{E_3}} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma_{E_3}^2}} \right), \quad (1.56)$$

где Q_c – поправочный коэффициент; $J_1, J_2, J_3, J_4, \sigma_{E_1}, \sigma_{E_2}, \sigma_{E_3}$ – параметры, полученные на основе численных экспериментов

$$\begin{aligned} Q_c &= 0.903 - 0.28(\alpha_1 - \alpha_2) + 4.448(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 15.739(\alpha_1 - \alpha_2)^3 + \\ &+ 19.57(\alpha_1 - \alpha_2)^4 - 8.054(\alpha_1 - \alpha_2)^5 + 1.013\alpha_2 - 4.178\alpha_2^2 + 8.362\alpha_2^3 - \\ &- 7.993\alpha_2^4 + 2.886\alpha_2^5; \\ J_1 &= \frac{2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2)}{1 + \alpha_2^2}; J_2 = \frac{\bar{M}[Z^2] - \bar{M}[Z^3]}{\sigma_{E_2}^2(1 - \sigma_{E_2})}; J_3 = \frac{-\sigma_{E_2}\bar{M}[Z^2] + \bar{M}[Z^3]}{1 - \sigma_{E_2}}; \\ J_4 &= 1 - J_1 - J_2 - J_3; \sigma_{E_1} = \frac{1}{C(1)J_1} (\bar{M}[Z] - J_2\sigma_{E_2} - J_3 - B(1)J_4\sigma_{E_3}); \\ \sigma_{E_2} &\approx \alpha_2; \sigma_{E_3} = \frac{1}{B(1)J_4} (\bar{M}[Z] - J_1^2 - J_2\sigma_{E_2} - J_3), \end{aligned} \quad (1.57)$$

здесь $B(c) = \Gamma[(1+c)/2] / [\sqrt{\pi} \Gamma(1+c/2)]$, $C(c) = \Gamma(1+c) / [(2\pi)^{c/2} \Gamma(1+c/2)]$ – вспомогательные функции аргумента c для обозначений.

Тогда усталостную повреждаемость в единицу времени можно получить путём интегрирования выражения (1.31) с учётом (1.56)

$$d_{\text{уп}} = \frac{Q_c \nu_{\max} (2\mu_0)^{\frac{m}{2}}}{A} \left[\frac{J_1}{2^{\frac{m}{2}}} \sigma_{E_1}^m \Gamma(1+m) + \right. \\ \left. + J_2 \sigma_{E_2}^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) + J_3 \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) + \frac{J_4}{\sqrt{\pi}} \sigma_{E_3}^m \Gamma\left(\frac{1+m}{2}\right) \right]. \quad (1.58)$$

Таким образом, для расчёта интенсивности усталостной повреждаемости приведено 4 метода аппроксимации плотности распределения амплитуды циклов, полученной МД: (1.48), (1.51), (1.55) и (1.58).

Если спектр широкополосного процесса нагружения полимодальный, то для получения усталостных повреждаемостей от действия каждой из составляющих может быть использован метод УП (1.35). Однако линейная сумма полученных значений не даёт корректную оценку суммарной усталостной повреждаемости. Простым примером является бимодальный случайный процесс

$$X(t) = X_{\text{НЧ}}(t) + X_{\text{ВЧ}}(t); S_X(\omega) \approx S_X^{\text{НЧ}}(\omega) + S_X^{\text{ВЧ}}(\omega), \quad (1.59)$$

где $X_{\text{НЧ}}(t)$, $X_{\text{ВЧ}}(t)$ – НЧ и ВЧ составляющие процесса $X(t)$; $S_X^{\text{НЧ}}(\omega)$, $S_X^{\text{ВЧ}}(\omega)$ – СПМ НЧ и ВЧ составляющих процесса. Знак точного равенства в выражении СПМ $S_X(\omega)$ был бы справедлив для дельта-коррелированных составляющих процесса.

Тогда j -й спектральный момент (1.21) можно представить в форме

$$\mu_j \approx \int_0^\infty \omega^j [S_X^{\text{НЧ}}(\omega) + S_X^{\text{ВЧ}}(\omega)] d\omega = \mu_j^{\text{НЧ}} + \mu_j^{\text{ВЧ}}, \quad (1.60)$$

где $\mu_j^{\text{НЧ}}$, $\mu_j^{\text{ВЧ}}$ – j -е спектральные моменты НЧ и ВЧ составляющих процесса.

Частота пересечения процессом нуля с положительным наклоном и частота максимумов (1.23) для соответствия НЧ и ВЧ составляющим (1.59), с учётом выражения (1.60), выражаются в виде

$$\nu_0^{+\partial uan} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_2^{\partial uan}}{\mu_0^{\partial uan}}}; \nu_{\max}^{\partial uan} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_4^{\partial uan}}{\mu_2^{\partial uan}}}, \quad (1.61)$$

где индекс «*duan*» обозначает НЧ или ВЧ диапазоны.

Таким образом, представление процесса X в виде двух слагаемых приводит к нелинейному изменению параметров, описывающих случайный процесс, например, частоты пересечения процессом нуля с положительным наклоном и частоты максимумов (1.61). По этой причине линейное суммирование значений усталостной повреждаемости отдельных спектральных составляющих не является корректной оценкой суммарной усталостной повреждаемости полимодального процесса нагружения.

Согласно методу Лотсберга интенсивность усталостной повреждаемости представлена как нелинейная комбинация интенсивностей усталостной повреждаемости от действия НЧ и ВЧ составляющих

$$d_{\text{ЛБ}} = d_{\text{УП}}^{BЧ} \left(1 - \frac{\nu_0^{+HЧ}}{\nu_0^{+BЧ}} \right) + \nu_0^{+HЧ} \left[\left(\frac{d_{\text{УП}}^{BЧ}}{\nu_0^{+BЧ}} \right)^{\frac{1}{m}} + \left(\frac{d_{\text{УП}}^{HЧ}}{\nu_0^{+HЧ}} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^m, \quad (1.62)$$

где $d_{\text{УП}}^{HЧ}$, $d_{\text{УП}}^{BЧ}$ – интенсивности усталостной повреждаемости от действия НЧ и ВЧ составляющих соответственно, полученные по соотношению для узкополосного приближения (1.35) с учётом выражений (1.60) и (1.61).

Однако применение данного метода при анализе прочности самолётов ограничено, поскольку процессы нагружения конструкции широкополосные и часто не могут быть представлены в виде суммы двух узкополосных спектральных составляющих.

В основе одномоментного метода лежит ГСС, предложенная В. Л. Райхером. Выражение для интенсивности усталостной повреждаемости от действия полигармонического процесса (ПГ) нагружения с амплитудами $A_X^{(j)}$, полученное с использованием энергетического подхода,

$$d_{ПГ} = \frac{1}{2\pi A} \left[\sum_{j=1}^{n_z} \omega_j^{\frac{2}{m}} \left(A_X^{(j)} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}}, \quad (1.63)$$

где n_z – число гармоник, обобщается для случайных процессов соотношением, содержащим единственный спектральный момент $\mu_{2/m}$

$$d_{ОМ} = \frac{1}{2\pi A} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \left(2\mu_{\frac{2}{m}} \right)^{\frac{m}{2}}. \quad (1.64)$$

Стоит отметить, что метод применим для стационарных эргодических процессов (необязательно гауссовских). Выражение ОМ метода (1.64) сводится к методу УП (1.35) для:

- узкополосного процесса с центральной частотой ω_0 , поскольку

$$\nu_0^+ = \frac{\omega_0}{2\pi}; \quad \left(\mu_{\frac{2}{m}} \right)^{\frac{m}{2}} \approx \omega_0 \mu_0^{\frac{m}{2}}; \quad (1.65)$$

- широкополосного процесса при степени кривой усталости $m=1$, т. к.

$$\mu_{\frac{2}{m}} = \mu_2; \quad \left(\mu_{\frac{2}{m}} \right)^{\frac{m}{2}} = 2\pi \nu_0^+ \sqrt{\mu_0}. \quad (1.66)$$

Используя выражение для спектрального момента (1.21), можно получить дискретную форму одномоментного метода – метод проекции за проекцией (ПП)

$$d_{III} = \frac{1}{2\pi A} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \left[2 \sum_{j=1}^{n_z} \left(\omega_j^{\frac{2}{m}} S_x(\omega_j) \Delta\omega \right) \right]^{\frac{m}{2}}. \quad (1.67)$$

Таким образом, рассмотрено 2 метода, где интенсивность усталостной повреждаемости получена суммированием узкополосных величин: (1.62) и (1.64).

Всего в данном параграфе работы представлены 11 спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости.

1.3 Влияние факторов нагружения на усталостную долговечность

Важными проблемами является влияние постоянного среднего значения и НА колебаний нагрузки на усталостную долговечность. В процессе эксплуатации ЛА подвергается воздействию нагрузок различной величины. Манёвры самолёта обуславливают появление ВА нагрузок. Тогда как вибрация и шум двигателей приводят к возникновению большого количества НА нагрузок, имеющих высокое среднее значение. Такие внешние НА нагрузки вызывают в ряде элементов конструкции самолёта (например, в балке пилона двигателя) большое количество НА циклов напряжения с высокими средними значениями.

1.3.1 Постоянное среднее значение

Существует метод, заключающийся в умножении СПМ процесса на коэффициент, характеризующий влияние постоянного среднего значения. Данное масштабирование СПМ нагрузки $S_x(\omega)$ проводится следующим образом

$$S_X^*(\omega) = K_{метод}^2(\bar{X}) S_X(\omega), \quad (1.68)$$

где $S_X^*(\omega)$ – односторонняя СПМ нагрузки с учётом постоянного среднего значения; $K_{метод}(\bar{X})$ – масштабирующий коэффициент, учитывающий влияние постоянного среднего значения $\bar{X}$.

На рисунке 1.5 перечислены различные формулировки выражения коэффициента учёта ненулевого среднего значения нагрузки $K_{метод}$.



Рисунок 1.5 – Варианты коэффициента ненулевого среднего значения

Важной особенностью метода фазовой реконструкции является возможность учесть ненулевое среднее значение нагрузки. Данный метод не требует описанного масштабирования СПМ.

Для учёта ненулевого среднего значения нагрузок при использовании одномоментного метода возможно корректировать значения параметров кривой усталости

$$m^* = m^*(\bar{X}); A^* = A^*(\bar{X}). \quad (1.69)$$

Однако данные соотношения не выражаются с помощью элементарных и специальных функций, и получение некоторых конечных формул оказывается невозможным.

1.3.2 Низкоамплитудные колебания

В результате расчёта усталостной повреждаемости с применением широко распространённой ГЛС усталостных повреждений в совокупности с учётом асимметрии циклов нагружения (например, с использованием ДПУД) можно получить значительный вклад описанных НА нагрузок в суммарное значение усталостной повреждаемости. Это может не соответствовать опыту эксплуатации. Проблема анализа усталости в случае наложения НА колебаний на многоцикловое нагружение малоизучена.

Следует отметить, что количество регистрируемых НА циклов нагружения может зависеть от частоты регистрации данных и чувствительности используемых измерительных систем. При анализе информации с таких систем важно применять корректные способы фильтрации и обработки данных.

Однако проблема независимого воздействия НА нагрузок исследована более подробно. Известно, что при действии большого количества НА колебаний может наблюдаться смена механизма зарождения усталостной трещины. Для значений усталостной долговечности из диапазона, соответствующего области СМЦУ, наблюдается смена механизма зарождения усталостной трещины у образцов: если в области многоциклового усталости зарождение усталостной трещины происходит на поверхности образца, то в случае СМЦУ очаг трещины формируется под поверхностью.

Случай наложения НА циклов на циклы с большей амплитудой исследован посредством численных экспериментов с помощью МКЭ. При рассмотрении трёх различных вариантов развития усталостных повреждений: на поверхности тела; внутри него (механизм СМЦУ); комбинированный режим (зарождение очага

повреждений происходит по механизму СМЦУ, а затем от этого возникшего концентратора напряжений усталостная трещина развивается до выхода на поверхность) – показано, что наименьшие значения долговечности характерны для третьего комбинированного режима. При этом разрушение в области СМЦУ происходит при уровне напряжений ниже предела выносливости, хотя согласно классическому подходу подобные режимы не должны представлять опасности.

Зарождение трещин, происходящее не на поверхности тела, а в его объёме, вызвано наличием геометрических концентраторов структуры: в матрице, на границах зёрен или от включений. Также возможно разрушение от поверхности, если она опережает внутренние объёмы по накоплению микродефектов.

Значительная экспериментальная база получена для повторно-статических, малоцикловых и многоцикловых усталостных разрушений, а для периодического нагружения с количеством циклов в диапазоне СМЦУ из-за длительности и сложности испытаний объём выполненных экспериментов мал.

Таким образом, при рассмотрении проблемы воздействия НА колебаний из области СМЦУ на металлические конструкции отмечается, что характерной особенностью усталостного разрушения является смена механизма зарождения трещины. В случае наложения НА колебаний на многоцикловое ВА нагружение выявлено, что зарождение очага повреждений происходит по механизму СМЦУ, а от него усталостная трещина развивается до выхода на поверхность.

Существуют рекомендации по нелинейному учёту влияния НА нагрузок на усталостную долговечность. Например, использование предела выносливости, предполагающее существование некоторой пороговой величины амплитуды цикла, при нагружении циклами с амплитудами ниже которой накопление усталостных повреждений не происходит. При этом кривая усталости представляется в виде двух участков: наклонного с некоторым коэффициентом m и горизонтального.

Однако данный подход имеет ряд ограничений. Во-первых, значение предела выносливости зависит от спектра нагружения: наличие в нём больших по амплитудам циклов может приводить к снижению значения данного параметра. Во-вторых, предел выносливости обычно определяют при синусоидальном

отнулевом нагружении. Для уточнения значения в случае сложного нерегулярного нагружения требуются дополнительные экспериментальные исследования.

Следует отметить, что наличие предела выносливости показано лишь для некоторых конструкционных материалов, а определение его значений сопряжено с высокой продолжительностью испытаний. Последнее привело к введению понятия предела выносливости на определённой базе, например, 10^7 циклов. Это нижняя граница области СМЦУ, и разрушение может произойти при больших значениях усталостной долговечности.

Развитием описанного способа учёта НА циклов является применение кривых усталости, состоящих из нескольких участков с разными коэффициентами наклона m . При этом большим значениям долговечности ставят в соответствие более пологие участки кривой.

Неявно учёт НА колебаний нагрузки может выполняться на этапе обработки данных перед схематизацией процесса нагружения – преобразованием записи значений нагрузок от времени к набору (таблице) циклов и/или полуциклов регулярного (синусоидального) нагружения. Методы данной процедуры подробно изложены в стандартах, например, в ГОСТ 25.101 и в ASTM Standard E1049.

Согласно ГОСТ 25.101 весь диапазон изменения нагрузок исследуемого процесса нагружения разбивается равноотстоящими уровнями нагрузок на классы общим количеством $n_k = 14 \dots 32$. После этого проводится выделение экстремумов. В пункте 1.5 написано: «При схематизации не учитывают колебания, амплитуда которых меньше половины ширины класса». Таким образом, присутствующие в нагружении колебания с размахом меньшим, чем ширина класса не учитываются при дальнейшем определении усталостной повреждаемости. Содержание данного пункта ГОСТ 25.101 можно рассматривать как гипотезу об отсутствии влияния нагрузок, не превышающих ширину класса, на долговечность конструкций.

Таким образом, существуют рекомендации о необходимости специальной обработки НА циклов нагружения при расчётном определении усталостной долговечности. Однако приведённые подходы значительно различаются, требуют дополнительного анализа и проведения экспериментальных исследований.

1.4 Постановка задачи исследования

Изучение современного состояния вопроса анализа ВЧ усталости элементов конструкции самолёта, заключающееся в обзоре исследований анализа усталости авиационных конструкций, описании основных существующих методов анализа ВЧ усталости элементов конструкции и оценке влияния ключевых факторов нагружения (среднее значение и НА колебания) на усталостную долговечность, показало, что на данный момент не существует установившегося метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.

ВЧ компоненты нагружения зачастую имеют низкую амплитуду, поэтому принимается решение о проведении исследования влияния НА колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементарных образцов. В результате анализа испытаний разрабатываются рекомендации по учёту влияния НА колебаний на усталостную долговечность стальных элементов конструкции самолёта. В случае если необходимо получить рекомендации для других типов материалов или для различных типов соединений, предлагается проводить испытания согласно описанному подходу.

В настоящий момент достаточно трудно провести аналогичные испытания для остальных типов конструкционных материалов, а также для всевозможных типовых образцов и соединений. Поэтому требуется разработать метод анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта. При разработке необходимо учитывать, что ВЧ колебания накладываются на НЧ ВА колебания и на постоянное среднее значение нагрузки.

Современный подход к разработке АТ предполагает проведение большого количества численных экспериментов. Анализ прочности конструкции в основном выполняется с помощью МКЭ. Поэтому целесообразно выполнить численную реализацию разрабатываемого метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта для проведения расчётов с помощью МКЭ.

Таким образом, в ходе исследовательской задачи по разработке метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта необходимо решить следующие задачи:

1. Экспериментальное исследование влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементарных образцов и разработка соответствующих рекомендаций для элементов конструкции самолёта.

2. Проведение сравнительного анализа спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости элементов конструкции самолёта на основе сравнения значений усталостной повреждаемости с классическим методом расчёта.

3. Разработка метода расчёта усталостной повреждаемости элементов конструкции самолёта от высокочастотной составляющей нагрузки с учётом влияния низкочастотных колебаний и постоянного среднего значения нагрузки.

4. Численная реализация метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.

1.5 Выводы по главе 1

Выполнен обзор отечественных и зарубежных работ по анализу усталости конструкций АТ. Описаны подходы, используемые в настоящее время для расчёта усталостной повреждаемости. Наиболее часто применяется линейный закон накопления усталостных повреждений. Испытания на усталость проводятся при симметричной и отнулевой нагрузке, для типовых и конструктивно-подобных образцов, в разных диапазонах усталостной долговечности. Для расчёта усталостной повреждаемости от воздействия циклов нагрузки, коэффициент асимметрии которых отличен от 0 и -1 , используют ДПУД, вид которых для металлических и композиционных материалов сильно различается. Суммирование усталостных повреждений от воздействия различных по характеристикам циклов нагружения проводится с помощью ГЛС. Схематизация случайных процессов выполняется, в основном, с помощью МПЦ или МД. Приведена постановка задачи исследования.

Рассмотрен вопрос воздействия ВЧ НА циклов нагружения на изделия АТ. Описан механизм усталостного разрушения металлических материалов в случае наложения НА нагрузок из области СМЦУ на многоцикловое ВА нагружение. Приведены рекомендации о необходимости специальной обработки НА циклов нагружения при определении усталостной долговечности. Существующие подходы различаются и требуют дополнительного анализа с проведением экспериментальных исследований (см. глава 2).

Представлен обзор спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости, отмечена область их применения. Приведены методы учёта среднего значения нагрузки. Если влияние ненулевого среднего значения нагрузки самолёта можно учесть с помощью введения коэффициента масштабирования СПМ, то влияние НЧ составляющей нагрузки учесть таким образом не получится. Для более точного анализа ВЧ усталости предлагается разделить нагрузку на НЧ и ВЧ составляющие и обрабатывать их отдельно, учитывая вклад НЧ составляющей нагрузки в усталостную повреждаемость от действия ВЧ составляющей. Для решения данной задачи предстоит выбрать подходящий спектральный метод, и разработать метод анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта (см. глава 3).

Описаны особенности аналитического и численного решений задач прочности. Отмечена важность методов анализа случайных процессов в случае стохастического внешнего воздействия на конструкцию, а также широкое применение МКЭ для численного решения задач прочности конструкций АТ. Для практического применения разрабатываемого метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта предлагается использовать МКЭ. На основе численного алгоритма решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных конструкций предстоит выполнить численную реализацию метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта (см. глава 4).

Глава 2 Исследование влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность

Конструкция самолёта в процессе эксплуатации подвергается воздействию нагрузок различной природы и величины. Нагруженность некоторых элементов конструкции (например, балки пилона двигателя) характеризуется наличием большого количества НА циклов нагружения.

Можно получить значительный вклад описанных НА нагрузок в суммарное значение усталостной повреждаемости при расчёте с помощью ГЛС усталостных повреждений с учётом асимметрии циклов нагружения. Данное несоответствие расчётного значения усталостной повреждаемости и опыта эксплуатации требует проведения исследования.

Ещё одной важной задачей является увеличение экспериментального базиса в области СМЦУ. Этот вопрос также поднимается в данной главе, описываются усталостные испытания образцов в области СМЦУ.

2.1 Учёт низкоамплитудных колебаний нагрузки при обработке полётных данных среднемагистрального самолёта

При подтверждении соответствия конструкции самолётов транспортной категории требованиям НЛГ 25, раздела С «Прочность», регистрируется большой объём данных о нагружении в полёте. Современные СБИ имеют высокую частоту регистрации сигналов (от 256 Гц) и разрядность (12 бит, соответствующие 4096 уровням квантования, и выше), что позволяет регистрировать НА циклы нагрузок.

Характерный вид СПМ для внутренних силовых факторов в 14 местах конструкции среднемагистрального пассажирского самолёта (силы и моменты сил в нескольких сечениях крыла) на одном и том же режиме полёта приведён на рисунке 2.1 (в логарифмической шкале по оси ординат).

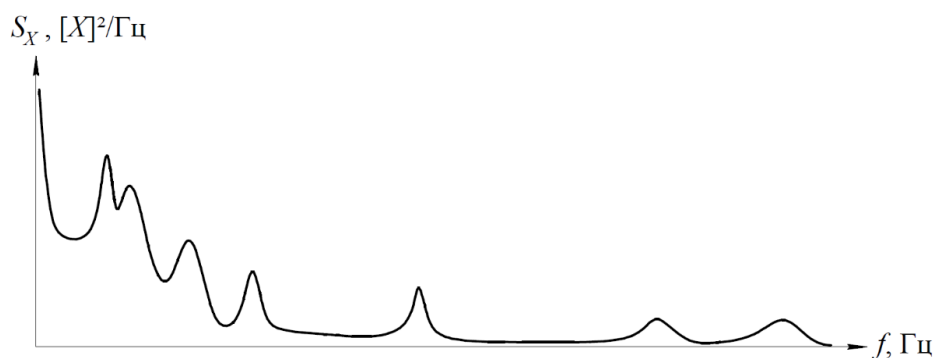


Рисунок 2.1 – Характерный вид СПМ внутренних силовых факторов

Стоит отметить важность анализа исходных данных для подтверждения того, что они являются реальными нагрузками, действующими на конструкцию. Частота НА нагрузки может совпадать с границей диапазона измерительной системы, поэтому может возникать влияние помех на результаты.

Оба максимума СПМ, представленные на высоких частотах (см. рисунок 2.1), принимаются как составляющие нагрузки и учитываются в расчётах усталостной повреждаемости. На основе представленных данных о нагружении проводится анализ влияния на усталостную повреждаемость предусмотренного в ГОСТ 25.101 разбиения процесса нагружения на классы. Усталостная повреждаемость с разбиением на классы D_k определяется по следующему алгоритму:

1. Определение наибольшего X_{max} и наименьшего X_{min} значений напряжения в исследуемой реализации процесса нагружения;
2. Выбор количества классов n_k ;
3. Расчёт ширины класса $\Delta_k = (X_{max} - X_{min}) / n_k$ и уровней напряжения классов $X_j = X_{min} + (j - 1/2)\Delta_k$, где $j = 1, \dots, n_k$ – номер класса;
4. Замена исходных значений X на значения X_j соответствующего класса. Если значение попадает на границу классов $X = (X_{j+1} - X_j) / 2$, то его относят к большему классу $X = X_{j+1}$;
5. Выделение экстремумов;
6. Схематизация с помощью МПЦ;
7. Расчёт усталостной повреждаемости с использованием ГЛС и ДПУД.

Расчёт усталостной повреждаемости без разбиения на классы D состоит из этапов 5 – 7 описанного алгоритма, т. е. выполняется по классическому методу, заключающемуся в выделении экстремумов, схематизации по МПЦ и расчёте усталостной повреждаемости по ГЛС с учётом асимметрии циклов нагружения.

ГОСТ 25.101 содержит примечание: «В зависимости от применяемых алгоритмов и технических средств допускается изменение последовательности и исключение этапов». Следовательно, допускается рассчитывать усталостную повреждаемость без разбиения процесса на классы. Однако согласно пункту 1.5: «При схематизации не учитывают колебания, амплитуда которых меньше половины ширины класса». Содержание пункта 1.5 из ГОСТ 25.101, с учётом примечания, рассматривается как гипотеза об отсутствии влияния нагрузок, не превышающих ширину класса, на усталостную долговечность конструкций.

Графики отношения усталостной повреждаемости с разбиением на классы к усталостной повреждаемости без разбиения на классы D_k/D в зависимости от количества классов n_k для 14 процессов показаны на рисунках 2.2 – 2.5. Процессы разделены на 4 группы в зависимости от места расположения соответствующих датчиков: 1, 5, 8 и 12 – группа № 1; 2 и 9 – группа № 2; 3, 4, 10 и 11 – группа № 3; 6, 7, 13 и 14 – группа № 4. При этом процессы 1–7 зарегистрированы на левой консоли крыла, процессы 8–14 – на правой консоли.



Рисунок 2.2 – Отношение D_k/D для процессов группы № 1

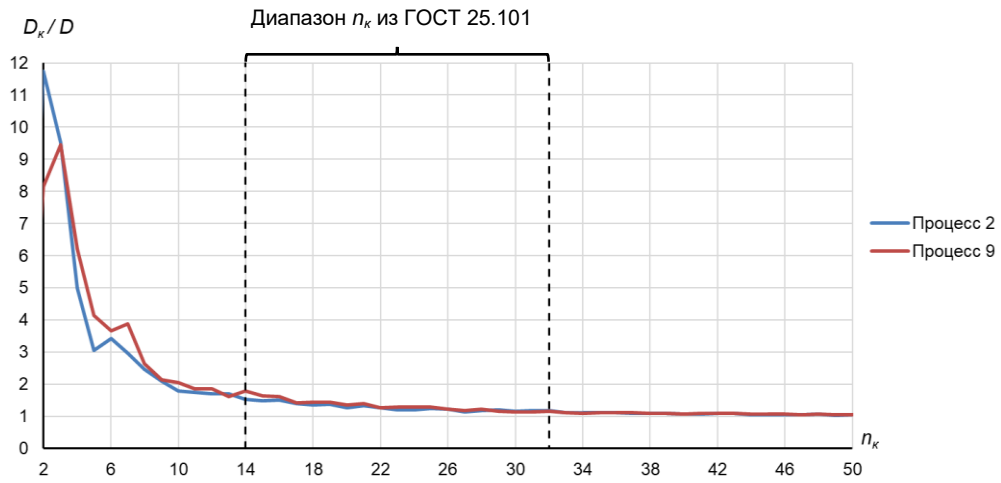


Рисунок 2.3 – Отношение D_k / D для процессов группы № 2

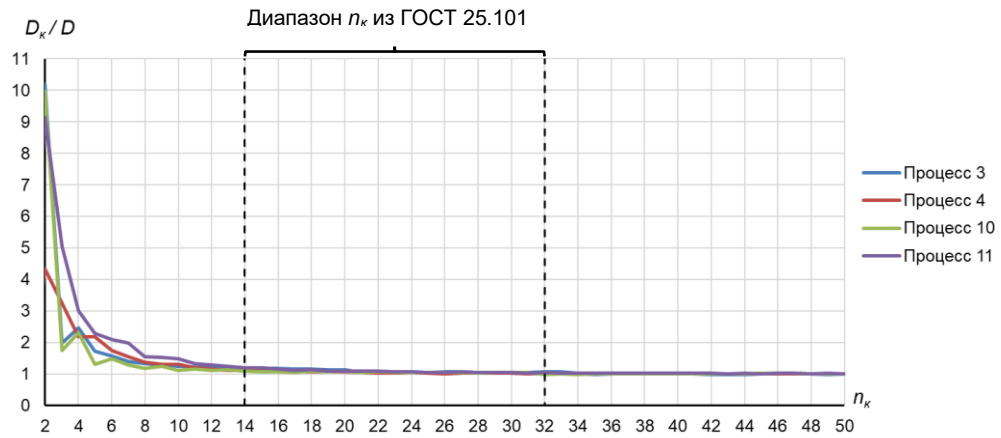


Рисунок 2.4 – Отношение D_k / D для процессов группы № 3

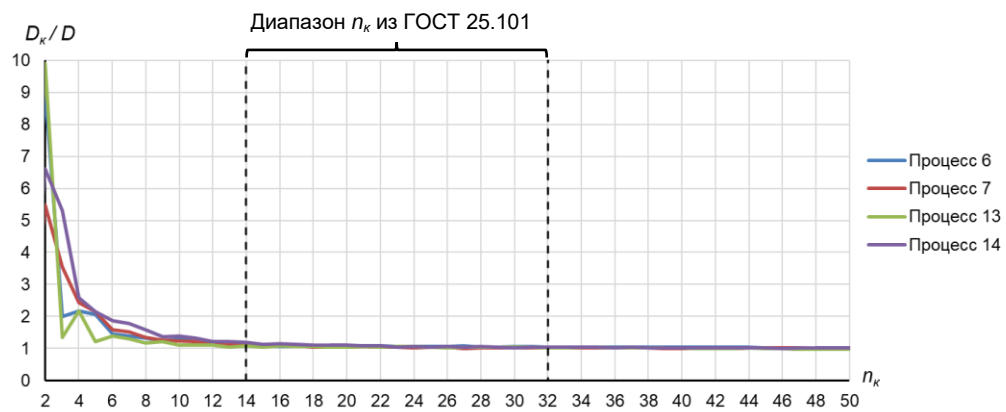


Рисунок 2.5 – Отношение D_k / D для процессов группы № 4

Далее проводится расчёт усталостной повреждаемости D_e с исключением НА циклов нагрузки, без разбиения на классы. Исключение циклов из обработки выполняется после схематизации процесса посредством МПЦ. Пороговой амплитудой исключаемых колебаний принимается половина ширины класса (как в случае, если бы разбиение проводилось), с учётом примечания из ГОСТ 25.101, упомянутого ранее. Графики отношения D_e/D в зависимости от количества классов n_k для 14 процессов нагружения показаны на рисунках 2.6 – 2.9. Аналогичные расчёты для одного процесса описаны в работе [129].

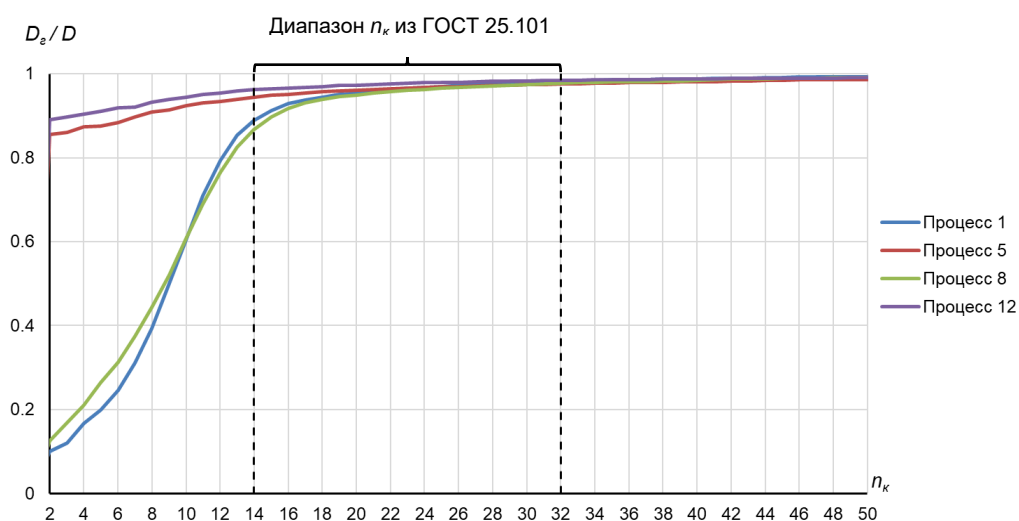


Рисунок 2.6 – Отношение D_e / D для процессов группы № 1

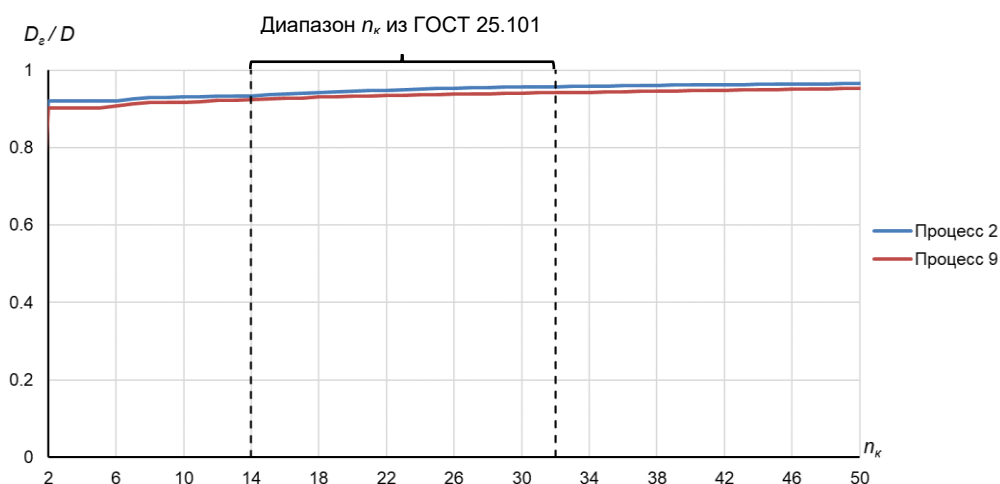


Рисунок 2.7 – Отношение D_e / D для процессов группы № 2

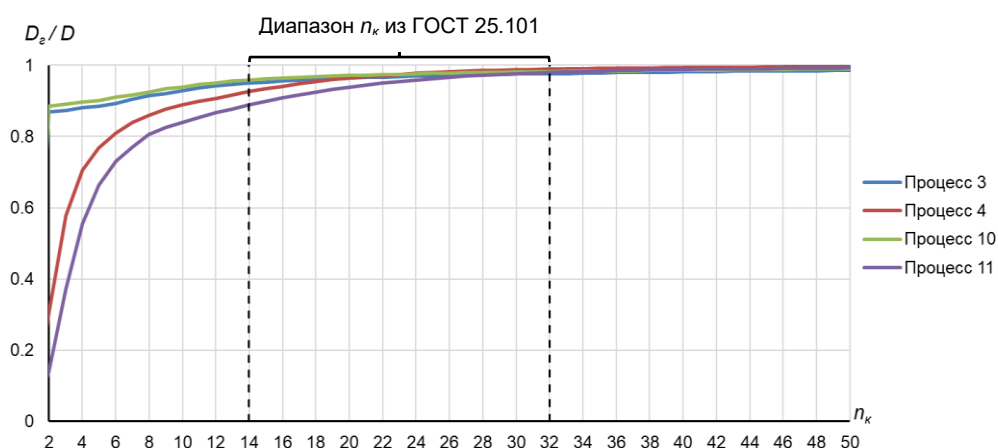


Рисунок 2.8 – Отношение D_e / D для процессов группы № 3

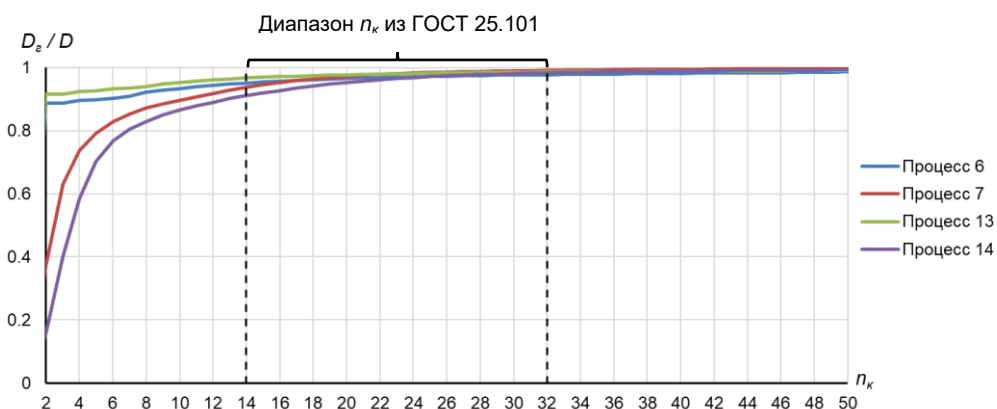


Рисунок 2.9 – Отношение D_e / D для процессов группы № 4

Для всех обработанных сигналов в диапазоне значений количества классов $n_k = 14 \dots 32$, описанном в ГОСТ 25.101, значения усталостной повреждаемости с разбиением на классы D_k оказались консервативными, т. е. большими по величине, чем значения без разбиения на классы D . Можно отметить, что наиболее консервативные результаты зафиксированы при количестве классов $n_k = 14$ для процессов из группы 2 (процессы 2 и 9): отношение D_k / D составило для них 1.52 и 1.79 соответственно (см. рисунок 2.3).

Тогда как значения усталостной повреждаемости, полученные исключением НА циклов, D_e во всех приведённых случаях в диапазоне значений количества классов $n_k = 14 \dots 32$ были неконсервативными, т. е. меньшими по величине,

чем значения без исключения НА циклов D . Данное явление объясняется тем, что НА циклы были исключены из обработки безвозмездно. При этом наиболее неконсервативные результаты зафиксированы при количестве классов $n_k=14$ для процессов из разных групп (процессы 8 и 11): отношение D_z / D составило для них 0.87 и 0.89 соответственно (см. рисунки 2.6 и 2.8).

Разбиение процесса на классы для авиационных спектров в диапазоне значений количества классов $n_k=14...32$ из ГОСТ 25.101 позволило получить довольно консервативные значения усталостной повреждаемости (для одного из процессов разница составила 79 %). Можно сделать вывод, что данная методика, описанная в стандарте, подходит для работ, в которых допустимо проводить расчёты с большим запасом прочности.

При расчёте усталостной повреждаемости от действия тех же процессов при исключении НА циклов из обработки (без разбиения на классы), результат неконсервативен. Однако наибольшая в абсолютном значении расчётная разница, для одного из исследуемых процессов, составила 13 %. Данное значение гораздо меньше, чем разница в случае разбиения на классы

$$\left| \frac{D_z - D}{D} \right|_{\max} = 13 \% \ll 79 \% = \left(\frac{D_k - D}{D} \right)_{\max}. \quad (2.1)$$

Таким образом, выдвинутое предположение об отсутствии влияния нагрузок, не превышающих ширину класса, на усталостную долговечность конструкций, является перспективным. Требуется проведение экспериментального исследования для подтверждения (или опровержения) данной гипотезы.

2.2 Экспериментальное исследование влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементарных образцов

В п. 2.1 было выдвинуто предположение о несущественности влияния НА колебаний на усталостную долговечность. Проводятся усталостные испытания элементарных образцов типа полоса с отверстием, выполненных из стали 30ХГСА. Испытания и анализ их результатов описаны в работах [130, 131], выполненных вместе с сотрудниками ФАУ «ЦАГИ» Свирским Ю. А. и Бессоновым П. С.

Одним из элементов конструкции пассажирского самолёта, наиболее подверженных активному воздействию НА нагрузок, является крепление реактивного двигателя к крылу ЛА – балка пилона. Многие детали, из которых состоит балка пилона, обычно изготавливаются из стали, в связи с чем данный материал представляет большой интерес в настоящем исследовании.

Для экспериментального исследования влияния НА нагрузок на усталостную повреждаемость был изготовлен 21 образец типа полоса с отверстием из стали 30ХГСА с отношением ширины к диаметру 6 (см. рисунок 2.10). Все образцы имеют продольное направления волокна.

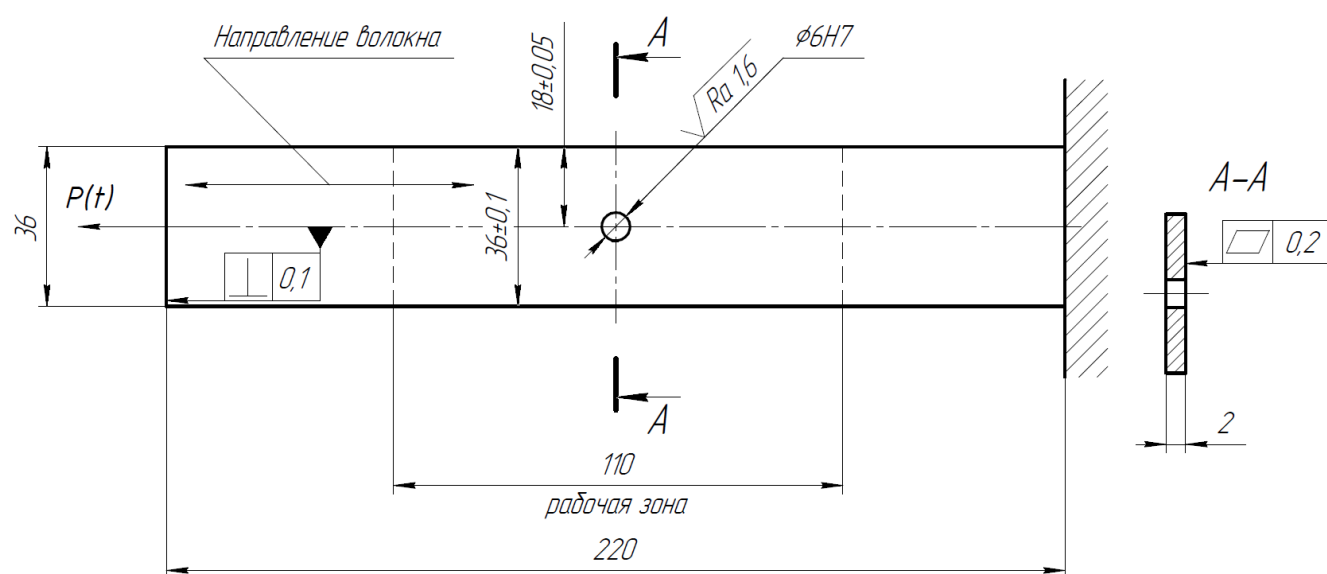


Рисунок 2.10 – Эскиз и схема нагружения образца

Типовой вид стального образца до начала усталостных испытаний приведён на рисунке 2.11.



Рисунок 2.11 – Типовой вид образца до усталостных испытаний

Во время испытаний на элементарные образцы воздействовала продольная растягивающая нагрузка $P(t)$ согласно схеме нагружения, представленной на рисунке 2.10. Влияние тепловой нагрузки не учитывалось, и температурный режим испытаний составлял 23 °С.

Значение максимальной нагрузки $P_{max}^{(j)}$ для j -го образца определялось индивидуально, с использованием фиксированного значения максимального напряжения σ_{max} и индивидуальной площади нетто поперечного сечения (при расчёте учитывались ширина и толщина сечения, а также диаметр отверстия) каждого образца $F_{нетто}^{(j)}$

$$P_{max}^{(j)} = \sigma_{max} F_{нетто}^{(j)}, \quad (2.2)$$

при этом значения $F_{нетто}^{(j)}$ при этом отличались незначительно, не более 8.3 %.

Влияние НА циклов определялось путём сравнения результатов испытаний на растяжение по двум группам программ нагружения:

1. Группа № 1: регулярное синусоидальное нагружение элементарного образца с частотой $f = 3$ Гц, коэффициентом асимметрии $R = 0$ и амплитудой напряжений $\sigma_{BA} = \sigma_{max}/2$ (см. рисунок 2.12);

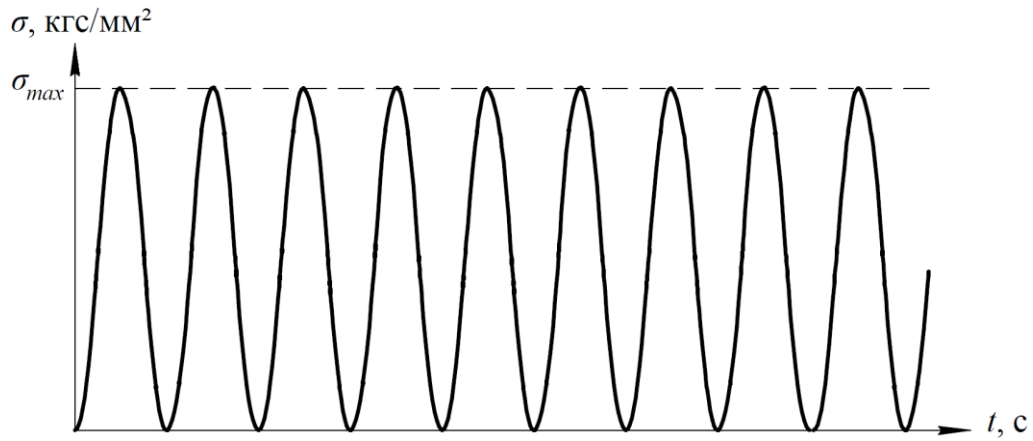


Рисунок 2.12 – Общий вид временной зависимости нагружения для группы программ нагружения № 1

2. Группа № 2: блочное нагружение, образованное добавлением к программам группы № 1 НА циклов с амплитудой σ_{HA} (см. рисунок 2.13). Реализация нагружения для программ этой группы заключалась в периодическом повторении трёх шагов:

- а) линейное нагружение от нулевого напряжения до $2\sigma_{BA} - \sigma_{HA}$,
- б) регулярное синусоидальное нагружение с частотой $f = 10$ Гц, средним значением нагрузки $2\sigma_{BA} - \sigma_{HA}$ и амплитудой цикла σ_{HA} . Количество НА циклов составляет n_{HA} . Максимальное значение НА циклов $\sigma_{max} = 2\sigma_{BA}$,
- в) линейная разгрузка образца до нулевой нагрузки.

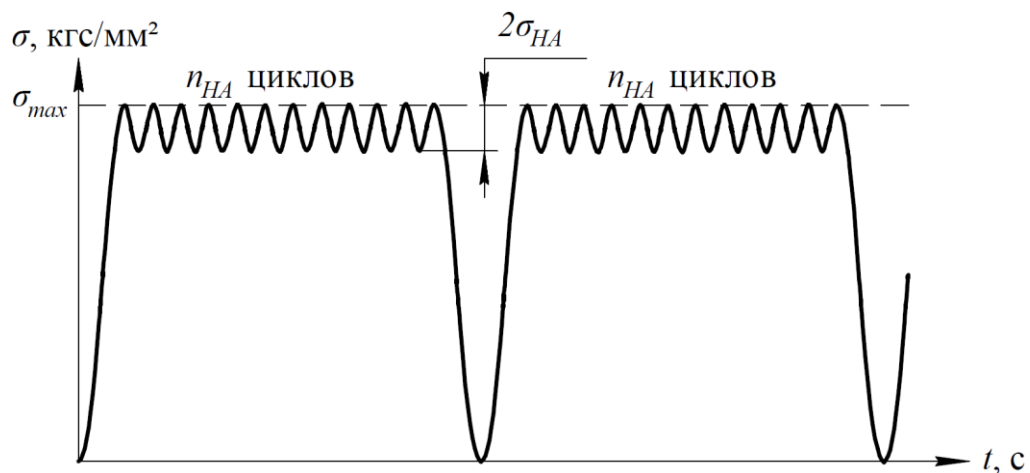


Рисунок 2.13 – Общий вид временной зависимости нагружения для группы программ нагружения № 2

Стоит отметить, что из-за особенностей работы испытательной машины переходы между ВА циклами нагружения в группе расчётных случаев № 2, а также выходы на режим синусоидального нагружения НА циклами (см. рисунок 2.14), происходили постепенно. В остальном на образцы из группы № 2 воздействовала ВА нагрузка, аналогичная нагрузке из группы № 1, но с добавлением n_{HA} колебаний с амплитудой $\sigma_{HA} \ll \sigma_{BA}$ в области максимумов ВА циклов.

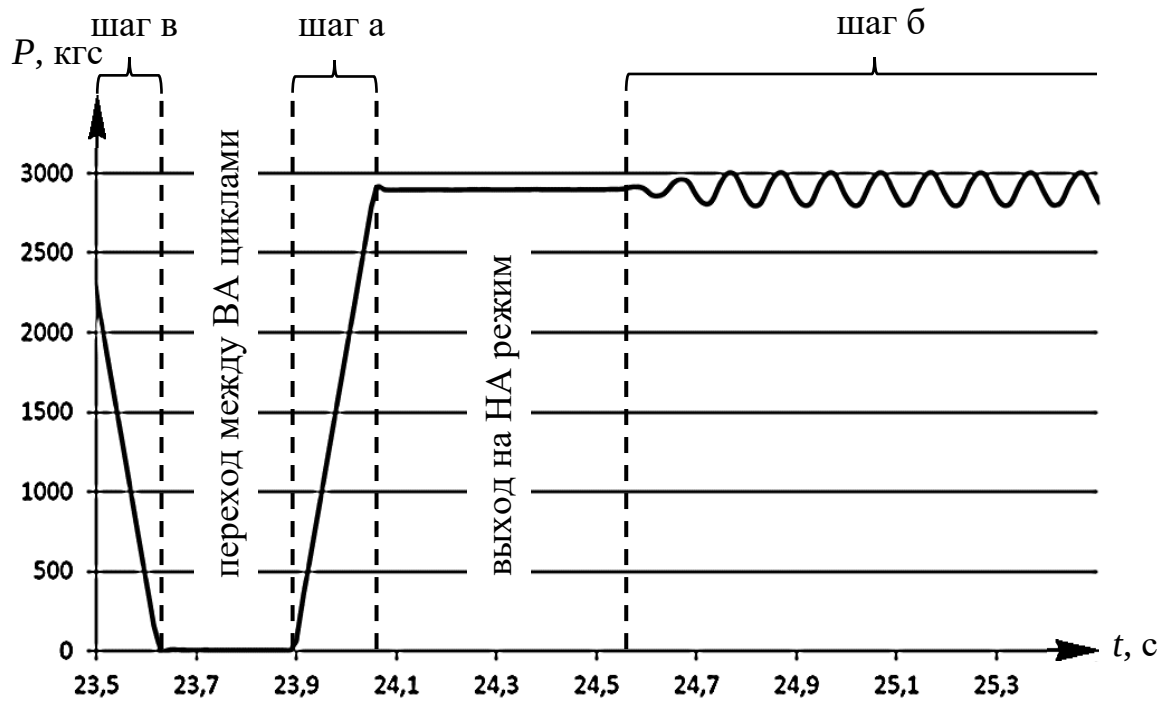


Рисунок 2.14 – Пример воспроизведения нагрузки для группы программ № 2

Формирование программ нагружения выполнялось с использованием следующих подходов:

1. Величина амплитуды напряжений НА циклов выбиралась вблизи границ диапазона n_k из ГОСТ 25.101: 1/15 и 1/30 от величины основного ВА цикла

$$\sigma_{HA} = k_{HA} \sigma_{BA}, \quad (2.3)$$

где k_{HA} – отношение амплитуд НА и ВА циклов ($k_{HA} = 1/15$ и $k_{HA} = 1/30$);

2. Количество НА циклов выбиралось так, чтобы отношение усталостных долговечностей было равно одному из двух значений

$$h_N = \frac{N_{\text{№2}}}{N_{\text{№1}}} = 1 + k_{\text{НА}}^{\frac{m}{2}} n_{\text{НА}} = 1.4 \text{ или } 2.0, \quad (2.4)$$

где $N_{\text{№1}}$ и $N_{\text{№2}}$ – долговечности программ нагружения группы № 1 и группы № 2;

3. Уровни максимальных напряжений σ_{max} выбирались так, чтобы длительность испытания одного образца не превышала 30 дней, а предполагаемое число ВА циклов до разрушения находилось в области многоциклового усталости.

Полный перечень проведённых испытаний и количество испытанных образцов приведено в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Распределение образцов по программам нагружения

№ программы нагружения	№ группы программ	σ_{max} , кгс/мм ²	n_{HA}	k_{HA}	h_N	Количество образцов
1	1	46.0	0	—	—	3
2	2		225	1/15	1.4	6
3	1	66.6	0	—	—	3
4	2		566	1/15	2.0	5
5			2866	1/30		4
Общее количество образцов						21

Анализ результатов испытаний требует сравнения усталостных долговечностей, отличающихся друг от друга на величины, соизмеримые с рассеянием исследуемых значений. Получить выводы в данном случае предлагается с помощью методов математической статистики. Необходимо выполнить проверку гипотезы о равенстве генеральных средних значений двух распределений долговечности: в программах нагружения без НА циклов и с НА циклами. Используемый подход подробно описан в работе [130].

Постановка задачи выглядит следующим образом: из двух генеральных совокупностей извлекаются выборки объёмов n_{e1} и n_{e2} , находятся их выборочные средние значения: $\overline{N_1^e}$ и $\overline{N_2^e}$ соответственно. Требуется при уровне значимости α_{3n} проверить гипотезу $H_0: \overline{N_1^e} = \overline{N_2^e}$ о равенстве генеральных средних значений против одной из следующих конкурирующих гипотез: $H_1: \overline{N_1^e} < \overline{N_2^e}$, $H_1: \overline{N_1^e} > \overline{N_2^e}$ или $H_1: \overline{N_1^e} \neq \overline{N_2^e}$.

Для первой гипотезы строится левосторонняя критическая область, для второй – правосторонняя, а для третьей – двусторонняя. При этом принимаются следующие допущения: выборки независимые, генеральные совокупности распределены нормально, их дисперсии неизвестны.

Если предположить или доказать, что генеральные дисперсии одинаковы (хотя и неизвестны), то для проверки гипотезы $H_0: \overline{N_1^e} = \overline{N_2^e}$ можно использовать следующий критерий

$$T_c = \frac{\overline{N_1^e} - \overline{N_2^e}}{\sqrt{(n_{e1} - 1)\sigma_{N_1^e}^2 + (n_{e2} - 1)\sigma_{N_2^e}^2}} \sqrt{\frac{n_{e1} n_{e2} (n_{e1} + n_{e2} - 2)}{n_{e1} + n_{e2}}}, \quad (2.5)$$

где $\sigma_{N_1^e}^2$, $\sigma_{N_2^e}^2$ – соответствующие выборочные дисперсии

$$\sigma_{N_1^e}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_{e1}} (N_1^{e(j)} - \overline{N_1^e})^2}{n_{e1} - 1}; \sigma_{N_2^e}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_{e2}} (N_2^{e(j)} - \overline{N_2^e})^2}{n_{e2} - 1}. \quad (2.6)$$

Случайная величина T_c распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы $k_e = n_{e1} + n_{e2} - 2$ и используется для оценки статистической значимости разности двух выборочных средних значений $\overline{N_1^e}$ и $\overline{N_2^e}$.

Поскольку условием применения критерия является равенство генеральных дисперсий, то необходимо проверить при уровне значимости $\alpha_{зн}$ гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0: \sigma_{N_1}^2 = \sigma_{N_2}^2$. Если она будет принята, то различие между выборочными значениями $\sigma_{N_1}^2$ и $\sigma_{N_2}^2$ случайно.

Для проверки данной гипотезы используется критерий $F_c = \sigma_{N_1}^2 / \sigma_{N_2}^2$, где N_1^e соответствует выборке с более высоким значением дисперсии. Данная случайная величина имеет распределение Фишера – Снедекора со степенями свободы $k_{e1} = n_{e1} - 1$ и $k_{e2} = n_{e2} - 1$, где k_{e1} соответствует выборке с более высоким значением дисперсии.

В качестве альтернативы рассматривается конкурирующая гипотеза $H_1: \sigma_{N_1}^2 > \sigma_{N_2}^2$, для которой строится правосторонняя критическая область: критическое значение $F_{кр} = F_{кр}(\alpha_z, k_{e1}, k_{e2})$ находятся по таблице критических значений распределения Фишера – Снедекора.

На основании выборочных данных рассчитывается наблюдаемое значение критерия $F_{эсп} = \sigma_{N_1}^2 / \sigma_{N_2}^2$, и если оно попадает в критическую область $F_{эсп} > F_{кр}$, то гипотеза $H_0: \sigma_{N_1}^2 = \sigma_{N_2}^2$ отвергается; в противном случае гипотеза принимается. Следует отметить, что чем более представлен объём эксперимента, тем выше достоверность описанного статистического анализа.

Типовой вид разрушенного стального образца после усталостных испытаний представлен на рисунке 2.15.



Рисунок 2.15 – Типовой вид образца после усталостных испытаний

Результаты проведённых испытаний приведены в таблице 2.2 и проиллюстрированы на рисунках 2.16 – 2.17. На рисунках точками обозначены средние значения долговечностей N_{cp} , а планками погрешностей – стандартные отклонения логарифма этих долговечностей σ_{lgN} . Указано также среднее число НА циклов, рассчитываемое как $N_{cp}^{HA} = n_{HA} N_{cp}$.

Таблица 2.2 – Результаты исследования влияния НА циклов на долговечность и рассеяние усталостных характеристик

k_{HA}	$\sigma_{max} = 46.0 \text{ кгс/мм}^2$			$\sigma_{max} = 66.6 \text{ кгс/мм}^2$		
	N_{cp}	N_{cp}^{HA}	σ_{lgN}	N_{cp}	N_{cp}^{HA}	σ_{lgN}
–	43229	–	0.035	8069	–	0.065
1/30	–	–	–	8679	$2.49 \cdot 10^7$	0.026
1/15	36229	$0.82 \cdot 10^7$	0.093	7940	$0.45 \cdot 10^7$	0.034

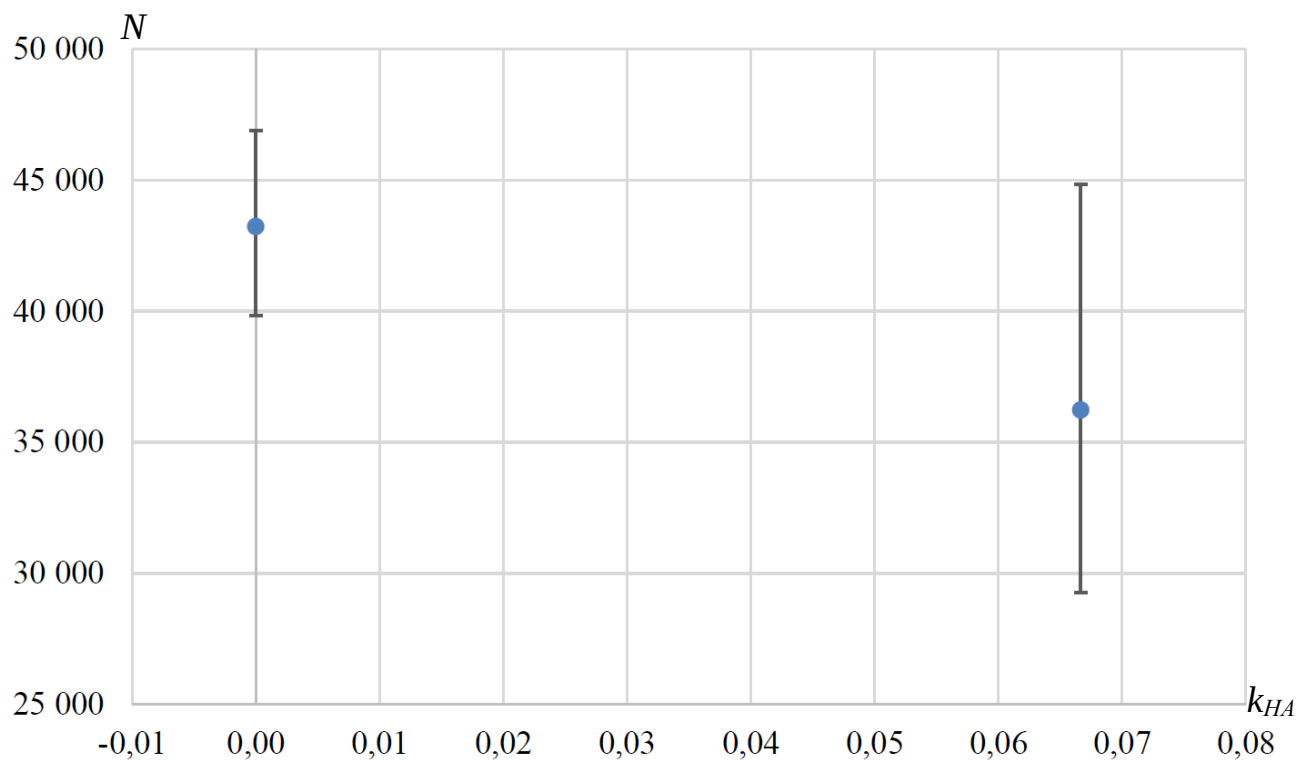


Рисунок 2.16 – Средние значения и рассеяния долговечностей образцов, испытанных с разной амплитудой НА циклов при $\sigma_{max} = 46.0 \text{ кгс/мм}^2$

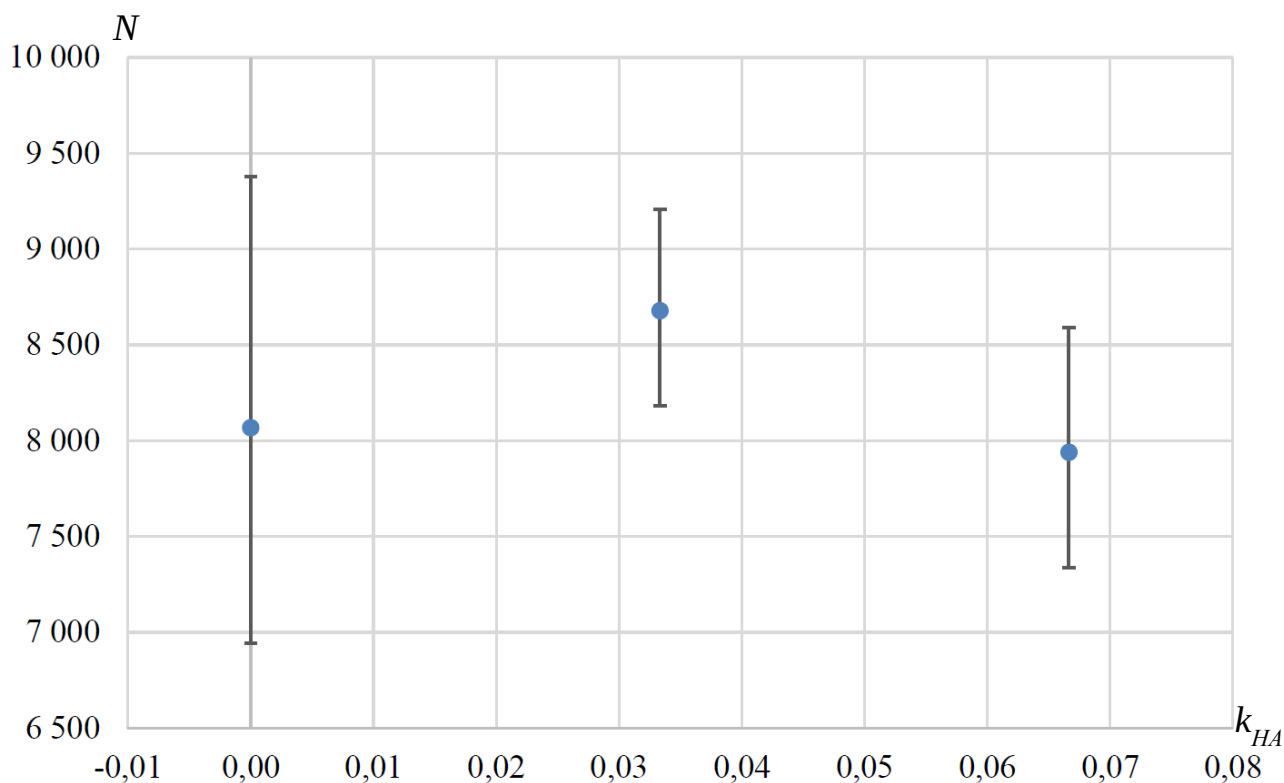


Рисунок 2.17 – Средние значения и рассеяния долговечностей образцов, испытанных с разной амплитудой НА циклов при $\sigma_{max} = 66.6$ кгс/мм²

Анализ результатов показал, что добавление к регулярному нагружению НА колебаний привело к изменению средней усталостной долговечности образцов в диапазоне от -16.2% до 7.6% , т. е. как в меньшую, так и в большую сторону.

При этом, для программ нагружения с напряжением $\sigma_{max} = 46.0$ кгс/мм² произошло увеличение значения σ_{lgN} более, чем в 2.5 раза, а для программ нагружения с $\sigma_{max} = 66.6$ кгс/мм² – уменьшение по меньшей мере в 1.9 раза.

Следует отметить, что все полученные значения σ_{lgN} (см. таблица 2.2) меньше нормированного для металлов значения 0.15, что свидетельствует о корректном поддержании режимов нагружения и стабильной технологии изготовления образцов.

Выводы о влиянии НА циклов на долговечность формулируются с использованием подходов, описанных ранее. Рассматривается гипотеза о попарном равенстве генеральных средних значений логарифмов долговечностей

усталостных испытаний с НА нагрузками и без них. Сначала доказывается равенство генеральных дисперсий этих величин при уровне значимости $\alpha_{зн} = 0.05$. Полученные значения критерия F_c приведены в таблице 2.3. Отмечается, что все значения $F_{эксн}$ меньше соответствующих им критических значений $F_{кр}$.

Таблица 2.3 – Значения критерия F_c

σ_{max} , кгс/мм ²	$k_{НА}$	$\sigma_{N_1}^2$	$\sigma_{N_2}^2$	$F_{эксн}$	$k_{\theta 1}$	$k_{\theta 2}$	$F_{кр}$
46.0	1/15	$8.57 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	6.86	5	2	19.3
66.6	1/15	$4.26 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	3.63	2	4	6.94
66.6	1/30	$4.26 \cdot 10^{-3}$	$6.58 \cdot 10^{-4}$	6.48	2	3	9.55

Далее определяются значения критерия T_c , они приведены в таблице 2.4. Отмечается, что все полученные величины $T_{эксн}$ меньше критических значений $T_{кр}$ двусторонней области для распределения Стьюдента с уровнем значимости $\alpha_{зн} = 0.05$.

Таблица 2.4 – Значения критерия T_c

σ_{max} , кгс/мм ²	$k_{НА}$	$n_{\theta 1}$	$n_{\theta 2}$	$T_{эксн}$	$T_{кр}$
46.0	1/15	6	3	1.480	2.365
66.6	1/15	3	5	0.143	2.447
66.6	1/30	3	4	0.980	2.571

Таким образом, рассмотренные гипотезы принимаются, и, следовательно, делается вывод: НА циклы нагружения не влияют на долговечность стальных элементарных образцов. Это соответствует положению ГОСТ 25.101 не учитывать колебания с размахом меньше ширины класса. Следует отметить, что это чисто формальный статистический вывод, который при сравнительно малом количестве испытанных образцов и режимов испытаний может быть недостаточно достоверен.

2.3 Влияние низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементов конструкции самолёта

При анализе проведённого расчёта усталостной повреждаемости от действия 14 процессов нагружения с разбиением данных процессов на классы в диапазоне значений количества классов $n_k = 14 \dots 32$ и исключением из обработки НА колебаний отмечена значительная консервативность результатов. Тогда как расчёт усталостной повреждаемости с исключением НА циклов нагрузки (без разбиения процесса на классы) позволил получить неконсервативный результат, с меньшей разницей значений относительно усталостной повреждаемости без обработки.

Выполненное экспериментальное исследование влияния НА циклов нагрузки на усталостную долговечность стальных элементарных образцов также показало, что исключение НА колебаний нагружения диапазоне значений $n_k = 14 \dots 32$ незначительно влияет на усталостную долговечность, и изменения находятся в пределах случайного разброса. Результаты и выводы, полученные в п. 2.2, справедливы для стальных элементов конструкции. Испытания были проведены только для образцов типа полоса с отверстием, тогда как усталостная прочность образцов, имеющих другие концентраторы напряжений, образцов с соединениями и конструктивно-подобных образцов, а также опасное явление фреттинг-коррозии не рассматривались.

Как было отмечено ранее в п. 1.3.2, для конструктивных сталей используется понятие предела выносливости. Считается, что циклы с амплитудой нагружения ниже предела выносливости не приводят к разрушению изделий из материалов данного типа. Однако особенностью проведённых испытаний, описанных в данной главе, является наличие высокого среднего значения циклов нагружения.

Даже при высоких средних значениях нагружения НА колебания не оказали значительного воздействия на величину усталостной долговечности образцов. Поэтому можно сделать вывод о справедливости выдвинутого предположения об отсутствии влияния нагрузок, не превышающих ширину класса, на усталостную

долговечность применительно к стальным конструкциям и рекомендовать исключать описанные НА циклы из обработки при анализе усталости стальных элементов конструкции самолета.

В настоящей работе продемонстрирован подход, с помощью которого были разработаны рекомендации по учёту влияния НА колебаний процесса нагружения на усталостную долговечность стальных элементов конструкции. Если необходимо получить соответствующие рекомендации для конструкций из материалов другого типа, то предлагается проводить испытания согласно описанному подходу.

Результаты, полученные для сталей, могут оказаться несправедливыми для титановых или алюминиевых сплавов, конструкций из ПКМ и других конструкционных материалов. При этом для подтверждения или опровержения выдвигаемого предположения об отсутствии влияния НА нагрузок на усталостную долговечность необходимо проводить продолжительные испытания. Длительность испытания одного образца в области СМЦУ высокая, может достигать 30 суток (при аналогичных уровнях и значениях частоты нагрузки).

2.4 Выводы по главе 2

Проведены расчёты усталостной повреждаемости от действия 14 процессов нагружения конструкции самолёта: для исходных реализаций, для реализаций с разбиением на классы и для реализаций с исключением НА циклов. Разбиение процесса на классы для авиационных спектров в диапазоне значений количества классов от 14 до 32 из ГОСТ 25.101 позволило получить довольно консервативные значения (79 %) и подходит для работ, в которых допустимо проводить расчёты с большим запасом прочности. Тогда как при расчёте усталостной повреждаемости с исключением НА циклов разница меньше (–13 %).

Выполнено экспериментальное исследование влияния НА циклов нагрузки на усталостную долговечность элементарных образцов из стали 30ХГСА. Установлено, что средняя долговечность образцов, после добавления в программу

нагружения НА циклов нагрузки, изменилась в диапазоне от -16.2% до 7.6% , т. е. как в большую, так и в меньшую сторону. Статистическим анализом показано, что данные изменения усталостной долговечности находятся в пределах случайного разброса значений.

Расчётное изменение усталостных долговечностей образцов по программам испытаний с НА циклами относительно программ испытаний без НА циклов составляло от 40% до 100% . Данное несоответствие расчётных величин и полученных результатов испытаний демонстрирует актуальность развития методов учёта НА циклов. Несмотря на то, что исключение НА циклов из обработки не является консервативным, для конструкций из стальных материалов оно не приводит к значительному изменению усталостной долговечности. Поскольку справедливость данного утверждения для других конструкционных материалов на данный момент не подтверждена, для количественной оценки влияния НА составляющей нагрузки на усталостную долговечность конструкций необходимо разработать метод анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта, учитывающий наложение ВЧ НА колебаний на НЧ ВА циклы и на постоянное среднее значение нагрузки.

Глава 3 Аналитические аспекты и обоснование метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта

Современные СБИ пассажирских самолётов позволяют записывать данные о нагрузках с высокой частотой. В ходе сертификационных испытаний происходит фиксация большого количества сигналов (порядка 10^4 датчиков). Практика показывает, что обработка такого объёма данных – трудоёмкий процесс, который может быть ускорен, если принять ряд упрощающих гипотез. В частности, если доказать, что в ряде элементов конструкции на одном или нескольких режимах полёта процесс нагружения конструкции является стационарным и нормальным, то целесообразно проводить анализ усталости спектральными методами.

Важным случаем, когда для анализа усталости необходимо использовать спектральные методы, является воздействие на конструкцию ВС акустической нагрузки. Если нагрузки, обусловленные тяготением Земли или внутренним избыточным давлением, являются НЧ и могут быть зарегистрированы во временной области, то акустическая нагрузка, воздействующая в широком диапазоне частот, фиксируется в частотной области. Основными источниками акустической нагрузки являются авиационные двигатели. В зависимости от их расположения можно выделить основные зоны, в которых реализуется наибольшее звуковое давление. Для гражданских ВС чаще всего к таким зонам относятся нижние панели закрылков, внешние панели пилонов, некоторые панели фюзеляжа. Зависимость нагружения от времени неизвестна, а значит, схематизация процесса и, следовательно, дальнейшее суммирование усталостных повреждений по ГЛС во временной области неприменимо. Однако может быть получена СПМ процесса, что позволяет вести расчёт спектральными методами.

В данной главе для случая воздействия на элементы конструкции самолёта нагрузки, представленной в широком диапазоне частот, предлагается проводить разделение нагрузки на НЧ и ВЧ компоненты и их отдельную обработку [132].

Вклад НЧ составляющей при этом можно анализировать во временной области, вклад ВЧ – в частотной. Данный подход подробно описан в терминах спектральных моментов в работах [133–135]. Такое решение позволит проводить подробный анализ акустической усталости при подтверждении соответствия пассажирских самолётов требованиям НЛГ 25, раздела С «Прочность», п. 25.571(d) «Усталостная прочность при акустических нагрузках».

В качестве ВЧ принимается составляющая нагрузки выше некоторой граничной частоты $f_{ВЧ}$. Если НЧ составляющая регистрируется во временной области (например, тензометрией), а ВЧ составляющая – в частотной (например, фиксация уровней акустического давления с помощью шумометров), то в качестве граничной частоты $f_{ВЧ}$, согласно теореме Котельникова, рекомендуется задавать значение частоты Найквиста или меньше её $f_{ВЧ} \leq f_{рег}/2$, где $f_{рег}$ – частота регистрации нагрузки во временной области. В приведённых ниже соотношениях используется радиальная граничная частота, равная $\omega_{ВЧ} = 2\pi f_{ВЧ}$.

3.1 Сравнительный анализ спектральных методов при расчёте усталостной повреждаемости конструкции среднемагистрального самолёта

Проводится сравнение спектральных методов, представленных в п. 1.2.2. Сравниваемой величиной является усталостная повреждаемость. Вычисляются относительные отклонения значений, полученных разными методами. В качестве базисного показателя используется усталостная повреждаемость, рассчитываемая по классическому методу (МПЦ и ГЛС). Сравнительный анализ методов описан в работах [136, 137]. Вычисления выполняются в разработанном программном комплексе «Lavas» [138] (Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ приведено в Приложении Б), прототипом которого является ранее разработанный программный комплекс «Вибрационикс» [139].

Перечень регистрируемых в процессе полёта данных о нагружении агрегатов конструкции опытного образца среднемагистрального пассажирского самолёта, используемых в данном параграфе работы для сравнения описанных в п. 1.2.2 спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости, представлен в таблице 3.1. Данные параметры описывают нагруженность фюзеляжа, крыла, хвостового оперения и органов управления (руль высоты, руль направления, элероны, интерцепторы, воздушный тормоз, предкрылок и закрылок) самолёта в течение полётного цикла. Разрядность АЦП равна 12 битам, что соответствует 4096 уровням квантования. Частота регистрации процессов $f_{рег} = 256$ Гц.

Таблица 3.1 – Перечень используемых полётных данных

№	Агрегат		Параметры
1	Фюзеляж		перерезывающие силы в сечениях
			изгибающие моменты сил в сечениях
			крутящие моменты сил в сечениях
2	Крыло (левая и правая консоли)		перерезывающие силы в сечениях
			изгибающие моменты сил в сечениях
			крутящие моменты сил в сечениях
3	Хвостовое оперение	Вертикальное оперение	силы в тягах кронштейнов
			перерезывающие силы в сечениях
			изгибающие моменты сил в сечениях
			крутящие моменты сил в сечениях
4		Горизонтальное оперение (левая и правая консоли)	силы в узлах навески
			перерезывающие силы в сечениях
			изгибающие моменты сил в сечениях
			крутящие моменты сил в сечениях

Продолжение таблицы 3.1

№	Агрегат		Параметры
5	Органы управления	Элероны	усилия в приводах
			силы в узлах навески
6		Руль высоты	усилия в приводах
			усилия в подкосах приводов
			силы в узлах навески
7		Руль направления	усилия в приводах
			усилия в подкосах узлов навески
			силы в узлах навески
8		Интерцепторы	усилия в приводах
			усилия в подкосах приводов
			силы в узлах навески
9		Воздушный тормоз	усилия в приводах
			силы в узлах навески
10		Предкрылок	усилия в тягах приводов
			усилия в серьгах рельсов
			силы в точках крепления рельсов
			крутящие моменты сил на валах редукторов приводов
11		Закрылок	усилия в тягах управления
			усилия в серьгах навески
			силы в узлах крепления

Выбирается участок полёта продолжительностью $T = 100$ с. Предпочтение отдаётся периоду времени, в течение которого не зарегистрированы изменения режимов полёта, т. е. периоду, близкому к крейсерскому режиму.

Исследуемые процессы (всего 278 измерительных каналов) при записи бортовой аппаратурой претерпевают квантование. Для увеличения достоверности сравнения спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости сигналы, значения которых на выбранном участке времени T представлены всего на нескольких уровнях квантования, не участвуют в сравнении.

Оставшиеся полётные данные (241 измерительный канал) перед обработкой приводятся к нулевому среднему значению, поскольку сравнение спектральных методов необходимо провести независимо от выбора выражения для коэффициента ненулевого среднего значения нагрузки (см. п. 1.3.1).

Для сравнения методов расчёта вычисляется относительное отклонение Δ усталостной повреждаемости по отношению к значению $D_{МПЦ}$, рассчитываемому во временной области согласно классическому методу (МПЦ и ГЛС)

$$\Delta = \frac{D_{метод} - D_{МПЦ}}{D_{МПЦ}} \cdot 100 \%, \quad (3.1)$$

где $D_{метод}$ – усталостная повреждаемость при расчёте одним из сравниваемых спектральных методов.

Результаты обработки сигналов представлены на рисунках 3.1 – 3.11. Числами от 1 до 11 обозначены агрегаты конструкции согласно таблице 3.1: фюзеляж, крыло, вертикальное оперение (ВО), горизонтальное оперение (ГО), элероны, руль высоты (РВ), руль направления (РН), интерцепторы, воздушный тормоз (ВТ), предкрылок и закрылок. Значения относительного отклонения Δ для нескольких обрабатываемых процессов нагружения при расчётах некоторыми спектральными методами превысили 100 % и вышли за границы отображаемой на графиках шкалы $[-100 \%, 100 \%]$. Поэтому такие значения относительного отклонения Δ не полностью отображены на рисунках (например, процессы 1 – 3 и 6 – 18 агрегата № 5 (элеронов) на рисунке 3.1 при расчёте методом УП).

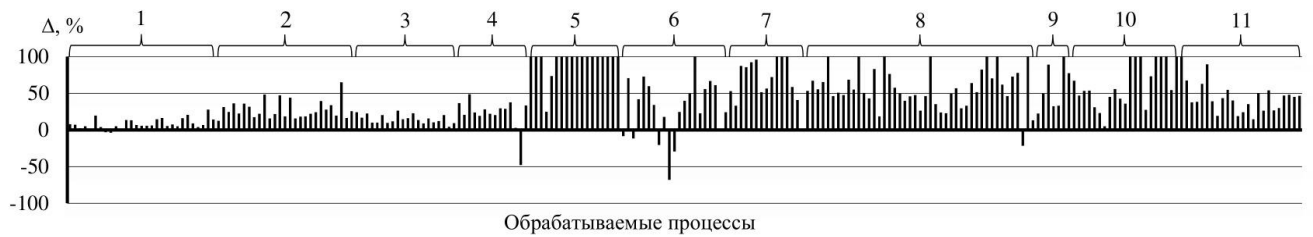


Рисунок 3.1 – Узкополосное приближение:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

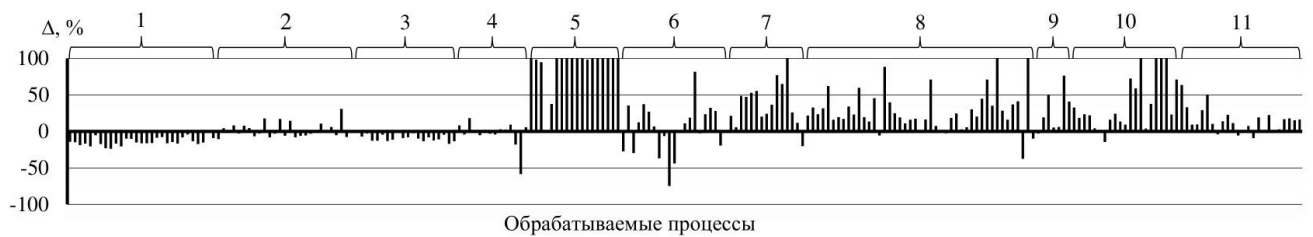


Рисунок 3.2 – Метод Виршинга – Лайта:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

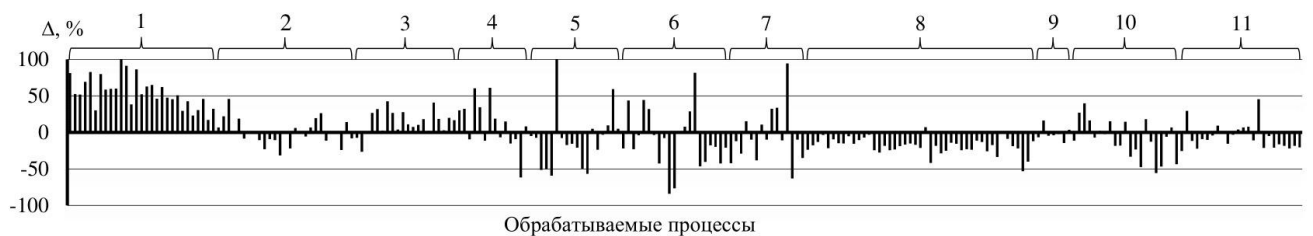


Рисунок 3.3 – Метод Ортиза – Чен:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

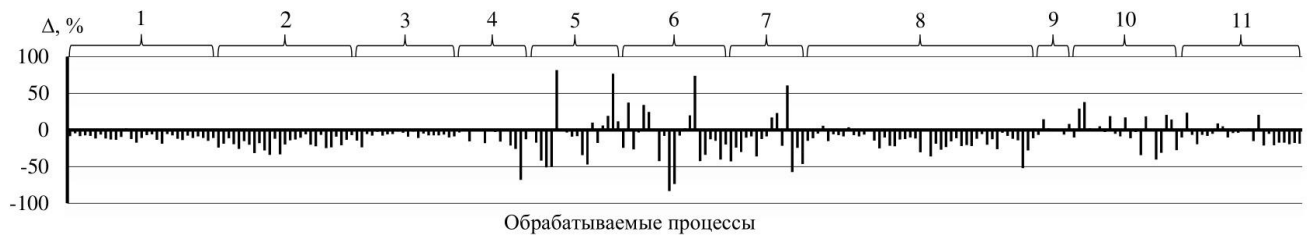


Рисунок 3.4 – Метод $\alpha_{0.75}$:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

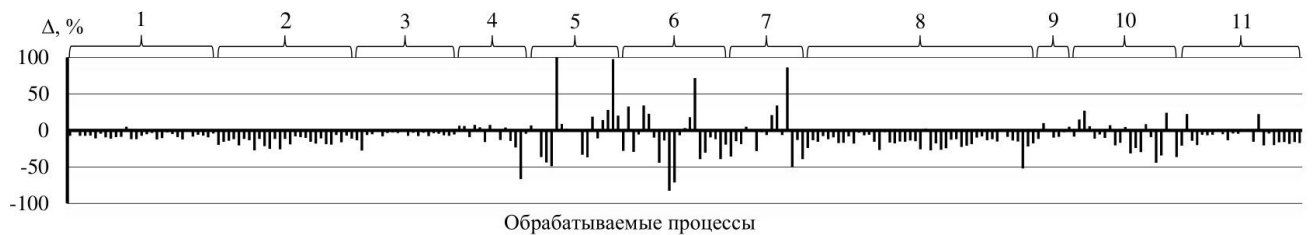


Рисунок 3.5 – Метод Тово – Бенашутти:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

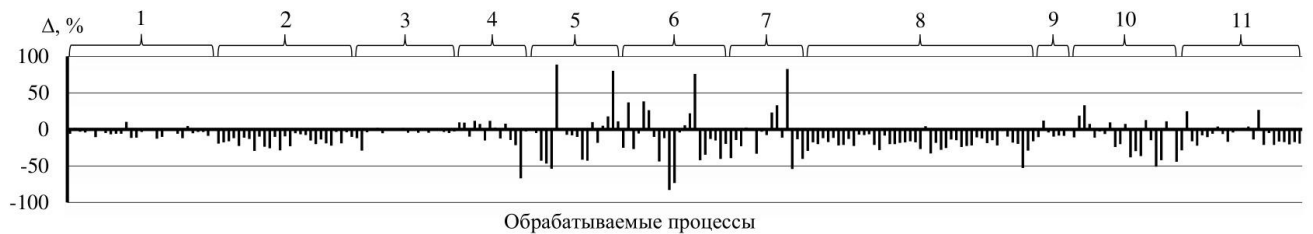


Рисунок 3.6 – Метод Дирлика:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

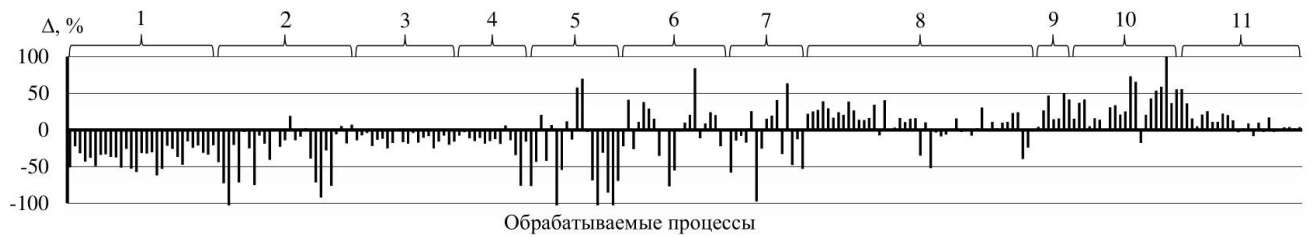


Рисунок 3.7 – Метод Чжао – Бейкера:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

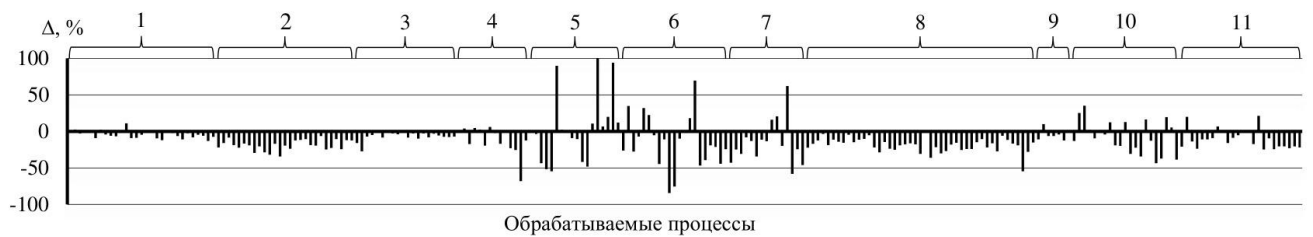


Рисунок 3.8 – Метод Парка:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

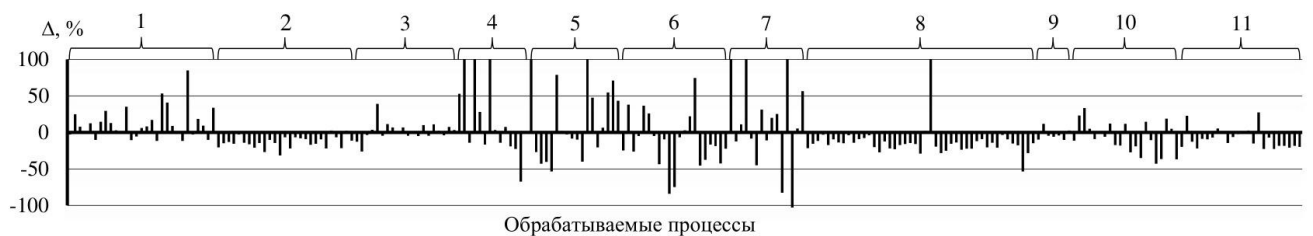


Рисунок 3.9 – Метод Чжун – Парка:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

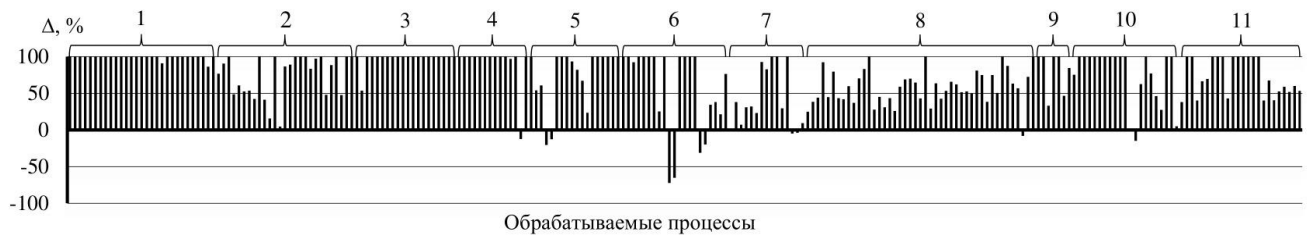


Рисунок 3.10 – Метод Лотсберга:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

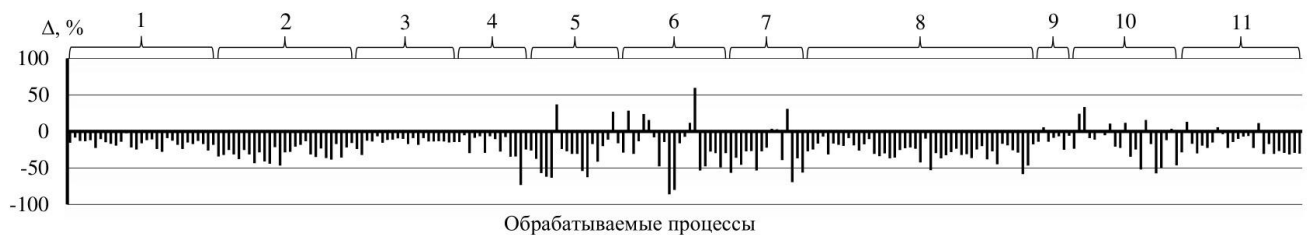


Рисунок 3.11 – Одномоментный метод:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

В таблице 3.2 приведены средние значения Δ_m и среднеквадратические отклонения σ_Δ величины относительного отклонения Δ (сортировка методов по возрастанию значения σ_Δ). Стоит отметить, что обработка методами Парка и Чжун – Парка нескольких процессов нагружения показала сильно завышенные результаты ($\Delta \sim 10^3 \dots 10^7$). При вычислении средних значений Δ_m и среднеквадратических отклонений σ_Δ такие высокие значения Δ считались выбросами. Так, при расчёте методом Парка не учтён выброс для процесса 104, при расчёте методом Чжун – Парка – выбросы для процессов 130, 133, 141 и 169.

Таблица 3.2 – Средние значения и среднеквадратические отклонения величины Δ :
^{*1} – не учтён выброс для процесса 104; ^{*2} – не учтены выбросы для процессов 130, 133, 141 и 169

Метод	$\Delta_m, \%$	$\sigma_\Delta, \%$
Одномоментный	–22.0	19.3
$\alpha_{0.75}$	–10.4	19.9
Тово – Бенашутти	–9.2	20.4
Парка ^{*1}	–11.7	20.8
Дирлика	–10.0	20.9
Ортиза – Чен	1.5	33.3
Чжао – Бейкера	–8.3	43.0
Чжун – Парка ^{*2}	–2.9	44.9
Виршинга – Лайга	25.8	64.1
Узкополосное приближение	58.4	80.7
Лотсберга	115.7	83.0

Всего исследовано 11 спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости, применяемых для анализа усталости конструкций в частотной области (в п. 1.2.2 представлена классификация данных методов в зависимости от принципа расчёта усталостной повреждаемости). Были вычислены усталостные повреждаемости для процессов, зарегистрированных во время ЛИ опытного образца среднемагистрального пассажирского самолёта.

На рисунках 3.1 – 3.11 показано, что для агрегатов 5, 6 и 7 значения усталостной повреждаемости, вычисленные спектральными методами от действия некоторых процессов нагружения, существенно отличаются от значений, полученных с использованием МПЦ. Данные каналы регистрируют нагрузки на основных органах управления – элеронах, рулях направления и высоты.

Некоторые методы из разных групп (методы $\alpha_{0.75}$, Тово – Бенашутти, Дирлика, Парка и одномоментный) показывают приблизительно одинаковый характер полученной «кривой» усталостной повреждаемости для всей выборки процессов. При этом среднее значение Δ_m данных методов относительно невелико, но отрицательно (от -22.0% до -9.2%); среднеквадратическое отклонение σ_Δ мало по сравнению с другими методами (от 19.3% до 22.4%).

Для большей части исследуемых процессов метод Ортиза – Чен позволяет получить похожий результат, однако для процессов нагружения фюзеляжа, расчётные значения усталостной повреждаемости оказались завышенными.

Методы узкополосного приближения, Виршинга – Лайта, Чжао – Бейкера, Чжун – Парка и Лотсберга показали более высокое среднеквадратическое отклонение σ_Δ (от 43.0% до 83.0%). Метод Лотсберга предполагает, что процесс нагружения имеет две чётко выраженные спектральные составляющие: НЧ и ВЧ. Данное условие редко выполняется в нагруженности конструкции самолёта. Поэтому метод Лотсберга показал наиболее высокое среднее значение относительного отклонения Δ_m (115.7%). В то время как методы Чжао – Бейкера и Чжун – Парка, наоборот, имеют хоть и отрицательные, но небольшие средние значения Δ_m (-8.3% и -2.9% соответственно).

Важным фактором при выборе метода является среднеквадратическое отклонение σ_Δ , характеризующее разброс величины Δ . Большинство методов показали высокие значения данной величины. Однако есть методы со сравнительно низким среднеквадратическим отклонением σ_Δ : $\alpha_{0.75}$, Тово – Бенашутти, Дирлика, Парка и одномоментный. Данные методы, основанные на разных принципах, в целом показали близкие значения усталостной повреждаемости для всех 241 исследуемых процессов. Самое низкое среднеквадратическое отклонение σ_Δ получилось при расчёте одномоментным методом (19.3%).

Также важным фактором является простота соотношения. Простое выражение позволит ускорить вычисления усталостной повреждаемости и модифицировать формулу для разработки метода расчёта усталостной

повреждаемости в случае совместного действия нагрузок, заданных во временной и частотной областях. Наиболее простые выражения имеют узкополосное приближение (1.35) и одномоментный метод (1.64). Их соотношения содержат только один спектральный момент.

Таким образом, хороший результат при анализе усталости от воздействия авиационных спектров нагружения показал одномоментный метод. Во-первых, он имеет самое низкое среднеквадратическое отклонение σ_{Δ} относительно усталостной повреждаемости по МПЦ. Во-вторых, данный метод выражается простым соотношением, содержащим только один спектральный момент. Он подходит как для расчёта усталостной повреждаемости с целью ускорения расчётов при подтверждении соответствия пассажирских самолётов требованиям НЛГ 25, так и для разработки метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта.

3.2 Разработка метода расчёта усталостной повреждаемости от действия высокочастотной составляющей нагрузки

Проводится более подробное рассмотрение выражения интенсивности усталостной повреждаемости согласно одномоментному методу расчёта (1.64). Отмеченная в п. 3.1 простота формулы позволяет получать простые соотношения при использовании методов математического анализа, в частности разложения функции в бесконечный ряд. Поэтому для приведённых далее преобразований выбирается одномоментный метод.

В основе одномоментного метода лежит ГСС усталостных повреждений, сформулированная В. Л. Райхером [54]: при случайном нагружении с непрерывной СПМ $S_x(\omega)$ доля энергии $S_x(\omega_j)\Delta\omega$ на частоте ω_j может быть заменена на другой частоте, в частности на характерной частоте ω^* , эквивалентной по средней использованной усталостной долговечности долей энергии

$S_X^{\text{экв}}(\omega^*)\Delta\omega$; изменение доли энергии при переходе с частоты ω_j на частоту ω^* , независимо от наличия и интенсивности других составляющих процесса X , происходит в том же отношении, в каком изменяется СПМ $S_X(\omega) = \sigma_X^2 \delta(\omega - \omega_j)$ при переходе на частоту ω^* с сохранением средней использованной усталостной долговечности. Описанная эквивалентность на всём диапазоне частот показана на рисунке 3.12, символом « $\sim$ » обозначена эквивалентность, $A_X(\omega)$ – амплитудный спектр процесса X .

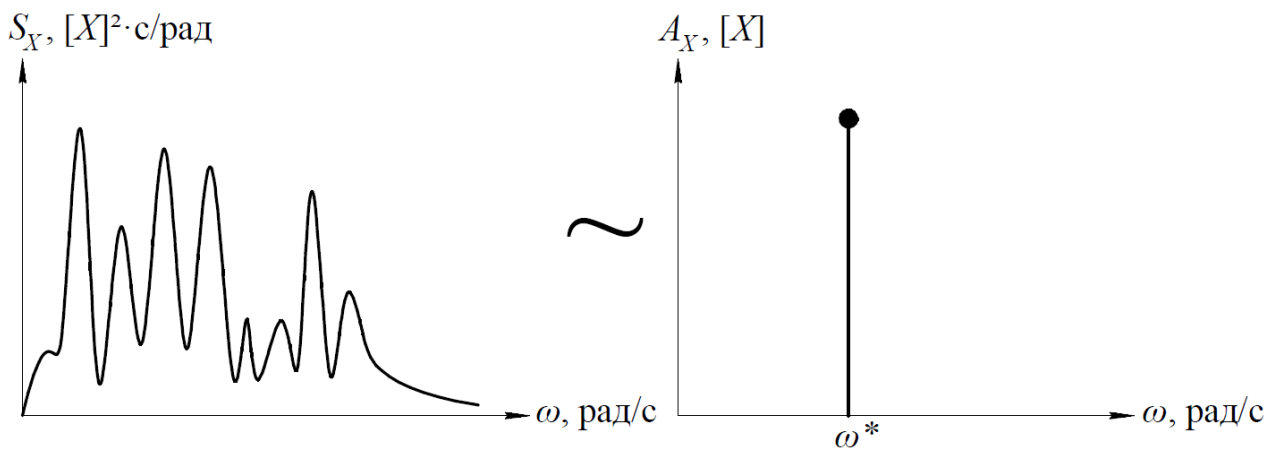


Рисунок 3.12 – Замена широкополосного процесса эквивалентным моногармоническим согласно ГСС усталостных повреждений

При этом характерная частота выражается соотношением

$$\omega^* = \left(\frac{\mu_2}{\frac{m}{\mu_0}} \right)^{\frac{m}{2}}. \quad (3.2)$$

Таким образом, ГСС усталостных повреждений заключается в представлении широкополосного процесса эквивалентным по средней использованной усталостной долговечности моногармоническим симметричным процессом, для которого при расчёте усталостной повреждаемости можно использовать узкополосную формулу усталостной повреждаемости (1.35).

Соображения, относящиеся к приведению интенсивности усталостной повреждаемости к сумме двух слагаемых, изложены в работах [132–135].

Среднее отклонение усталостной повреждаемости для спектров нагружения самолёта составило $\Delta_m = -22\%$ (см. п. 3.1). Вводится поправочный коэффициент одномоментного метода, корректирующий значение интенсивности усталостной повреждаемости «в запас прочности»

$$K_{OM} = 1.3. \quad (3.3)$$

Важно отметить, что данное значение коэффициента получено для спектров внутренних силовых факторов конструкции среднемагистрального пассажирского самолёта, и для анализа усталости других изделий может не подойти.

Для учёта влияния постоянного среднего значения нагрузки на усталостную повреждаемость предлагается использовать коэффициент, масштабирующий СПМ (см. п. 1.3.1). Из известных выражений коэффициента, опираясь на методическую базу ПАО «Яковлев», выбирается модель Гербера

$$K_{Ge} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{X}}{X_{кр}} \right)^2}, \quad (3.4)$$

здесь $\bar{X}$ – постоянная составляющая процесса нагружения, $X_{кр}$ – предельное значение нагружения.

Таким образом, с учётом коэффициентов (3.3) и (3.4) модифицированное выражение для интенсивности усталостной повреждаемости (1.64) представляется в следующем виде

$$d = K_{OM} K_{Ge}^m \frac{2^{\frac{m}{2}}}{2\pi A} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \left(\mu_{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{m}{2}}. \quad (3.5)$$

Вводится параметр K_{Π}

$$K_{\Pi} = K_{OM} K_{Ge}^m \frac{2^{\frac{m}{2}}}{2\pi A} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right), \quad (3.6)$$

содержащий произведение всех констант постоянной части соотношения (3.5).

Составляющая нагрузки выше радиальной граничной частоты $\omega_{BЧ}$ принимается в качестве ВЧ. Используя свойство аддитивности интеграла, можно представить спектральный момент (1.21) в виде

$$\mu_j = \int_0^{\omega_{BЧ}} \omega^j S_X(\omega) d\omega + \int_{\omega_{BЧ}}^{\infty} \omega^j S_X(\omega) d\omega = \mu_j^{(HЧ)} + \mu_j^{(BЧ)}, \quad (3.7)$$

где $\mu_j^{(HЧ)}$, $\mu_j^{(BЧ)}$ – соответственно спектральные моменты НЧ и ВЧ составляющих в точной постановке. Стоит отметить, что данные соотношения в общем случае, когда исследуемый процесс нагружения не является суперпозицией двух дельта-коррелированных процессов, могут значительно отличаться от приблизительных выражений НЧ и ВЧ спектральных моментов (1.60).

Степень спектрального момента из выражения (3.5) представляется в виде

$$\left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\gamma} = \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(HЧ)} + \mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(BЧ)}\right)^{\gamma} = \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(HЧ)}\right)^{\gamma} (1+Q)^{\gamma}, \quad (3.8)$$

где Q , γ – вводимые для обозначения параметры

$$Q = \frac{\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(BЧ)}}{\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(HЧ)}}; \gamma = \frac{m}{2}. \quad (3.9)$$

Выполняется разложение степени суммы из выражения (3.8) в ряд Маклорена с учётом обозначений (3.6) и (3.9) в предположении, что $Q \ll 1$

$$(1+Q)^\gamma = 1 + \gamma Q + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} Q^2 + \dots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{Q^j}{j!} \prod_{k=1}^j (\gamma - k + 1) \right]. \quad (3.10)$$

Таким образом, модифицированное выражение интенсивности усталостной повреждаемости (3.5) представляется в виде бесконечного ряда

$$d = K_{\Pi} \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(Hq)} \right)^\gamma \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{Q^j}{j!} \prod_{k=1}^j (\gamma - k + 1) \right] \right\}. \quad (3.11)$$

Для практического применения формулы (3.11), являющейся бесконечным рядом, необходимо отбросить члены ряда выше некоторого заданного порядка. Предлагается рассмотреть несколько диапазонов значений степени кривой усталости m .

В диапазоне значений степени кривой усталости $m = 0 \dots 2$ консервативным является пренебрежение членами ряда выше 1-го порядка ($j = 1$)

$$\begin{aligned} d|_{m=0 \dots 2} &\leq K_{\Pi} \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(Hq)} \right)^\gamma (1 + \gamma Q) = d_{Hq} + d_{Bq}; \\ d_{Hq} &= K_{\Pi} \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(Hq)} \right)^\gamma; \quad d_{Bq} = d_{Hq} \gamma Q, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где d_{Hq} , d_{Bq} – слагаемые, предположительно соответствующие НЧ и ВЧ составляющим интенсивности усталостной повреждаемости. Используется знак «меньше или равно», поскольку правая часть неравенства в выбранном диапазоне значений $m = 0 \dots 2$ не принимает значения меньше d из выражения (3.11).

На рисунке 3.13 представлено сравнение исходной и приближённой функций: $(1+Q)^\gamma$ и $1+\gamma Q$ ($j=1$).

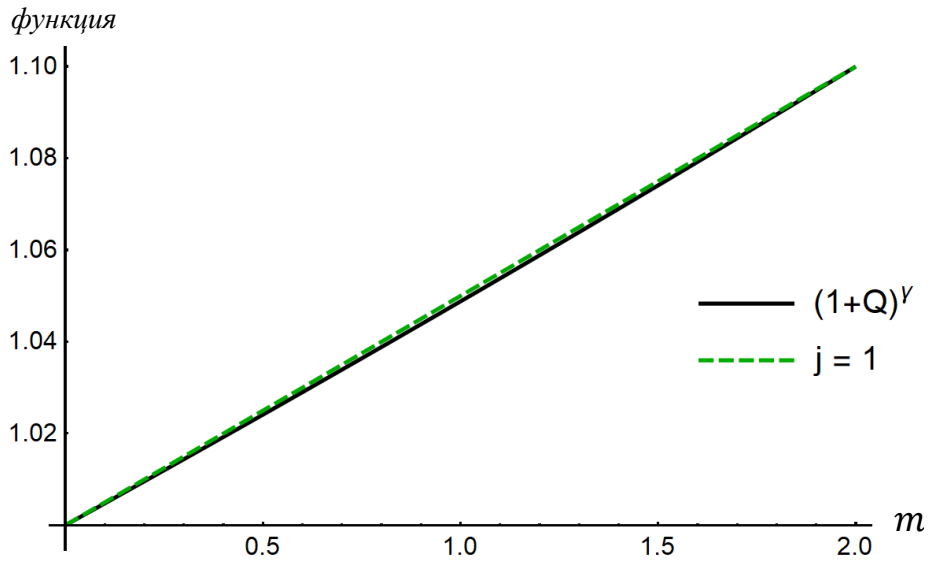


Рисунок 3.13 – Исходная и приближённая функции при $m = 0 \dots 2$ ($Q = 0.1$)

Подтверждение соответствия слагаемых d_{Hq} и d_{Bq} вкладам НЧ и ВЧ составляющих нагрузки в величину усталостной повреждаемости рассмотрено далее, в п. 3.3 данной главы.

Аналогично в диапазоне значений степени кривой усталости $m = 2 \dots 4$ консервативным является пренебрежение членами бесконечного ряда (3.11) выше 2-го порядка ($j = 1, 2$)

$$d|_{m=2 \dots 4} \leq K_{\Pi} \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(Hq)} \right)^{\gamma} \left[1 + \gamma Q + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} Q^2 \right] = d_{Hq} + d_{Bq}; \quad (3.13)$$

$$d_{Hq} = K_{\Pi} \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(Hq)} \right)^{\gamma}; \quad d_{Bq} = d_{Hq} \left[\gamma Q + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} Q^2 \right].$$

На рисунке 3.14 представлено сравнение исходной и приближённой функций: $(1+Q)^\gamma$ и $1+\gamma Q + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} Q^2$ ($j=1, 2$).

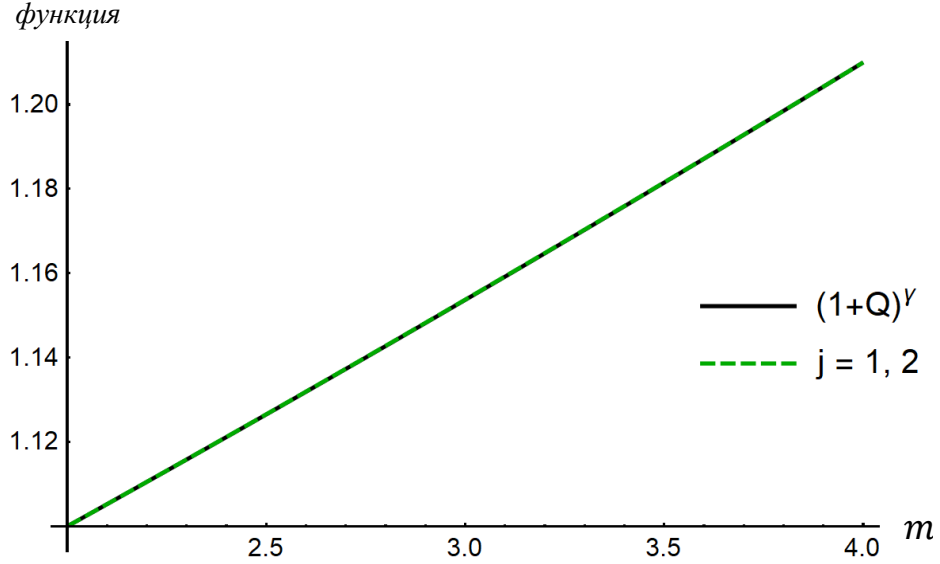


Рисунок 3.14 – Исходная и приближённая функции при $m = 2 \dots 4$ ($Q = 0.1$)

По сравнению с предыдущим диапазоном (3.12), в случае (3.13) уменьшилось относительное отклонение между исходной и приближённой функциями

$$\Delta_d = \frac{(d_{Hq} + d_{Bq}) - d}{d} \cdot 100 \%. \quad (3.14)$$

Наконец, $\forall r \in \mathbb{N}$, в диапазоне значений степени кривой усталости $m = 2(r-1) \dots 2r$ консервативным оказывается пренебрежение членами ряда выше r -го порядка ($j=1, \dots, r$)

$$d|_{m=2(r-1) \dots 2r} \leq K_{\Pi} \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(Hq)} \right)^{\gamma} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^r \left[\frac{Q^j}{j!} \prod_{k=1}^j (\gamma - k + 1) \right] \right\} = d_{Hq} + d_{Bq}; \quad (3.15)$$

$$d_{Hq} = K_{\Pi} \left(\mu_{\frac{1}{\gamma}}^{(Hq)} \right)^{\gamma}; \quad d_{Bq} = d_{Hq} \sum_{j=1}^r \left[\frac{Q^j}{j!} \prod_{k=1}^j (\gamma - k + 1) \right].$$

На рисунке 3.15 представлена кусочно-заданная приближённая функция, определяемая пренебрежением членами ряда (3.11) выше порядка r , в сравнении с исходной функцией $(1+Q)^y$, при значении параметра $Q=0.1$.

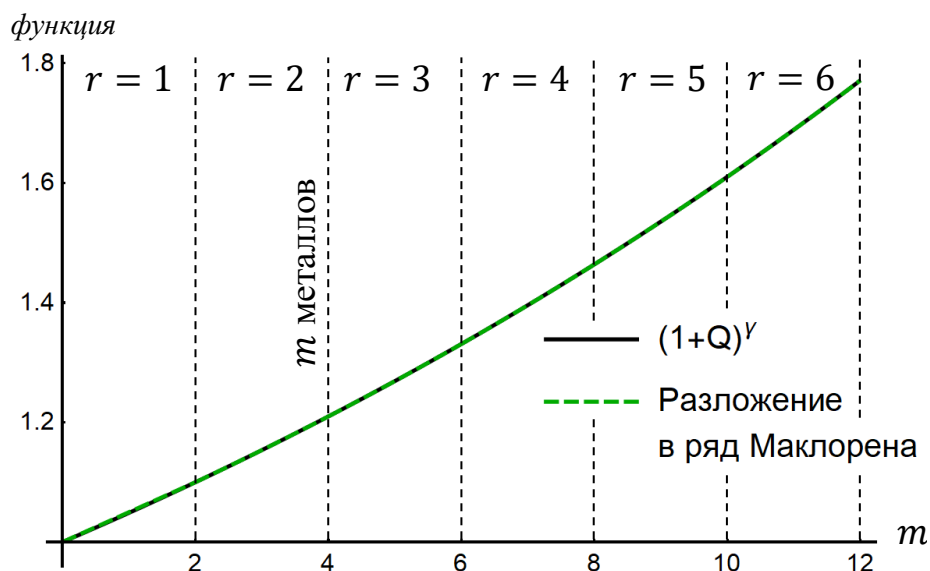


Рисунок 3.15 – Исходная и кусочно-заданная приближённая функции ($Q=0.1$)

Стоит отметить, что две отображённые на рисунке 3.15 функции очень близки. При этом относительное отклонение Δ_d (3.14) снижается при уменьшении параметра Q и при увеличении степени кривой усталости m . В таблице 3.3 приведены значения для некоторых значений Q и m .

Таблица 3.3 – Относительное отклонение сравниваемых значений интенсивности усталостной повреждаемости

Q	Δ_d , %					
	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=7$	$m=9$	$m=11$
0.01	$1.24 \cdot 10^{-3}$	$6.13 \cdot 10^{-6}$	$3.80 \cdot 10^{-8}$	$2.63 \cdot 10^{-10}$	$1.95 \cdot 10^{-12}$	$2.10 \cdot 10^{-14}$
0.03	$1.09 \cdot 10^{-2}$	$1.60 \cdot 10^{-4}$	$2.91 \cdot 10^{-6}$	$5.95 \cdot 10^{-8}$	$1.30 \cdot 10^{-9}$	$2.98 \cdot 10^{-11}$
0.1	0.114	$5.22 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{-4}$	$1.91 \cdot 10^{-5}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$	$9.36 \cdot 10^{-8}$
0.3	0.862	0.103	$1.51 \cdot 10^{-2}$	$2.47 \cdot 10^{-3}$	$4.32 \cdot 10^{-4}$	$7.89 \cdot 10^{-5}$

Таким образом, предложен способ разделения интенсивности усталостной повреждаемости на два слагаемых: НЧ и ВЧ. Модифицированное соотношение одномоментного метода (3.5) было разложено в ряд Маклорена (3.11), после чего была установлена закономерность (3.15): в зависимости от значения степени кривой усталости можно консервативно пренебречь членами бесконечного ряда выше определённого порядка.

Выражение интенсивности усталостной повреждаемости от действия НЧ составляющей нагрузки $d_{НЧ}$ не зависит от диапазона r степени кривой усталости и эквивалентно выражению (3.5), если подвергнуть процесс нагружения X идеальной фильтрации частот выше $f_{ВЧ}$.

Описанное обстоятельство позволяет проводить расчёт НЧ усталостной повреждаемости по классическому методу: поиск экстремумов, схематизация МПЦ и вычисление усталостной повреждаемости по ГЛС с учётом асимметрии циклов нагружения. Интенсивность усталостной повреждаемости от воздействия НЧ составляющей можно определить из выражения $d_{НЧ} = D_{НЧ} / T$, спектральный момент $\mu_{2/m}^{(НЧ)}$ и ВЧ усталостную повреждаемость $d_{ВЧ}$ – из соотношения (3.15).

Проведение расчёта НЧ усталостной повреждаемости во временной области позволяет учесть влияние цикла «земля – воздух – земля» (ЗВЗ) и изменяющегося среднего значения нагрузки. Если же временная реализация НЧ составляющей нагрузки неизвестна, необходимо разбивать полёт на участки с постоянным средним значением нагрузки, при этом влияние цикла ЗВЗ не учитывается.

Таким образом, непосредственно расчёт усталостной повреждаемости $D_{ВЧ}$ от действия ВЧ составляющей процесса нагружения X состоит из двух этапов:

- расчёт НЧ усталостной повреждаемости $D_{НЧ}$. Если известна реализация НЧ составляющей процесса нагружения $X_{НЧ}$ во временной области, то расчёт $D_{НЧ}$ выполняется по классическому методу (поиск экстремумов, схематизация МПЦ, учёт асимметрии циклов и суммирование согласно ГЛС); если реализация процесса неизвестна, то выполняется расчёт интенсивности $d_{НЧ}$ в частотной области с использованием выражения (3.15) и умножения её на длительность процесса T ;

– расчёт ВЧ усталостной повреждаемости $D_{BЧ}$ в частотной области путём расчёта спектрального момента $\mu_{2/m}^{(HЧ)}$ и интенсивности $d_{BЧ}$ по соотношению (3.15) и умножения интенсивности $d_{BЧ}$ на длительность процесса T .

Блок-схема метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта, включающая предварительную обработку сигналов, приведена на рисунке 3.16.

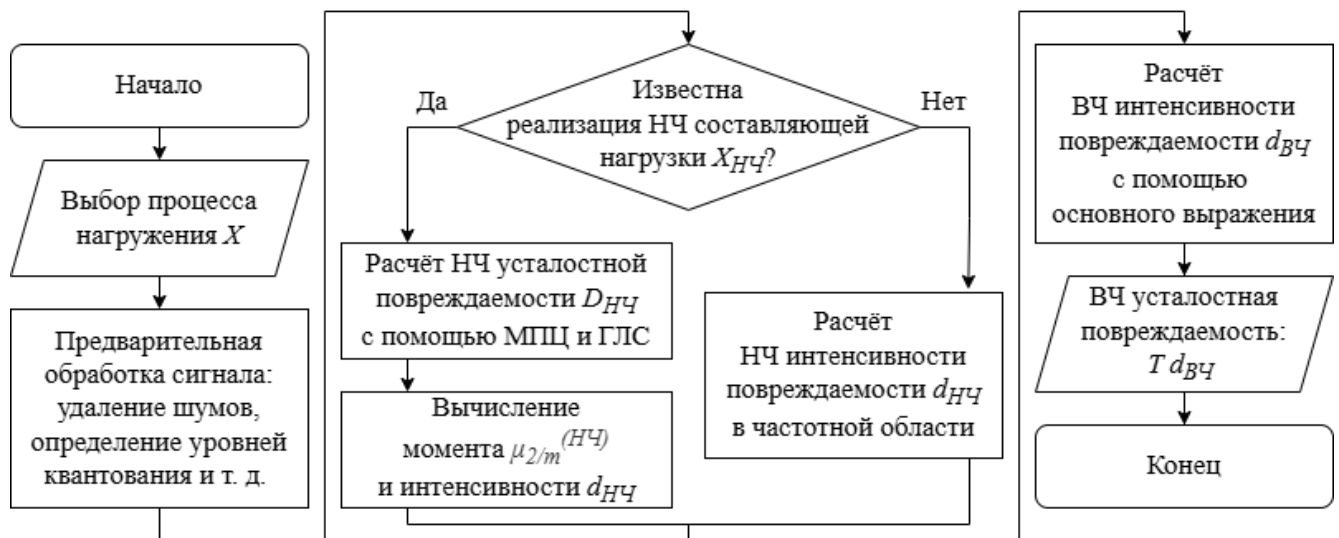


Рисунок 3.16 – Блок-схема метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта

3.3 Сравнение разработанного и классического методов при расчёте высокочастотной усталостной повреждаемости

Полученное соотношение для кусочно-заданной приближённой функции интенсивности усталостной повреждаемости (3.15) предлагается подтвердить путём сравнения с расчётом ВЧ усталостной повреждаемости по классическому методу, заключающемуся в выделении экстремумов, схематизации МПЦ и вычислении усталостной повреждаемости согласно ГЛС с учётом асимметрии циклов нагружения согласно ДПУД.

В качестве исследуемых процессов выбираются реализации нагружения самолёта, использованные в п. 3.1 при сравнении спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости (см. таблица 3.1): данные с 241 измерительного канала, описывающие нагруженность фюзеляжа, крыла, хвостового оперения и органов управления самолёта в течение участка полёта длительностью $T = 100$ с, в течение которого не зарегистрированы изменения режимов полёта.

В качестве граничной частоты между НЧ и ВЧ диапазонами выбирается значение $f_{BЧ} = 10$ Гц. Важно, что если подвергнуть реализацию случайного процесса нагружения фильтрации частот ниже значения $f_{BЧ}$, то при расчёте усталостной повреждаемости по классическому методу (схематизация МПЦ и суммирование согласно ГЛС с учётом асимметрии циклов) не получится учесть среднее значение сигнала $\bar{X}$ и эффект наложения ВЧ циклов нагружения на НЧ ВА колебания.

Поэтому для того, чтобы подтвердить, отражает ли слагаемое $d_{BЧ}$ из соотношения (3.15) вклад ВЧ составляющей нагрузки в интенсивность усталостной повреждаемости, выполняется проверка следующего равенства

$$T d_{BЧ} = D_{МПЦ}^{BЧ}, \quad (3.16)$$

где $D_{МПЦ}^{BЧ}$ – усталостная повреждаемость от действия ВЧ составляющей нагрузки, рассчитываемая согласно классическому методу и определяемая следующим образом

$$D_{МПЦ}^{BЧ} = D_{МПЦ} - D_{МПЦ}^{HЧ}, \quad (3.17)$$

здесь $D_{МПЦ}$, $D_{МПЦ}^{HЧ}$ – значения усталостной повреждаемости за период T (расчёт по классическому методу) соответственно от действия исследуемого процесса

нагружения $X(t)$ и процесса $X_{HЧ}(t)$, подвергнутого идеальной фильтрации спектральных составляющих с частотой выше $f_{BЧ}$.

Для сравнения методов (разработанного с классическим) по аналогии с выражением (3.1) вычисляется относительное изменение значений усталостной повреждаемости

$$\Delta_{BЧ} = \frac{T d_{BЧ} - D_{МПЦ}^{BЧ}}{D_{МПЦ}^{BЧ}} \cdot 100 \%. \quad (3.18)$$

Результаты расчёта величины $\Delta_{BЧ}$ представлены на рисунке 3.17. Сравнение методов показывает, что величины усталостной повреждаемости $T d_{BЧ}$ и $D_{МПЦ}^{BЧ}$ близки по значению. В среднем они отличаются на $\Delta_{BЧ\ m} = -2.8\%$, среднеквадратическое отклонение величины $\Delta_{BЧ}$ составляет $\sigma_{\Delta_{BЧ}} = 27.3\%$.



Рисунок 3.17 – Сравнение значений ВЧ усталостных повреждаемостей, полученных по классическому и новому методам:

1 – фюзеляж, 2 – крыло, 3 – ВО, 4 – ГО, 5 – элероны, 6 – РВ, 7 – РН,
8 – интерцепторы, 9 – ВТ, 10 – предкрылок, 11 – закрылок

Можно сделать вывод, что высказанные в п. 3.2 предположения верны, и представленный метод подходит для расчёта ВЧ усталостной повреждаемости элементов конструкции самолёта от воздействия случайных процессов нагружения.

3.4 Выводы по главе 3

Выполнен сравнительный анализ спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости. Для процессов нагружения, зарегистрированных в ходе ЛИ опытного образца среднемагистрального пассажирского самолёта, определены значения усталостной повреждаемости спектральными методами в сравнении со значениями, полученными по классическому методу. В результате анализа был отмечен одномоментный метод, показавший самый низкий разброс значений определяемой величины и имеющий простое выражение.

Разработан метод анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта, основанный на одномоментном методе. Выполнено разложение интенсивности усталостной повреждаемости в ряд Маклорена. Отмечено, что для заданных диапазонов значений степени кривой усталости консервативным является пренебрежение членами бесконечного ряда выше определённого порядка. Предложен способ разделения расчётной величины на два слагаемых (НЧ и ВЧ). Полученные соотношения справедливы для любого значения степени кривой усталости, т. е. подходят для анализа ВЧ усталости конструкций как из металлических, так и из композиционных материалов. Основными преимуществами данного метода являются: учёт влияния НЧ составляющей и ненулевого среднего значения нагрузки на ВЧ усталостную повреждаемость; возможность раздельной обработки НЧ (во временной области) и ВЧ (в частотной области) составляющих нагрузки.

Проведены расчёты ВЧ усталостной повреждаемости с использованием разработанного и классического методов. Выполненное сравнение величин показало, что их значения в среднем близки, а разброс этих значений невелик. Сделан вывод о пригодности метода для анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта от воздействия случайных процессов нагружения.

Глава 4 Численная реализация метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта

Представленный в главе 3 метод анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта позволяет проводить аналитический расчёт усталостной повреждаемости от действия ВЧ составляющей нагрузки. При этом нагрузка может быть определена в широком спектральном диапазоне, а её составляющие – заданы во временной области (НЧ составляющая) и в частотной области (ВЧ составляющая).

В настоящее время основным инструментом для анализа прочности конструкций является МКЭ. Он позволяет в численной постановке решать задачи механики деформируемого твёрдого тела, определять НДС конструкций, имеющих произвольную форму. Для расчётов МКЭ используется программный комплекс MSC Nastran. Анализ усталости при воздействии НЧ нагрузки во временной области можно выполнить с помощью анализа MSC Nastran Direct Transient Response (решатель SEDTRAN – SOL 109). Алгоритм выполнения данного расчёта известен и достаточно хорошо отработан⁸, а подготовка конечно-элементной модели (КЭМ) и входного файла может полностью выполняться в программах конечно-элементного моделирования (например, в Simcenter Femap).

В главе приводится численный алгоритм решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем в конечно-элементном комплексе MSC Nastran. Проводится сравнение результатов численных экспериментов с аналитическим решением для двух простых предрастянутых шарнирно опёртых конструкций: прямого стержня и прямоугольной пластины. Тонкостенные и стержневые элементы являются основными для силовой конструкции самолёта. Описание и сравнение решений подробно представлено в работах [140, 141].

⁸ MSC Software. MSC Nastran 2022.1 Quick Reference Guide. – Newport Beach : MSC Software Corporation, 2022, – 3418 p.

Далее выполняется численная реализация разработанного в п. 3.2 метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта. Подготовка КЭМ проводится в программе Simcenter Femap, но возможна разработка КЭМ и другими способами. Для расчётов применяется MSC Nastran. Если НЧ составляющая нагрузки задана во временной области, то используется MSC Nastran Direct Transient Response (решатель SEDTRAN – SOL 109), если в частотной – MSC Nastran Random Response (решатель SEMFREQ – SOL 111).

Разработанный метод применяется для численного анализа усталости ресивера ГС среднемагистрального пассажирского самолёта. Создаётся КЭМ, задаётся нагружение согласно нормативным требованиям, предъявляемым к авиационному оборудованию, и вычисляется усталостная повреждаемость.

При разработке численного алгоритма решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем в комплексе MSC Nastran приводится: аналитическая постановка задачи о случайных колебаниях для линейных преднагруженных систем; численное решение данной задачи; сравнение решений задачи о поперечных случайных колебаниях шарнирно опёртых предварительно нагруженных прямого стержня и прямоугольной пластины с целью валидации численного алгоритма.

4.1 Постановка задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных линейных систем на примере прямого стержня и прямоугольной пластины

Описывается аналитическое решение задачи о случайных колебаниях линейных предварительно нагруженных систем с распределёнными параметрами на примере двух простых металлических предварительно растянутых шарнирно опёртых конструкций: прямого стержня постоянного поперечного сечения [140] и прямоугольной пластины [141]. На данные конструкции воздействует случайная поперечная нагрузка и детерминированная растягивающая постоянная сила.

Контрольными величинами являются прогиб, напряжение и усталостная повреждаемость в центральной точке конструкции.

При аналитическом решении задачи случайных поперечных колебаний растянутого стержня используется модель Тимошенко поперечного изгиба прямого стержня с учётом инерции поворота сечения и растяжения постоянной продольной силой N_x . Посредством продольной силы реализуется постоянное среднее значение напряжения. Основные положения взяты из работ [66, 68].

Для однозначного определения положения каждого сечения балки вводятся два параметра: вертикальное перемещение упругой линии стержня в плоскости изгиба Oxz $w(x, t)$ и поворот сечения $\vartheta(x, t)$ «вокруг» оси Oy ; здесь x – продольная координата. Разрешающая система ДУ движения балки относительно переменных w и ϑ

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[k_1 G F \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta \right) \right] + N_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial w}{\partial t} + q = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(E I_y \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + k_1 G F \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta \right) - \rho I_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где ρ , E и G – плотность, модули упругости и сдвига материала; I_y и F – момент инерции относительно оси Oy и площадь поперечного сечения; k_1 – коэффициент учёта неравномерности распределения касательных напряжений по сечению; α – коэффициент сопротивления; q – внешняя поперечная распределённая сила.

Далее приводится решение системы ДУ (4.1) для шарнирно опёртого прямого стержня с постоянным поперечным сечением и длиной l (см. рисунок 4.1). Используется прямоугольное поперечное сечение с шириной b и высотой h . На рисунке 4.1 также показаны направления осей Ox , Oy и Oz .

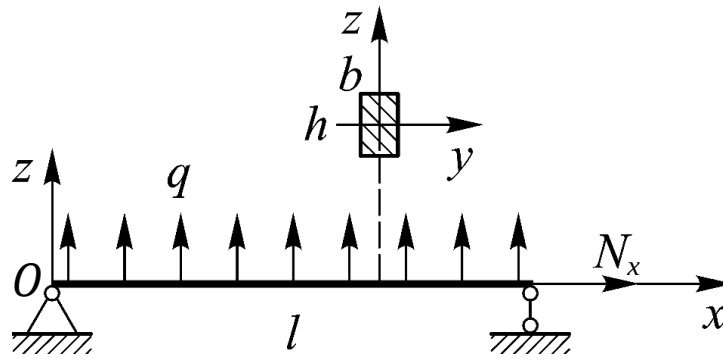


Рисунок 4.1 – Расчётная схема балки

Для решения задачи случайных колебаний линейной системы с распределёнными детерминированными параметрами под действием случайной нагрузки большое распространение получил метод разложения движения системы по формам собственных колебаний.

Решение задачи свободных колебаний $q = 0$ без учёта демпфирования $\alpha = 0$ определяется в виде суперпозиции форм собственных колебаний

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} B_j u_j(x) \cos(p_j t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(\varphi_j x) \cos(p_j t); \\ \vartheta(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \theta_j(x) \cos(p_j t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos(\varphi_j x) \cos(p_j t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

для которой ГУ на торцах $w|_{x=0,l} = 0$, $M_y|_{x=0,l} = 0$ выполняются автоматически. Здесь $u_j(x) = \sin(\varphi_j x)$ и $\theta_j(x) = \cos(\varphi_j x)$ – собственные формы колебаний, соответствующие собственным частотам (СЧ) p_j ; $\varphi_j = j\pi / l$ – вводимые параметры; M_y – изгибающий момент относительно оси Oy .

Подстановкой (4.2) в систему (4.1) с учётом свойства ортогональности форм колебаний получается однородная СЛАУ относительно констант B_j и C_j для каждой собственной формы. Условие существования её ненулевого решения приводит к выражению для собственных значений λ_j и СЧ p_j

$$p_j = \sqrt{\lambda_j}; \lambda_j = \frac{k_1 G}{2\rho} \times \left[\left(\frac{F}{I_y} + \frac{E}{k_1 G} \varphi_j^2 + \varphi_j^2 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{F}{I_y} + \frac{E}{k_1 G} \varphi_j^2 + \varphi_j^2 \right)^2 - 4\varphi_j^2 \left(\frac{E}{k_1 G} \varphi_j^2 + \frac{N_x}{k_1 G I_y} \right)} \right]. \quad (4.3)$$

Два значения СЧ p_j возникают из-за учёта инерции поворота стержня. Колебания системы при меньшем значении p_j^- соответствуют движению «в фазе» упругой линии w и поворота сечения $\mathcal{G}$. Большее значение p_j^+ соответствует движению w и $\mathcal{G}$ «в противофазе».

Пусть q – случайная стационарная поперечная нагрузка с нулевым математическим ожиданием $M[q] = 0$. Тогда стационарное решение неоднородной системы (4.1) с учётом n_ϕ собственных форм колебаний

$$w(x, t) \approx \sum_{j=1}^{n_\phi} u_j(x) [r_{j0} + r_j(t)]; \mathcal{G}(x, t) \approx \sum_{j=1}^{n_\phi} \theta_j(x) [\chi_{j0} + \chi_j(t)], \quad (4.4)$$

где $[r_{j0} + r_j(t)]$ и $[\chi_{j0} + \chi_j(t)]$ – главные координаты прогиба w и поворота $\mathcal{G}$ с постоянными r_{j0} , χ_{j0} и переменными $r_j(t)$, $\chi_j(t)$ составляющими.

Для анализа прочности необходимо получить вероятностные характеристики системы, определение которых рассматривается на примере прогиба $w(x, t)$.

Поскольку внешняя случайная нагрузка является стационарным процессом, главные координаты $[r_0 + r_j(t)]$, а следовательно, и функции прогиба $w(x, t)$ также являются стационарными. Автокорреляционная функция величины $w(x, t)$ определяется следующим выражением

$$\begin{aligned}
K_w(x, t_1, t_2) &= M \left[\overset{0}{w}(x, t_1) \overset{0}{w}(x, t_2) \right] = M \left[\sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{n_\phi} r_j(t_1) r_k(t_2) u_j(x) u_k(x) \right] = \\
&= \sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{n_\phi} K_{r_j r_k}(t_1, t_2) u_j(x) u_k(x),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где $\overset{0}{w}(x, t) = \sum_{j=1}^{n_\phi} r_j(t) u_j(x)$ – центрированная величина прогиба (с нулевым значением математического ожидания); $K_{r_j r_k}(t_1, t_2) = M[r_j(t_1) r_k(t_2)]$ – взаимная корреляционная функция r_j и r_k .

Для стационарных случайных функций взаимная корреляционная функция зависит от разности значений времени $t_2 - t_1 = \tau$, т. е. $K_{r_j r_k}(t_1, t_2) = K_{r_j r_k}(\tau)$ и $K_w(x, t_1, t_2) = K_w(x, \tau)$.

Для определения $K_{r_j r_k}(\tau)$ предварительно необходимо найти взаимные спектральные плотности $S_{r_j r_k}(\omega)$, которые определяются выражением

$$S_{r_j r_k}(\omega) = H_{r_j}(i\omega) H_{r_k}^*(i\omega) S_q(\omega), \tag{4.6}$$

где $H_{r_j}(i\omega)$ – частотная функция r_j ; $H_{r_k}^*$ – комплексно-сопряжённое значение для величины H_{r_k} ; $S_q(\omega)$ – спектральная плотность внешней нагрузки q .

Зная взаимную спектральную плотность $S_{r_j r_k}(\omega)$, взаимную корреляционную функцию $K_{r_j r_k}(\tau)$ можно определить по теореме Винера – Хинчина с помощью обратного преобразования Фурье

$$K_{r_j r_k}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{r_j r_k}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \tag{4.7}$$

Тогда дисперсия прогиба $w(x, t)$ имеет вид

$$D_w(x) = K_w(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = \sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{n_\phi} K_{r_j r_k}(0) u_j(x) u_k(x), \quad (4.8)$$

и его среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma_w(x) = \sqrt{D_w(x)}. \quad (4.9)$$

Спектральная плотность прогиба $w(x, t)$ определяется преобразованием Фурье соответствующей автокорреляционной функции

$$\begin{aligned} S_w(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_w(x, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{n_\phi} K_{r_j r_k}(\tau) u_j(x) u_k(x) \right] e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{n_\phi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} K_{r_j r_k}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] u_j(x) u_k(x) = \sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{n_\phi} S_{r_j r_k}(\omega) u_j(x) u_k(x). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для других систем с распределенными параметрами, вектор состояния которых может быть представлен в виде суперпозиции собственных форм колебаний, например, для пластин и оболочек.

Таким образом, определение вероятностных характеристик системы сводится к отысканию собственных форм колебаний и частотных функций. Собственные формы колебаний прогиба $w(x, t)$ и угла поворота $\vartheta(x, t)$ стержня получены. Остаётся определить частотные функции.

Подстановкой (4.4) и учётом свойства ортогональности собственных форм колебаний получают n_ϕ систем ДУ относительно $r_j(t)$ и $\chi_j(t)$

$$\begin{cases} -k_1 GF \varphi_j (\varphi_j r_j - \chi_j) - N_x \varphi_j \chi_j - \rho F \frac{\partial^2 r_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial r_j}{\partial t} = \frac{2}{l} \int_0^l q(x, t) u_j(x) dx; \\ -EI_y \varphi_j^2 \chi_j + k_1 GF (\varphi_j r_j - \chi_j) - \rho I_y \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Выполняется преобразование Лапласа системы (4.11)

$$\begin{cases} -k_1 GF \varphi_j (\varphi_j R_j - X_j) - N_x \varphi_j X_j - \rho F p^2 R_j - \alpha p R_j = \\ = \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{Q}(x, p) u_j(x) dx; \\ -EI_y \varphi_j^2 X_j + k_1 GF (\varphi_j R_j - X_j) - \rho I_y p^2 X_j = 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $R_j(p)$, $X_j(p)$ и $\tilde{Q}(x, p)$ – изображения $r_j(t)$, $\chi_j(t)$ и $q(x, t)$ соответственно.

Для случая, когда внешняя нагрузка $q(x, t)$ может быть представлена в виде произведения случайной функции времени $q_0(t)$ и детерминированной функции координаты $q_1(x)$, т. е. $q(x, t) = q_1(x) q_0(t)$, изображение также можно представить в виде произведения двух множителей $\tilde{Q}(x, p) = q_1(x) \tilde{Q}_0(p)$, и частотные функции r_j и χ_j определяются согласно выражениям

$$\begin{aligned} H_{r_j}(i\omega) &= \left. \frac{R_j(p)}{\tilde{Q}_0(p)} \right|_{p=i\omega} = \frac{b_{0j} + b_{2j} \omega^2}{a_{4j} \omega^4 + i a_{3j} \omega^3 + a_{2j} \omega^2 + i a_{1j} \omega + a_{0j}}; \\ H_{\chi_j}(i\omega) &= \left. \frac{X_j(p)}{\tilde{Q}_0(p)} \right|_{p=i\omega} = \frac{c_{0j} + c_{2j} \omega^2}{a_{4j} \omega^4 + i a_{3j} \omega^3 + a_{2j} \omega^2 + i a_{1j} \omega + a_{0j}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где a_{0j} , a_{1j} , a_{2j} , a_{3j} , a_{4j} , b_{0j} , b_{2j} , c_{0j} , c_{2j} – вводимые для обозначений параметры

$$\begin{aligned}
a_{0j} &= -k_1 GF l \varphi_j^2 (EI_y \varphi_j^2 + N_x); a_{1j} = -\alpha l (EI_y \varphi_j^2 + k_1 GF); \\
a_{2j} &= \rho F l (k_1 GF + k_1 GI_y \varphi_j^2 + EI_y \varphi_j^2); a_{3j} = \rho I_y \alpha l; a_{4j} = -\rho^2 F I_y l; \\
b_{0j} &= 2(EI_y \varphi_j^2 + k_1 GF) \int_0^l q_1(x) u_j(x) dx; b_{2j} = 2\rho I_y \int_0^l q_1(x) u_j(x) dx; \\
c_{0j} &= 2k_1 GF \varphi_j \int_0^l q_1(x) u_j(x) dx; c_{2j} = 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Использование модели Эйлера – Бернулли, не учитывающей сдвиги и инерцию поворота сечения, приводит к следующим соотношениям для СЧ и частотных функций

$$p_j = \sqrt{\frac{\varphi_j^2}{\rho F} (EI_y \varphi_j^2 + N_x)}; H_{r_j}(i\omega) = \frac{\frac{2}{\rho F \varphi_j} \int_0^l q_1(x) u_j(x) dx}{p_j^2 - \omega^2 + i \frac{\alpha}{\rho F} \omega}. \tag{4.15}$$

Далее определяются вероятностные характеристики максимальных растягивающих напряжений σ_{max} . С учётом выражения (4.4)

$$\sigma_{max}(x, t) = \frac{EI_y}{W_{y max}} \sum_{j=1}^{n_\phi} \frac{d\theta_j(x)}{dx} \chi_j(t) + \frac{N_x}{F}, \tag{4.16}$$

где $W_{y max}$ – момент сопротивления сечения изгибу вокруг оси Oy .

В случае прямоугольного поперечного сечения с шириной b и высотой h максимальное растягивающее напряжение представляется в виде

$$\sigma_{max}(x, t) = \frac{Eh}{2} \sum_{j=1}^{n_\phi} \frac{d\theta_j(x)}{dx} \chi_j(t) + \frac{N_x}{bh}. \tag{4.17}$$

Поскольку автокорреляционные функции вычисляются для центрированных величин, среднеквадратическое отклонение $\sigma_{\sigma_{max}}$ может быть определено в соответствии с формулами (4.5) – (4.9), если за функции формы принять

$$u_j(x) = \sqrt{\frac{EI_y}{W_{y_{max}}}} \frac{d\theta_j(x)}{dx}. \quad (4.18)$$

После получения спектральной плотности компонентов напряжённого состояния необходимо определить спектральную плотность эквивалентного напряжения $S_{\sigma_{эkv}}$. В случае поперечных колебаний стержня принимается

$$S_{\sigma_{эkv}}(x, \omega) = S_{\sigma_{max}}(x, \omega), \quad (4.19)$$

где $S_{\sigma_{max}}(x, \omega)$ – спектральная плотность максимального нормального напряжения (в верхних или нижних волокнах стержня).

Согласно модифицированному выражению одномоментного метода (3.5) учёт влияния постоянной преднагрузки на величину усталостной повреждаемости заключается в масштабировании спектральной плотности отклика

$$d = K_{OM} K_{Ge}^m(\overline{\sigma_{эkv}}) \frac{2^{\frac{m}{2}}}{2\pi A} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \left(\mu_{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{m}{2}}; \mu_{\frac{2}{m}} = \int_0^\infty \omega^{\frac{2}{m}} S_{\sigma_{эkv}}(\omega) d\omega, \quad (4.20)$$

где $K_{Ge}(\overline{\sigma_{эkv}})$ – коэффициент, учитывающий влияние преднагрузки согласно модели Герберга

$$K_{Ge}(\overline{\sigma_{эkv}}) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\overline{\sigma_{эkv}}}{\sigma_T}\right)^2}, \quad (4.21)$$

здесь $\overline{\sigma_{\text{экв}}}$ – среднее значение эквивалентного напряжения (от воздействия только постоянной нагрузки), в случае стержня $\overline{\sigma_{\text{экв}}} = M[\sigma_{\text{экв}}] = M[\sigma_{\text{max}}] = N_x/F$; σ_T – предел текучести материала, принимаемый как критическое значение.

Аналогичные рассуждения справедливы для всех систем с распределёнными параметрами, вектор состояния которых можно представить в виде суперпозиции собственных форм колебаний. Расчёт усталостной повреждаемости D сводится к определению спектральной плотности эквивалентного напряжения $S_{\sigma_{\text{экв}}}$ и вычислению интенсивности усталостной повреждаемости d .

Для исследования поведения прямоугольной пластины используется модель Тимошенко – Рейсснера. Основные положения взяты из работ [63, 65, 66, 68].

Для однозначного определения положения прямоугольной пластины при изгибе вводятся три параметра: вертикальное перемещение вдоль оси Oz $w(x, y, t)$ и повороты нормали деформированной срединной поверхности «в сторону» осей Ox и Oy – $\vartheta_x(x, y, t)$ и $\vartheta_y(x, y, t)$ соответственно; здесь x и y – координаты в направлении осей Ox и Oy . Разрешающая система ДУ движения прямоугольной пластины относительно переменных w , ϑ_x и ϑ_y

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + T_y \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[k_2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta_x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta_y \right) \right] - \\ - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial w}{\partial t} + q = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[D_c \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \eta \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{D_c (1 - \eta)}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \right] + \\ + k_2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta_x \right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[D_c \left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \eta \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D_c (1 - \eta)}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \right] + \\ + k_2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta_y \right) = 0, \end{array} \right. \quad (4.22)$$

где η – коэффициент Пуассона материала пластины; h – толщина пластины; k_2 – коэффициент учёта неравномерности распределения касательных напряжений по толщине прямоугольной пластины; $D_c = E h^3 / [12(1 - \eta^2)]$ – цилиндрическая жёсткость; T_x и T_y – интенсивности мембранных усилий, $T_x, T_y = \text{const}$; q – внешнее давление.

Далее приводится решение системы (4.22) для растянутой шарнирно опёртой прямоугольной пластины постоянной толщины h со сторонами a и b , представленной на рисунке 4.2.

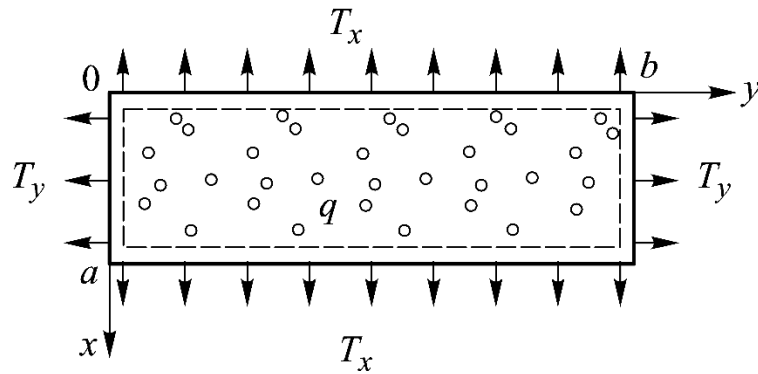


Рисунок 4.2 – Расчётная схема пластины

Рассматривается задача случайных колебаний линейной системы с распределёнными детерминированными параметрами под действием случайной нагрузки. Как и в случае прямого стержня, используется метод разложения движения системы по формам собственных колебаний.

Решение задачи свободных колебаний $q = 0$ без учёта демпфирования $\alpha = 0$ определяется в виде суперпозиции собственных форм колебаний

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} u_{jk}(x, y) \cos(p_{jk} t); \\
 \vartheta_x(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} G_{jk} \theta_{jk}^x(x, y) \cos(p_{jk} t); \\
 \vartheta_y(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V_{jk} \theta_{jk}^y(x, y) \cos(p_{jk} t),
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

для которой ГУ на торцах $w|_{x=0,a} \text{ или } y=0,b = 0$, $M_x|_{x=0,a} = 0$ и $M_y|_{y=0,b} = 0$ выполняются автоматически. $u_{jk}(x, y) = \sin(\varphi_{xj} x) \sin(\varphi_{yk} y)$, $\theta_{jk}^x(x, y) = \cos(\varphi_{xj} x) \sin(\varphi_{yk} y)$ и $\theta_{jk}^y(x, y) = \sin(\varphi_{xj} x) \cos(\varphi_{yk} y)$ – собственные формы колебаний системы, соответствующие СЧ p_{jk} ; $\varphi_{xj} = j\pi / a$, $\varphi_{yk} = k\pi / b$ – вводимые параметры; M_x и M_y – интенсивности изгибающих моментов, соответствующих $\mathcal{G}_x$ и $\mathcal{G}_y$.

Подстановкой (4.23) в (4.22) с учётом свойства ортогональности форм колебаний получается СЛАУ относительно констант F_{jk} , G_{jk} и V_{jk} для каждой собственной формы. Условие существования её ненулевого решения для каждой такой системы приводит к следующему выражению для собственных значений λ_{jk} и СЧ p_{jk}

$$p_{jk} = \sqrt{\lambda_{jk}}; \lambda_{jk} = \frac{k_2 G}{\rho} \cdot \frac{D_c (\varphi_{xk}^2 + \varphi_{yj}^2)^2 + T_x \varphi_{xj}^2 + T_y \varphi_{yk}^2}{D_c (\varphi_{xk}^2 + \varphi_{yj}^2) + k_2 G h}. \quad (4.24)$$

Пусть q – случайное стационарное давление с нулевым математическим ожиданием $M[q] = 0$. Тогда стационарное решение неоднородной системы (4.22), с учётом $n_\phi \times m_\phi$ собственных форм колебаний, имеет вид

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{m_\phi} u_{jk}(x, y) [r_{jk0} + r_{jk}(t)]; \\ \mathcal{G}_x(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{m_\phi} \theta_{jk}^x(x, y) [\chi_{jk0}^x + \chi_{jk}^x(t)]; \\ \mathcal{G}_y(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{m_\phi} \theta_{jk}^y(x, y) [\chi_{jk0}^y + \chi_{jk}^y(t)], \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $[r_{jk0} + r_{jk}(t)]$, $[\chi_{jk0}^x + \chi_{jk}^x(t)]$ и $[\chi_{jk0}^y + \chi_{jk}^y(t)]$ – главные координаты прогиба w и углов поворота ϑ_x , ϑ_y соответственно, с постоянными r_{jk0} , χ_{jk0}^x , χ_{jk0}^y и переменными $r_{jk}(t)$, $\chi_{jk}^x(t)$, $\chi_{jk}^y(t)$ составляющими.

Для анализа прочности конструкции необходимо определить вероятностные характеристики системы. Для случая прямого стержня показано, что определение вероятностных характеристик линейных систем с распределёнными параметрами сводится к определению собственных форм колебаний и частотных функций.

Собственные формы колебаний были определены выше. Рассуждения, аналогичные представленным для поперечных колебаний шарнирно опёртой балки, в случае прямоугольной пластины, нагруженной внешней нагрузкой $q(x, y, t) = q_1(x, y)q_0(t)$ со случайной $q_0(t)$ и детерминированной $q_1(x, y)$ компонентами, приводят к следующим частотным функциям r_{jk} , χ_{jk}^x и χ_{jk}^y

$$\begin{aligned} H_{r_{jk}}(i\omega) &= \tilde{a}_{0jk} H_{0jk}(i\omega); \quad H_{\chi_{jk}^x}(i\omega) = \tilde{b}_{0jk} H_{0jk}(i\omega); \\ H_{\chi_{jk}^y}(i\omega) &= \tilde{c}_{0jk} H_{0jk}(i\omega); \quad H_{0jk}(i\omega) = \frac{\tilde{d}_{0jk}}{p_{jk}^2 - \omega^2 + 2i\zeta_{jk}p_{jk}\omega}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $H_{r_{jk}}$, $H_{\chi_{jk}^x}$ и $H_{\chi_{jk}^y}$ – частотные функции r_{jk} , χ_{jk}^x и χ_{jk}^y соответственно; $\tilde{a}_{0jk}$, $\tilde{b}_{0jk}$, $\tilde{c}_{0jk}$, $\tilde{d}_{0jk}$ и ζ_{jk} – параметры, вводимые для обозначений и определяющиеся следующими выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{0jk} &= \frac{1}{\rho h}; \quad \tilde{b}_{0jk} = \frac{k_2 G \varphi_{xj}}{\rho [D_c (\varphi_{xj}^2 + \varphi_{yk}^2) + k_2 G h]}; \\ \tilde{c}_{0jk} &= \frac{k_2 G \varphi_{yk}}{\rho [D_c (\varphi_{xj}^2 + \varphi_{yk}^2) + k_2 G h]}; \\ \tilde{d}_{0jk} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q_1(x, y) u_{jk}(x, y) dx dy; \quad \zeta_{jk} = \frac{\alpha}{2\rho h p_{jk}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Использование более простой модели Кирхгофа, не учитывающей сдвиги, для описания поведения изгиба шарнирно опёртой прямоугольной пластины приводит к следующей формуле для расчёта СЧ p_{jk}

$$p_{jk} = \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left[D_c (\varphi_{xj}^2 + \varphi_{yk}^2)^2 + T_x \varphi_{xj}^2 + T_y \varphi_{yk}^2 \right]}. \quad (4.28)$$

Выражение для частотной функции $H_{r_{jk}}$ в этом случае совпадает с (4.26), если вместо выражения для СЧ p_{jk} в него подставить соотношение (4.28).

Определяются вероятностные характеристики максимальных нормальных напряжений $\sigma_{x \max}$ вдоль оси Ox . С учётом (4.25) центрированная величина $\sigma_{x \max}$

$$\begin{aligned} \overset{o}{\sigma}_{x \max}(x, y, t) &= \frac{Eh}{2(1-\eta^2)} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \eta \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right) + \frac{T_x}{h} = \\ &= \frac{Eh}{2(1-\eta^2)} \sum_j^{n_\phi} \sum_k^{m_\phi} \left[\frac{\partial \theta_{jk}^x(x, y)}{\partial x} \chi_{jk}^x(t) + \eta \frac{\partial \theta_{jk}^y(x, y)}{\partial y} \chi_{jk}^y(t) \right] + \frac{T_x}{h}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Тогда автокорреляционная функция $\sigma_{x \max}$ имеет вид

$$\begin{aligned} K_{\sigma_{x \max}}(x, y, t_1, t_2) &= M \left[\overset{o}{\sigma}_{x \max}(x, y, t_1) \overset{o}{\sigma}_{x \max}(x, y, t_2) \right] = \left[\frac{Eh}{2(1-\eta^2)} \right]^2 \times \\ &\times M \left(\sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{m_\phi} \sum_{s=1}^{n_\phi} \sum_{g=1}^{m_\phi} \left[a_{jksq}(x, y) \chi_{jk}^x(t_1) \chi_{sg}^x(t_2) + b_{jksq}(x, y) \chi_{jk}^x(t_1) \chi_{sg}^y(t_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{jksq}(x, y) \chi_{jk}^y(t_1) \chi_{sg}^x(t_2) + d_{jksq}(x, y) \chi_{jk}^y(t_1) \chi_{sg}^y(t_2) \right] \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где a_{jksq} , b_{jksq} , c_{jksq} и d_{jksq} – параметры, вводимые для обозначений

$$\begin{aligned}
a_{jksq}(x, y) &= \frac{\partial \theta_{jk}^x(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \theta_{sq}^x(x, y)}{\partial x}; \\
b_{jksq}(x, y) &= \eta \frac{\partial \theta_{jk}^x(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \theta_{sq}^y(x, y)}{\partial y}; \\
c_{jksq}(x, y) &= \eta \frac{\partial \theta_{jk}^y(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \theta_{sq}^x(x, y)}{\partial x}; \\
d_{jksq}(x, y) &= \eta^2 \frac{\partial \theta_{jk}^y(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \theta_{sq}^y(x, y)}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Оператор математического ожидания вносится под сумму в выражении (4.30)

$$\begin{aligned}
K_{\sigma_{x \max}}(x, y, t_1, t_2) &= \left[\frac{Eh}{2(1-\eta^2)} \right]^2 \times \\
&\times \sum_{j=1}^{n_\phi} \sum_{k=1}^{m_\phi} \sum_{s=1}^{n_\phi} \sum_{g=1}^{m_\phi} \left[a_{jksq} K_{\chi_{jk}^x \chi_{sq}^x}(t_1, t_2) + b_{jksq} K_{\chi_{jk}^x \chi_{sq}^y}(t_1, t_2) + \right. \\
&\left. + c_{jksq} K_{\chi_{jk}^y \chi_{sq}^x}(t_1, t_2) + d_{jksq} K_{\chi_{jk}^y \chi_{sq}^y}(t_1, t_2) \right].
\end{aligned} \tag{4.32}$$

При стационарной внешней нагрузке $q_1(t)$ случайные функции w , $\mathcal{Y}_x$, $\mathcal{Y}_y$ и, следовательно, $\sigma_{x \max}$ также будут стационарными. Тогда корреляционные функции $K_{\chi_{jk}^x \chi_{sq}^x}$, $K_{\chi_{jk}^x \chi_{sq}^y}$, $K_{\chi_{jk}^y \chi_{sq}^x}$ и $K_{\chi_{jk}^y \chi_{sq}^y}$ будут зависеть только от разности значений времени $t_2 - t_1 = \tau$ и могут быть определены по теореме Винера – Хинчина с использованием обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned}
K_{\chi_{jk}^x \chi_{sq}^x}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\chi_{jk}^x \chi_{sq}^x}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; K_{\chi_{jk}^x \chi_{sq}^y}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\chi_{jk}^x \chi_{sq}^y}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \\
K_{\chi_{jk}^y \chi_{sq}^x}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\chi_{jk}^y \chi_{sq}^x}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; K_{\chi_{jk}^y \chi_{sq}^y}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\chi_{jk}^y \chi_{sq}^y}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

здесь $S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^x}$, $S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^y}$, $S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^x}$ и $S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^y}$ – спектральные плотности, равные

$$\begin{aligned} S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^x}(\omega) &= H_{\chi_{jk}^x}(\omega) H_{\chi_{sg}^x}^*(\omega) S_q(\omega); S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^y}(\omega) = H_{\chi_{jk}^x}(\omega) H_{\chi_{sg}^y}^*(\omega) S_q(\omega); \\ S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^x}(\omega) &= H_{\chi_{jk}^y}(\omega) H_{\chi_{sg}^x}^*(\omega) S_q(\omega); S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^y}(\omega) = H_{\chi_{jk}^y}(\omega) H_{\chi_{sg}^y}^*(\omega) S_q(\omega). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для анализа усталости пластины применяются выражения, использованные при анализе балки (4.20): для вычисления d требуется спектральная плотность эквивалентного напряжения $S_{\sigma_{\text{экв}}}$. Однако проблема определения $S_{\sigma_{\text{экв}}}$ в случае прямоугольной пластины является более сложной, чем в случае балки [121].

При использовании теории прочности Хубера – Мизеса необходимо учитывать, имеют ли максимальные нормальные напряжения $\sigma_{x \max}$ и $\sigma_{y \max}$ один и тот же знак или нет, поскольку случай, когда произведение данных величин положительное, не является консервативным. Для конструкций сложной формы рекомендуется «в запас прочности» принимать допущение, что данные величины имеют разные знаки, и их произведение отрицательно.

Однако при расчёте спектральной плотности $S_{\sigma_{\text{экв}}}$ в случае шарнирно опёртой прямоугольной пластины с нагрузкой, равномерно распределённой по площади, принимается выражение

$$\begin{aligned} S_{\sigma_{\text{экв}}}(x, y, \omega) &\approx S_{\sigma_{x \max}}(x, y, \omega) + S_{\sigma_{y \max}}(x, y, \omega) - \\ &- \sqrt{S_{\sigma_{x \max}}(x, y, \omega) S_{\sigma_{y \max}}(x, y, \omega)} + 3 S_{\tau_{xy \max}}(x, y, \omega), \end{aligned} \quad (4.35)$$

где $S_{\sigma_{x \max}}$, $S_{\sigma_{y \max}}$ и $S_{\tau_{xy \max}}$ – соответственно спектральные плотности максимальных напряжений (в верхних или нижних волокнах пластины) $\sigma_{x \max}$, $\sigma_{y \max}$ и $\tau_{xy \max}$.

4.2 Численный алгоритм решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем

Приводится описание численного алгоритма решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем. Представленный алгоритм предназначен для выполнения в комплексе MSC Nastran. Приведены особенности расчёта для прямого стержня и прямоугольной пластины, на которые воздействует случайная поперечная нагрузка совместно с детерминированным растягивающим постоянным усилием.

Численный алгоритм предназначен для решения задачи о малых случайных стационарных колебаниях деформируемых систем, предварительно нагруженных детерминированными постоянными усилиями, под действием случайных стационарных внешних нагрузок с помощью MSC Nastran. Применяется анализ MSC Nastran Random Response, использующий технику разложения движения системы по формам собственных колебаний (решатель SEMFREQ – SOL 111). Также используется инструмент MSC Nastran Restart. Основные положения численного алгоритма взяты из работы [75].

Этапы численного алгоритма решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем:

I. Провести модальный анализ преднагруженной конструкции:

а) подготовить входной файл нелинейного статического анализа MSC Nastran SOL 106 с детерминированной постоянной нагрузкой;

б) для создания «*.MASTER» файла, используемого при выполнении Restart, в секции Executive Control входного файла удалить в строке «INIT MASTER(S)» символы «(S)»;

в) в секции Bulk Data добавить набор параметров для решения задачи на собственные значения с помощью команды «EIGL» или «EIGRL»;

г) в секции Case Control добавить «METHOD = N», где вместо N подставлен идентификатор (ID) набора параметров, определённого в предыдущем пункте;

д) в секции Bulk Data объявить параметр NMLOOP со значением, равным номеру шага по нагрузке в нелинейном анализе, после которого будет проведён модальный анализ; если это значение больше числа инкрементов в нелинейном анализе (секция Bulk Data, команда NLPARM, поле NINC) или равно ему, то СЧ и собственные формы будут вычислены после последнего шага по нагрузке; е) запустить расчёт.

II. Провести анализ случайных колебаний преднагруженной конструкции:

а) подготовить входной файл для анализа случайных колебаний с разложением движения системы по формам собственных колебаний MSC Nastran SOL 111; при этом Load Set со случайной нагрузкой должен иметь ID, отличный от ID Load Set с детерминированной нагрузкой, действующей при модальном анализе преднагруженной конструкции;

б) в начало секции Executive Control добавить строки «RESTART VERSION=LAST KEEP» и «ASSIGN MASTER=modal.MASTER», где «modal.MASTER» соответствует файлу для выполнения Restart, созданному автоматически MSC Nastran во время модального анализа преднагруженной конструкции (см. п. I алгоритма);

в) удалить часть входного файла, которая соответствует описанию КЭМ: узлы, КЭ, материалы, используемые свойства КЭ, ГУ и др.; нагрузки, прикладываемые при анализе случайных колебаний, удалять не нужно;

г) запустить расчёт.

III. Провести расчёт усталостной повреждаемости.

Таким образом, при анализе случайных процессов заданная преднагрузка считается детерминированной и постоянной, а для расчёта используются матрицы масс и касательных жёсткостей в преднагруженном положении системы, определяемые в нелинейном статическом анализе (п. I алгоритма).

Для проведения MSC Nastran Random Response (п. II алгоритма) требуется описать во входном файле анализа дискретные значения циклических частот f_j , для которых будут вычислены спектральные плотности откликов системы. Среднеквадратические значения откликов определяются как квадратный корень

дисперсии, которая, в свою очередь, вычисляется с помощью численного интегрирования спектральной плотности. При этом границы интегрирования определяются диапазоном частот, от выбора и дискретизации которого зависит точность результат расчёта.

Важно покрыть всю рассматриваемую область частот, так как подробное описание только резонансных областей зачастую оказывается недостаточным. Если в области после резонанса графики спектральных плотностей достаточно быстро затухают, то в области до резонанса (особенно перед первым резонансом) при силовом возмущении отклик системы может быть значительным. Этот эффект показан далее в п. 4.3 данной главы.

Дискретизацию частот в MSC Nastran удобно проводить с использованием команд `FREQ1`, `FREQ2`, ..., `FREQ5` секции `Bulk Data`, которые позволяют равномерно дискретизировать частоты во всём диапазоне и сгущать их в окрестностях СЧ. Такой подход позволяет получить удовлетворительную точность расчёта при сравнительно небольшом наборе частот, что важно для моделей большой размерности.

В качестве результатов анализ MSC Nastran Random Response возвращает дискретную одностороннюю спектральную плотность отклика $S_j = S(f_j)$, соответствующую заданным значениям частоты f_j и связанную с двусторонним спектром $W(f_j)$ соотношением (1.20) с учётом $\omega_j = 2\pi f_j$.

Вычисление усталостной повреждаемости (п. III алгоритма) реализовано на языке программирования Python. Для расчёта данной величины необходима спектральная плотность $S(\omega)$ с радиальной частотой ω в качестве аргумента, связанная с $S(f)$ следующим образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) 2\pi df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \Rightarrow S(f) = 2\pi S(\omega). \quad (4.36)$$

Для численного решения задачи случайных поперечных колебаний растянутого стержня применяется двухузловой балочный КЭ (Beam), основанный на теории балки Тимошенко и учитывающий инерцию поворота сечения ввиду наличия ненулевых компонент в матрице масс у поворотных степеней свободы.

При численном решении задачи случайных поперечных колебаний растянутой прямоугольной пластины используется четырёхузловой билинейный плоский КЭ оболочки (Shell), основанный на теории Миндлина – Рейсснера, которая учитывает дополнительные сдвиги подобно теории Тимошенко – Рейсснера. Ввиду наличия компонент матрицы масс, соответствующих поворотным степеням свободы, КЭ оболочки учитывает инерцию поворотов сечений.

В расчётном ядре MSC Nastran можно использовать согласованную и несогласованную матрицы масс КЭ. Согласованная (англ. coupled или consistent) матрица масс представляет собой дискретную аппроксимацию непрерывного распределения массы по объёму КЭ. Несогласованная (англ. lumped) матрица масс заменяет непрерывное распределение массы по КЭ на сосредоточенные массы в его узлах. Такая матрица масс является диагональной, что делает её более эффективной в плане вычислений на электронно-вычислительной машине (ЭВМ).

Хотя согласованная матрица масс является более «естественной» в плане построения, нельзя однозначно утверждать, что она приводит к более точным результатам, чем несогласованная матрица. Наиболее точное описание отклика динамических систем дает линейная комбинация двух матриц [72]. На результаты анализа случайных колебаний системы влияет не только жёсткость системы, но и её инерционность. Поскольку важно понимать, насколько могут отличаться результаты, полученные с использованием различных матриц масс, то помимо сравнения аналитических решений с численными выполняется также сравнение численных решений для различных матриц масс между собой.

4.3 Валидация численного алгоритма решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем

Проводится сравнение аналитических и конечно-элементных решений задачи о свободных и вынужденных случайных стационарных поперечных колебаниях двух предварительно растянутых шарнирно опёртых конструкций: прямого стержня и прямоугольной пластины. Длительность процесса принимается $T = 3$ ч как время воздействия случайной жёсткой вибрации на оборудование самолёта с неподвижным крылом согласно КТ-160G/14G, разделу 8 «Вибрация».

Шарнирно опёртый стержень постоянного поперечного сечения нагружен постоянной детерминированной растягивающей силой N_x и случайной поперечной равномерно распределённой по длине стержня нагрузкой q с нулевым математическим ожиданием (см. рисунок 4.1).

Исходные данные: длина стержня $l = 1$ м; ширина $b = 3$ мм и высота $h = 4$ мм поперечного сечения; момент инерции поперечного сечения в плоскости изгиба $I_y = bh^3 / 12 = 16$ мм⁴; модуль упругости $E = 68.65$ ГПа, предел текучести $\sigma_T = 300$ МПа, коэффициент Пуассона $\eta = 0.3$ и плотность $\rho = 2700$ кг/м³ материала стержня; константа и степень кривой усталости $A = 10^{14}$ МПа ^{m} и $m = 4$; спектральная плотность внешней нагрузки $S_q = 9.617 \cdot 10^{-2}$ Н²/(м²·Гц) в диапазоне частот $f = [2, 100]$ Гц; демпфирование $\zeta = 0.04$ в долях от критического. Исходные данные приняты аналогично работе [75].

В аналитическом решении для каждой формы собственных колебаний стержня используется следующее значение коэффициента демпфирования α

$$\alpha = 2 \rho A \zeta p_j. \quad (4.37)$$

В случае стержня прямоугольного поперечного сечения значение коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений по сечению принимается равным $k_1 = 5/6$.

Для конечно-элементного решения по длине стержня располагаются 10 КЭ (Beam) равной длины.

Пять низших СЧ системы, соответствующих колебаниям в плоскости приложения поперечной нагрузки, при разной растягивающей силе N_x представлены в таблицах 4.1 – 4.2. Результаты аналитического решения получены для моделей балки Тимошенко и Эйлера – Бернулли. Для модели Тимошенко СЧ соответствуют колебаниям прогиба w и угла поворота ϑ «в фазе» p_j^- . Результаты конечно-элементного решения получены при использовании несогласованной и согласованной матриц масс.

Таблица 4.1 – СЧ нерастянутого стержня, $N_x = 0$

Методы		p_1 , Гц	p_2 , Гц	p_3 , Гц	p_4 , Гц	p_5 , Гц
Аналитич. решения	Тимошенко	9.145677	36.57973	82.29325	146.2714	228.4934
	Эйлер	9.145925	36.58370	82.31332	146.3348	228.6481
MSC Nastran, матрицы масс	несоглас.	9.145616	36.57535	82.23711	145.9047	226.8157
	соглас.	9.145744	36.58382	82.33882	146.5216	229.4222

Таблица 4.2 – СЧ растянутого стержня, $N_x = 5$ Н

Методы		p_1 , Гц	p_2 , Гц	p_3 , Гц	p_4 , Гц	p_5 , Гц
Аналитич. решения	Тимошенко	11.05539	38.63113	84.37554	148.3646	230.5915
	Эйлер	11.05569	38.63532	84.39612	148.4290	230.7476
MSC Nastran, матрицы масс	несоглас.	11.05543	38.62736	84.32092	147.9992	228.9072
	соглас.	11.05559	38.63630	84.42514	148.6251	231.5407

Согласно данным из таблиц 4.1 и 4.2, все аналитически вычисленные СЧ (за исключением первой, полученной по модели балки Эйлера – Бернулли) лежат

между частотами, вычисленными MSC Nastran с использованием несогласованной и согласованной матриц масс. При этом значения СЧ, полученные с использованием несогласованной матрицы масс, во всех рассмотренных случаях получились меньше, чем с помощью согласованной.

Среднеквадратические отклонения прогиба стержня σ_w и максимального растягивающего напряжения $\sigma_{\sigma_{max}}$ в центральной точке $x = l/2$ при различной растягивающей силе с учётом пяти низших СЧ, соответствующих колебанию системы в плоскости приложения распределённой поперечной нагрузки, приведены в таблицах 4.3 – 4.4.

Таблица 4.3 – Среднеквадратическое отклонение прогиба в центре стержня

Методы		$\sigma_w(l/2) \cdot 10^2, \text{ м; } N_x = 0$	$\sigma_w(l/2) \cdot 10^2, \text{ м; } N_x = 5 \text{ Н}$
Аналитич. решения	Тимошенко	4.917557	3.704179
	Эйлер	4.917389	3.704053
MSC Nastran, матрицы масс	несоглас.	4.879987	3.675880
	соглас.	4.880021	3.675904

Таблица 4.4 – Среднеквадратическое отклонение максимального напряжения в центре стержня

Методы		$\sigma_{\sigma_{max}}(l/2), \text{ МПа; } N_x = 0$	$\sigma_{\sigma_{max}}(l/2), \text{ МПа; } N_x = 5 \text{ Н}$
Аналитич. решения	Тимошенко	67.042358	50.682464
	Эйлер	67.042843	50.682825
MSC Nastran, матрицы масс	несоглас.	67.079616	50.712208
	соглас.	67.067172	50.697324

Графики спектральной плотности максимального нормального напряжения в центре балки представлены на рисунке 4.3. Аналитические и численные (конечно-элементные) решения MSC Nastran оказались достаточно близки, поэтому на графике показано только одно аналитическое решение и одно

конечно-элементное. Значения усталостной повреждаемости в центральной точке стержня приведены в таблице 4.5.

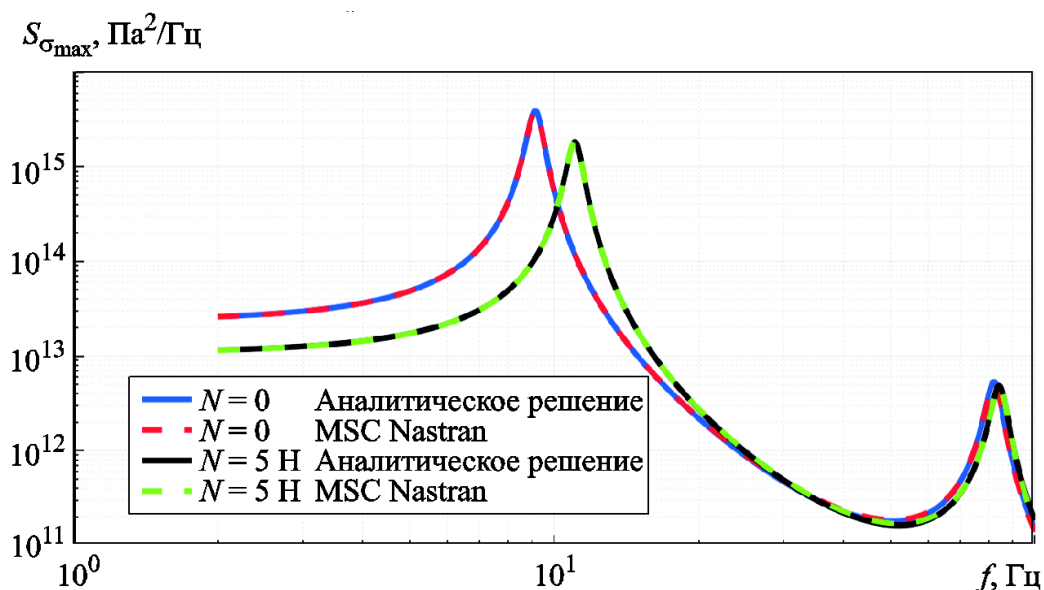


Рисунок 4.3 – Спектральная плотность $S_{\sigma_{max}}(x, f)$ максимального нормального напряжения в центре балки $x = l/2$

Таблица 4.5 – Усталостная повреждаемость центральной точке стержня

Методы		$D(l/2), N_x = 0$	$D(l/2), N_x = 5 \text{ Н}$
Аналитич. решения	Тимошенко	0.164114	0.0659922
	Эйлер	0.164125	0.0659966
MSC Nastran, Матрицы масс	несоглас.	0.164490	0.0661572
	соглас.	0.164266	0.0660194

Относительные отклонения результатов, полученных с использованием разных аналитических моделей и конечно-элементных подходов, представлены в таблице 4.6. Приведены средние значения отклонений результатов для преднагруженной и не преднагруженной конструкции, т. к. в обоих расчётных случаях результаты оказались достаточно близки. Относительное отклонение двух произвольных величин c_1 и c_2 вычисляется по формуле $(c_1 - c_2)/c_1 \cdot 100 \%$.

Таблица 4.6 – Средние относительные отклонения результатов анализа балки

Среднее относительное отклонение, %	СЧ	$\sigma_w(l/2)$	$\sigma_{\sigma_{max}}(l/2)$	$D(l/2)$
Тимошенко и Эйлер	–0.03	< 0.01	> –0.01	–0.01
соглас. и несоглас.	0.34	< 0.01	–0.02	–0.17
Тимошенко и несоглас.	0.21	0.76	–0.06	–0.24
Тимошенко и соглас.	–0.13	0.76	–0.03	–0.07

При анализе случайных стационарных колебаний балки с помощью МКЭ удалось получить оценку «сверху»: аналитическое решение в центре балки оказалось более податливым, чем конечно-элементное.

Численный алгоритм решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем в MSC Nastran, описанный в п. 4.2, применён для анализа колебаний балки. Выполнено сравнение численных решений данной задачи с аналитическими решениями, полученными для двух моделей: учитывающей сдвиги и пренебрегающей ими. Конечно-элементные решения получены в MSC Nastran с использованием согласованной и несогласованной матриц масс. Для анализа усталости использовано модифицированное соотношение интенсивности усталостной повреждаемости по одномоментному методу (3.5).

В задаче о собственных колебаниях сравниваемыми величинами выбраны СЧ колебаний, а в задаче о случайных колебаниях – прогиб, напряжение и усталостная повреждаемость в центральной точке стержня. Следует отметить, что напряжения от растяжения в рассмотренном примере гораздо меньше изгибных, и возрастание СЧ, соответствующее повышению жёсткости стержня, сказывается сильнее, чем добавление напряжений от растяжения. Поэтому усталостная повреждаемость предрастянутого стержня оказалась ниже, чем у стержня без такой преднагрузки.

При численном рассмотрении случайных стационарных поперечных колебаний по сравнению с выбранными аналитическими моделями в случае балки удалось получить консервативную оценку с относительным отклонением величин не более 1 %. Консервативность конечно-элементного решения поставленной

задачи и стабильность его точности при различных параметрах конструкции являются предметами дополнительного исследования, и в данной работе не изучались. Для подробной оценки можно использовать некоторую суммарную характеристику: для модального анализа – работу сил инерции на собственных формах колебаний, для анализа случайных процессов – среднеквадратическое отклонение работы внешних сил на возникающих перемещениях.

Важно подчеркнуть, что полученные для стержня результаты обладают достаточно высокой точностью: относительное отклонение сравниваемых величин в рассмотренном примере не превысило 1 %.

Шарнирно закреплённая прямоугольная пластина постоянной толщины нагружена постоянными детерминированными растягивающими усилиями с интенсивностями T_x и T_y , а также случайным равномерно распределённым давлением q с нулевым математическим ожиданием (см. рисунок 4.2).

Исходные данные: длина $a = 0,5$ м, ширина $b = 1$ м и толщина $h = 0.004$ м пластины; модуль упругости $E = 68.65$ ГПа, предел текучести $\sigma_T = 300$ МПа, коэффициент Пуассона $\eta = 0.3$ и плотность $\rho = 2700$ кг/м³ материала пластины; константа и степень кривой усталости $A = 10^{14}$ МПа ^{m} и $m = 4$ соответственно; спектральная плотность внешней нагрузки $S_q = 1$ Па²/Гц в диапазоне частот $f = [1, 100]$ Гц; демпфирование $\zeta = 0.04$ в долях от критического. Следует отметить, что значения свойств материала и усталостных характеристик совпадают с соответствующими значениями для прямого стержня.

В аналитическом решении для каждой формы собственных колебаний пластины используется следующее значение коэффициента демпфирования α

$$\alpha = 2 \rho h \zeta p_{jk}. \quad (4.38)$$

Во всех расчётах принимается значение коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений по толщине $k_2 = 5/6$.

Для конечно-элементного решения используется по 20 элементов вдоль каждой стороны пластины (всего 400 КЭ).

Шесть низших СЧ системы при разных растягивающих усилиях T_x и T_y представлены в таблицах 4.7 и 4.8. Результаты аналитического решения получены для моделей Тимошенко – Рейсснера и Кирхгофа, численного решения – с применением согласованной и несогласованной матриц масс.

Таблица 4.7 – СЧ нерастянутой пластины, $T_x = T_y = 0$

Методы / матрицы масс	$p_{1,1}$, Гц	$p_{1,2}$, Гц	$p_{1,3}$, Гц	$p_{2,1}$, Гц	$p_{1,4}$, Гц	$p_{2,2}$, Гц
Аналитические решения						
Тимошенко	47.93227	76.68644	124.6014	162.9256	191.6642	191.6642
Кирхгоф	47.93767	76.70028	124.6379	162.9881	191.7509	191.7509
MSC Nastran						
несоглас.	47.76995	76.01557	123.0836	162.3227	189.0090	189.2332
соглас.	47.96680	76.80109	125.6403	164.0000	195.7307	192.3717

Таблица 4.8 – СЧ растянутой пластины, $T_x = 3000$ Н/м, $T_y = 0$

Методы / матрицы масс	$p_{1,1}$, Гц	$p_{1,2}$, Гц	$p_{1,3}$, Гц	$p_{2,1}$, Гц	$p_{1,4}$, Гц	$p_{2,2}$, Гц
Аналитические решения						
Тимошенко	50.74660	78.47603	125.7105	166.2979	192.3869	194.5387
Кирхгоф	50.75232	78.49019	125.7473	166.3617	192.4736	194.6264
MSC Nastran						
несоглас.	50.57103	77.77367	124.1436	165.6603	189.6713	192.0512
соглас.	50.77943	78.57737	126.7224	167.3721	196.4165	195.2364

Среднеквадратические отклонения прогиба пластины и максимального напряжения в центре $x = a/2$, $y = b/2$ при разных мембранных усилиях, с учётом шести низших СЧ, приведены в таблицах 4.9 – 4.10.

Таблица 4.9 – Среднеквадратическое отклонение прогиба в центре пластины

Методы		$\sigma_w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cdot 10^5, \text{ м};$ $T_x = T_y = 0$	$\sigma_w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cdot 10^5, \text{ м};$ $T_x = 3000 \text{ Н/м}, T_y = 0$
Аналитич. решения	Тимошенко	5.066733	4.649245
	Кирхгоф	5.065869	4.648449
MSC Nastran, матрицы масс	несоглас.	5.081930	4.654910
	соглас.	5.091870	4.663970

Таблица 4.10 – Среднеквадратическое отклонение максимальных нормальных напряжений в направлении оси Ox в центре пластины

Методы		$\sigma_{\sigma_{x \max}}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \text{ МПа};$ $T_x = T_y = 0$	$\sigma_{\sigma_{x \max}}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \text{ МПа};$ $T_x = 3000 \text{ Н/м}, T_y = 0$
Аналитич. решения	Тимошенко	0.324396	0.297652
	Кирхгоф	0.324413	0.297668
MSC Nastran, матрицы масс	несоглас.	0.323196	0.296114
	соглас.	0.323806	0.296666

Графики спектральной плотности максимального нормального напряжения в направлении оси Ox в центральной точке пластины представлены на рисунке 4.4. Полученные аналитические и численные решения оказались достаточно близки (как и в случае балки, см. рисунок 4.3), поэтому на графике показано только одно аналитическое решение и одно численное.

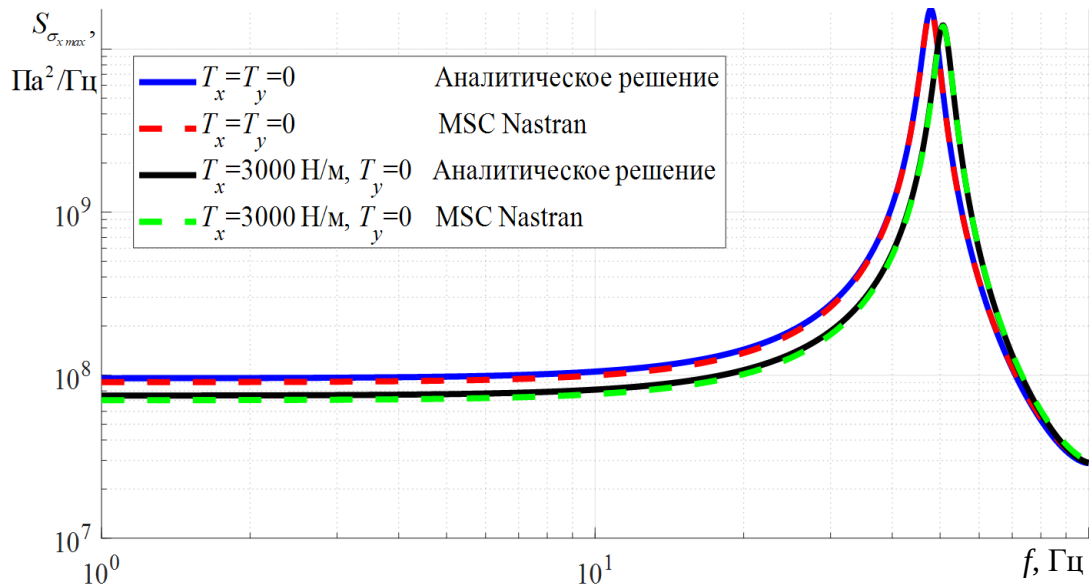


Рисунок 4.4 – Спектральная плотность $S_{\sigma_{x \max}}(x, y, f)$ максимального нормального напряжения в направлении оси Ox в центре пластины $x = a/2$, $y = b/2$

Значения усталостной повреждаемости в центре пластины приведены в таблице 4.11. Следует отметить, что MSC Nastran по умолчанию определяет значения спектральной плотности напряжений в центре КЭ (Shell), поэтому ввиду чётного числа элементов (20) в направлении каждой из осей данные на рисунке 4.4 и в таблице 4.11 соответствуют точке пластины с координатами $0.95(a/2, b/2)$ для всех сравниваемых решений.

Таблица 4.11 – Усталостная повреждаемость в центре пластины

Методы		$D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cdot 10^{10},$ $T_x = T_y = 0$	$D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cdot 10^{10},$ $T_x = 3000 \text{ Н/м}, T_y = 0$
Аналитич. решения	Тимошенко	2.453919	1.842228
	Кирхгоф	2.454701	1.842811
MSC Nastran, матрицы масс	несоглас.	2.418940	1.807517
	соглас.	2.446076	1.827596

Средние относительные отклонения результатов, полученных с использованием различных аналитических моделей и конечно-элементных подходов приведены в таблице 4.12. Аналогично рассмотренным колебаниям балки (см. таблица 4.6), в таблице 4.12 указаны средние результаты для преднагруженной и не преднагруженной пластины. Относительное отклонение двух произвольных величин c_1 и c_2 вычисляется по формуле $(c_1 - c_2)/c_1 \cdot 100 \%$.

Таблица 4.12 – Средние относительные отклонения результатов анализа пластины

Среднее относительное отклонение, %	СЧ	$\sigma_w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$	$\sigma_{\sigma_{x \max}}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$	$D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
Тимошенко и Кирхгоф	–0.03	0.02	> -0.01	–0.03
соглас. и несоглас.	1.59	0.19	0.19	1.10
Тимошенко и несоглас.	0.92	–0.21	0.44	1.65
Тимошенко и соглас.	–0.69	–0.41	0.26	0.56

При анализе пластины с помощью МКЭ получилась оценка «снизу»: аналитическое решение в центре пластины оказалось менее податливым по сравнению с численным. Аналитическое решение получено с учётом сдвигов и без их учёта, численное решение – в комплексе MSC Nastran с использованием согласованной и несогласованной матриц масс. Анализ усталости пластины проводится с применением модифицированного соотношения интенсивности усталостной повреждаемости по одномоментному методу.

В задаче о собственных колебаниях сравниваемыми величинами выбраны СЧ колебаний, а в задаче о случайных колебаниях – прогиб, напряжение и усталостная повреждаемость в центральной точке конструкции.

Как и в случае колебаний прямого стержня усталостная повреждаемость предварительно растянутой пластины получилась ниже, чем у конструкции без такой преднагрузки. Напряжения от растяжения при выбранных условиях задачи оказались значительно меньше изгибных. Поэтому возрастание СЧ,

обусловленное повышением жёсткости пластины, повлияло сильнее, чем добавление напряжений от растяжения.

При расчёте среднеквадратических отклонений напряжений с помощью МКЭ значения в узлах КЭ вычисляются с помощью билинейной интерполяции значений в гауссовых точках, а при расчёте усталостной повреждаемости используются спектральные плотности напряжений в центрах КЭ.

При сравнении численного и аналитического решений задачи случайных колебаний для стержня получилась консервативная оценка с относительным отклонением сравниваемых величин не более 1 %. В случае пластины оценка оказалась неконсервативной, однако результат также достаточно точный, с относительным отклонением не более 2 %.

Таким образом, результаты проведённых численных экспериментов демонстрируют высокую точность использованного алгоритма: относительное отклонение сравниваемых величин не превысило 2 %. Это свидетельствует о том, что численный алгоритм является эффективным для решения инженерных задач анализа прочности и усталости конструкций.

4.4 Алгоритм численной реализации метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта

Приведённый в п. 4.2 численный алгоритм решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем в MSC Nastran показал высокую точность при сравнении с аналитическими решениями, выполненном в п. 4.3. Данный алгоритм наряду с упомянутым в начале главы анализом MSC Nastran Direct Transient Response (решатель SEDTRAN – SOL 109), позволяющим определять отклик конструкции на переменную нагрузку во временной области, предлагается использовать для анализа ВЧ усталости элементов конструкции самолёта.

Алгоритм численной реализации метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта (см. п. 3.2) заключается в выполнении следующих шагов:

1) Подготовка КЭМ анализируемой конструкции в программе конечно-элементного моделирования Simcenter Femap;

2) Расчёт НЧ усталостной повреждаемости $D_{НЧ}$. Если известна реализация НЧ составляющей внешней нагрузки во временной области, то анализ НЧ усталости выполняется с использованием анализа MSC Nastran Direct Transient Response (решатель SEDTRAN – SOL 109) и классического метода расчёта усталостной повреждаемости (поиск экстремумов, схематизация МПЦ, суммирование по ГЛС и учёт асимметрии циклов); если реализация неизвестна, то расчёт НЧ усталостной повреждаемости $D_{НЧ}$ выполняется в частотной области с использованием численного алгоритма анализа из п. 4.2, с учётом выражения НЧ интенсивности усталостной повреждаемости (3.15) и длительности процесса T ;

3) Расчёт ВЧ усталостной повреждаемости $D_{ВЧ}$. Выполняется в частотной области с использованием численного алгоритма анализа из п. 4.2, с учётом выражения ВЧ интенсивности усталостной повреждаемости (3.15) и длительности процесса T .

Важно отметить, что при решении задач прочности с помощью МКЭ определяются перемещения в узлах КЭ, из которых состоит анализируемая КЭМ, посредством определения неизвестных переменных в СЛАУ. Для расчёта усталостной повреждаемости используются напряжения и деформации, которые вычисляются после основного этапа решения задачи, т. е. являются результатом постпроцессинга.

Численная реализация метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта так же, как и расчёт напряжений и деформаций, является постпроцессингом и возможна путём создания макросов в программах конечно-элементного моделирования (например, в Simcenter Femap) или программ на ЭВМ. Для данного исследования вычисление усталостной повреждаемости было реализовано на языке программирования Python.

Расчёт спектральной плотности эквивалентного напряжения, выполняемый по теории прочности Хубера – Мизеса, проводится «в запас прочности». Например, для плоских КЭ оболочки (Shell) используется выражение, аналогичное соотношению (4.35), но с учётом разных знаков напряжений $\sigma_{x\ max}$ и $\sigma_{y\ max}$

$$S_{\sigma_{\text{экс}}} \approx S_{\sigma_{x\ max}} + S_{\sigma_{y\ max}} + \sqrt{S_{\sigma_{x\ max}} S_{\sigma_{y\ max}}} + 3 S_{\tau_{xy\ max}}. \quad (4.39)$$

При оценке картины распределения усталостной повреждаемости после применения метода рекомендуется использовать поэлементное отображение значений, поскольку ввиду возведения напряжений (или деформаций) в степень m , интерполяция значений, часто используемая инженерами при визуальной оценке картины распределения напряжений (или деформаций), может быть неточна.

4.5 Анализ усталости конструкции ресивера гидравлической системы среднемагистрального самолёта

Разработанный метод применяется для численного анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность ресивера ГС среднемагистрального пассажирского самолёта. Ресивер предназначен для поддержания рабочего давления в баке ГС, поэтому ёмкость ресивера заполняется воздухом с высоким избыточным давлением. Отмечается, что расчётную схему фрагмента оболочки бака, растянутого внутренним давлением, можно представить в виде растянутой прямоугольной пластины с поперечной распределённой нагрузкой (см. п. 4.1).

Твердотельная модель изделия с закреплением представлена на рисунке 4.5. Закрепление бака ресивера выполнено с помощью кронштейнов и хомутов. Поскольку кронштейны соединены с более жёсткими элементами кессона крыла самолёта, то твердотельные модели последних не приводятся, а закрепление кронштейнов в КЭМ выполняется как абсолютно жёсткое.

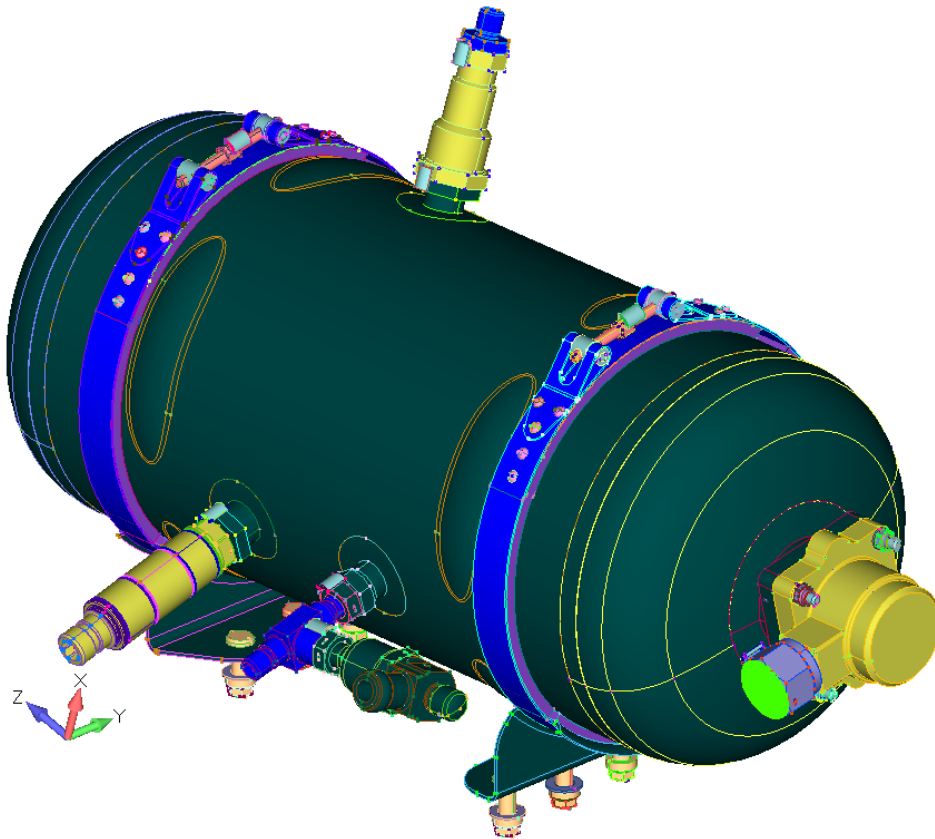


Рисунок 4.5 – Твёрдая модель ресивера ГС с креплением

КЭМ ресивера ГС с креплением, разработанная в Simcenter Femap ⁹, показана на рисунке 4.6. КЭМ состоит из 10057 КЭ и 11000 узлов. Некоторые компоненты изделия, не являющиеся частью силовой конструкции, смоделированы с помощью нульмерных КЭ типа Mass: в центрах тяжести заданы инерционные характеристики без учёта жёсткости и демпфирования. Соединения элементов конструкции ресивера выполнены, в зависимости от размеров зоны контакта поверхностей, двумя способами:

- при помощи неподвижных соединений типа «клей» (Connector – Glued), если зона контакта большая относительно размеров модели (например, контактное взаимодействие бака ресивера и хомутов);
- с использованием КЭ типа Rigid (RBE2), если зона контакта мала по сравнению с размерами модели (например, болтовые соединения).

⁹ Siemens PLM Software Inc. FEMAP. User Guide. Version 2020.2 MP2. – Plano, Texas: Siemens PLM Software Inc., 2020, – 471 p.

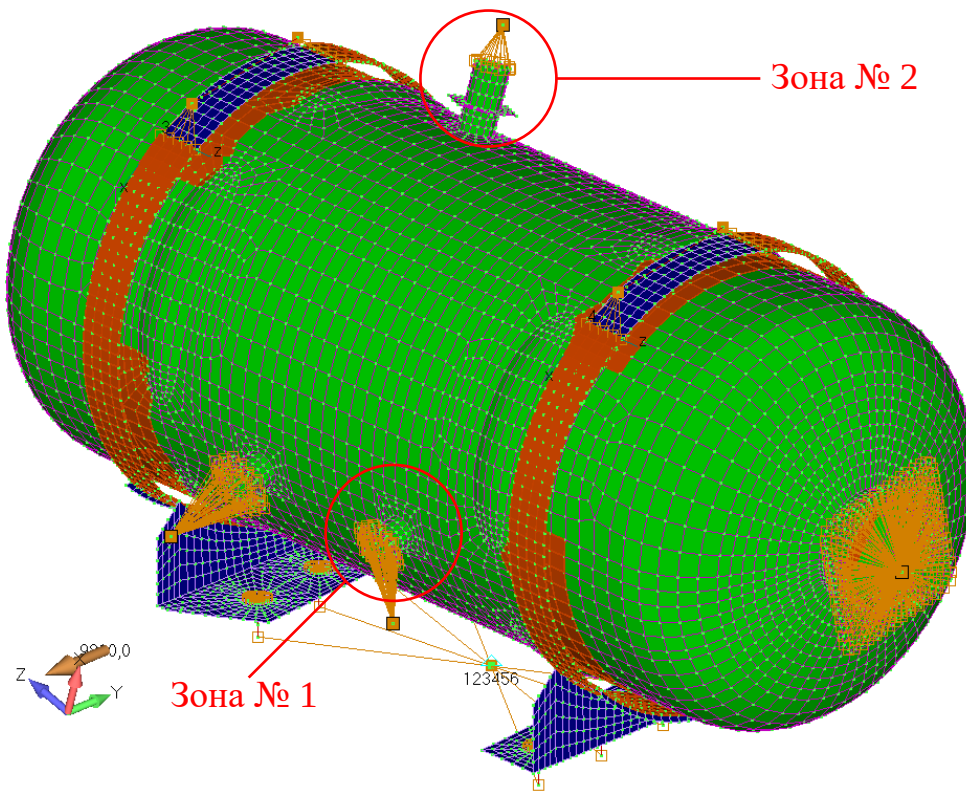


Рисунок 4.6 – КЭМ ресивера ГС с закреплением

Внутри бак заполнен воздухом с избыточным давлением 0.6 МПа, которое вызывает ненулевое среднее значение напряжения. Все материалы конструкции ресивера ГС приняты изотропными, с линейно-упругой моделью деформирования (коэффициенты пропорциональности – модули упругости I и II рода E и G). Механические свойства и усталостные характеристики материалов известны и определены в лабораториях ЦАГИ, СибНИА и других организаций, обладающих необходимой для исследований базой [87]. Значения степени кривой усталости материалов конструкции ресивера находятся в двух диапазонах m : 2 ... 4 и 4 ... 6.

Воздействие тепловых эффектов в расчёте не учитывается. Используются механические свойства и усталостные характеристики материалов, определённые при стандартных условиях атмосферы.

Граница НЧ и ВЧ диапазонов принимается равной $f_{ВЧ} = 128$ Гц как половина частоты регистрации сигналов $f_{рег} = 256$ Гц (см. глава 3).

Анализ собственных колебаний ресивера ГС с закреплением выполняется в комплексе MSC Nastran с использованием решателя SOL 106, позволяющего учесть действие внутреннего избыточного давления.

Для 9 низших тонов собственных колебаний конструкции приводятся частоты (см. таблица 4.13) и формы (см. рисунки 4.7 – 4.18) собственных колебаний. Тоны 1 и 2 соответствуют собственным колебаниям ресивера как единого целого, а тоны 3 – 9 соответствуют преимущественно собственным колебаниям патрубков. В следующих нескольких тонах собственных колебаний идентифицируется наибольшее возбуждение в хомутах, являющихся элементами крепления ресивера к самолёту. Поэтому характеристики тонов собственных колебаний, начиная с 10, не приводятся. Стоит отметить, что СЧ тонов 1 и 2 меньше, чем принятая граница НЧ и ВЧ диапазонов $f_{BC} = 128$ Гц, тогда как СЧ тонов 3 – 8 превышают данное значение.

Таблица 4.13 – Частоты собственных колебаний ресивера ГС с закреплением

№ тона	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота, Гц	58	83	144	149	163	199	205	243	264

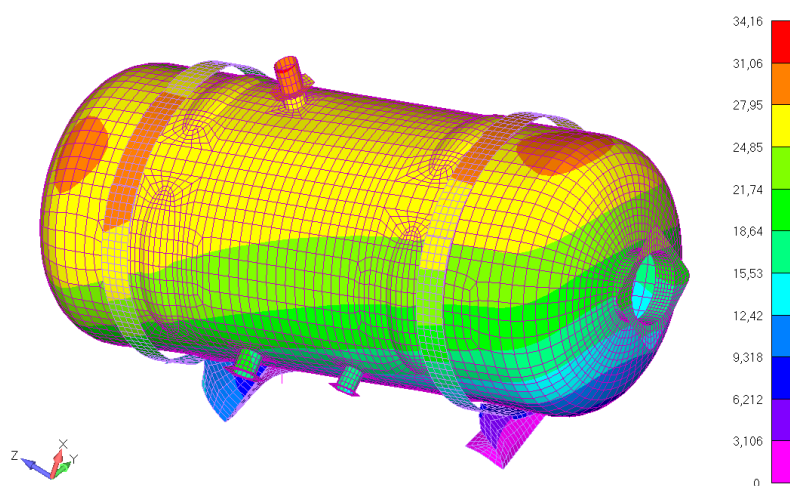


Рисунок 4.7 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с закреплением, тон 1

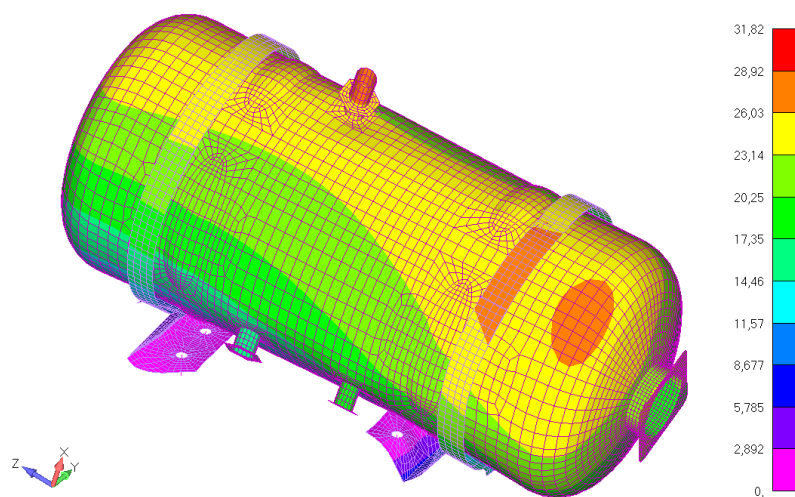


Рисунок 4.8 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с закреплением, тон 2

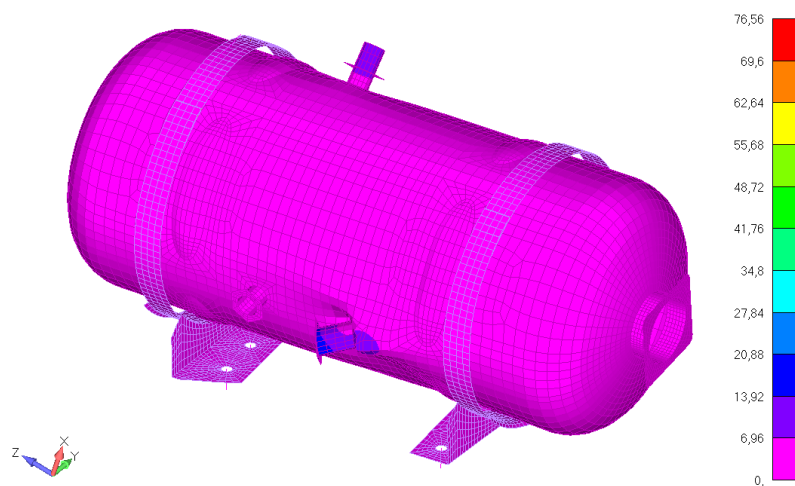


Рисунок 4.9 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с закреплением, тон 3

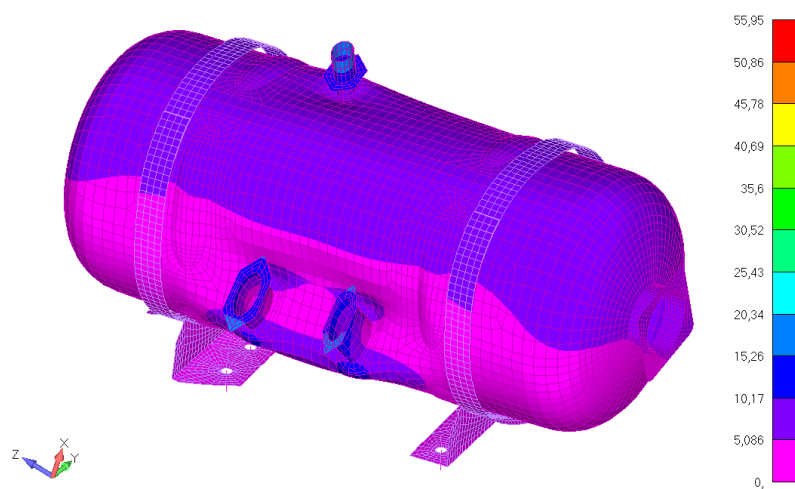


Рисунок 4.10 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с закреплением, тон 4

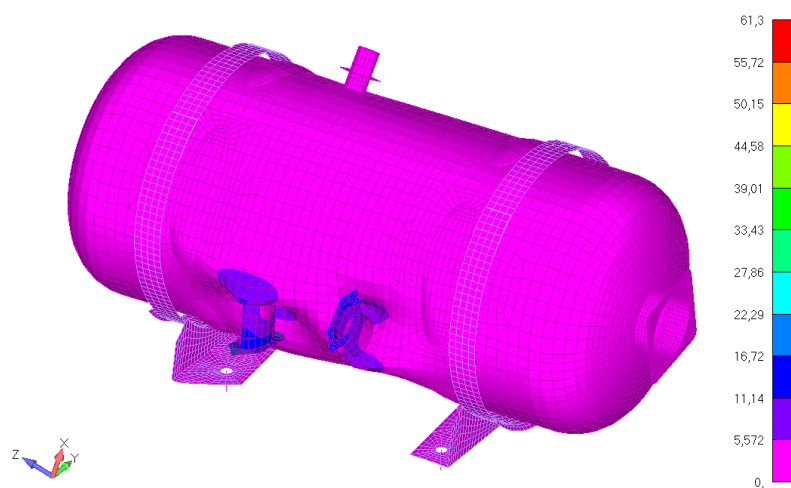


Рисунок 4.11 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с креплением, тон 5

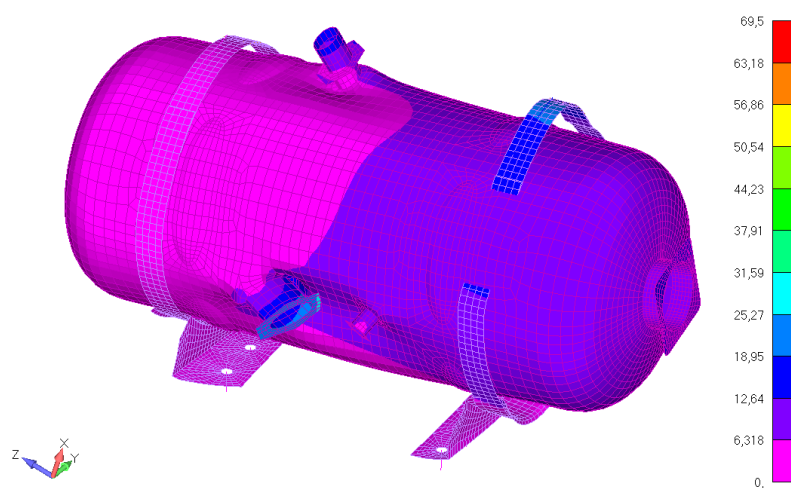


Рисунок 4.12 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с креплением, тон 6

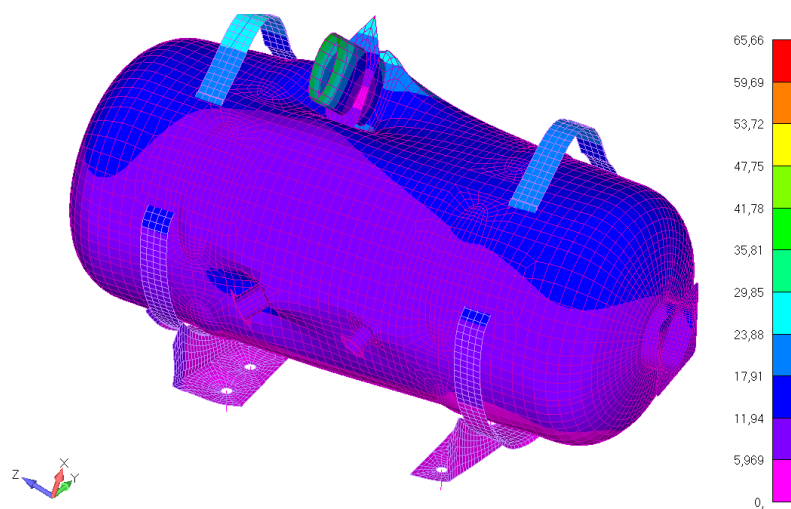


Рисунок 4.13 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с креплением, тон 7

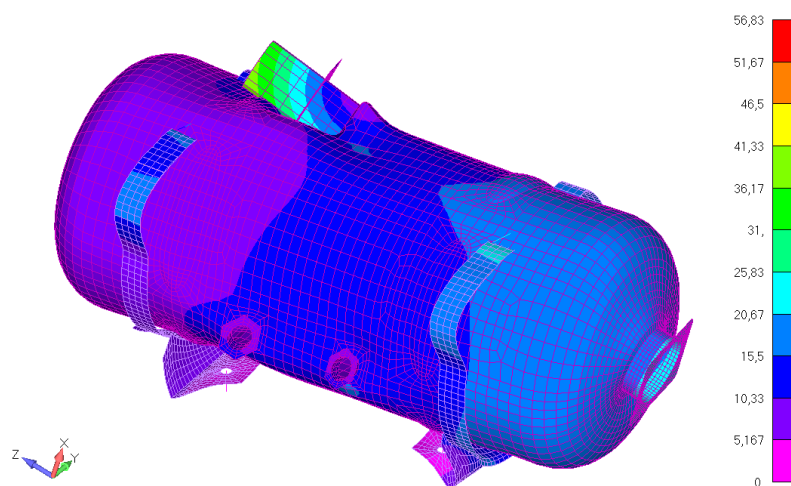


Рисунок 4.14 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с закреплением, тон 8

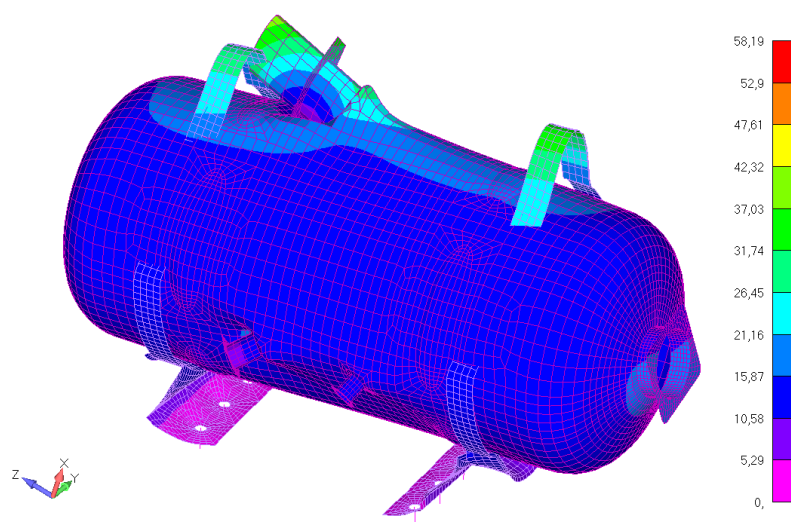


Рисунок 4.15 – Форма собственных колебаний ресивера ГС с закреплением, тон 9

Случайная вибрационная нагрузка прикладывается в направлении оси Y_c связанной системы координат самолёта в течение периода времени $T = 10$ минут к местам крепления кронштейнов (см. рисунок 4.16). Спектральная плотность нагрузки задаётся согласно КТ-160G/14G, разделу 8 «Вибрация» и соответствует кривой стандартной случайной вибрации «Е» (см. рисунок 4.17) для типа ЛА «дозвуковой самолёт с турбореактивными и турбовентиляторными двигателями», в зоне ВС «крыло и ниша шасси».

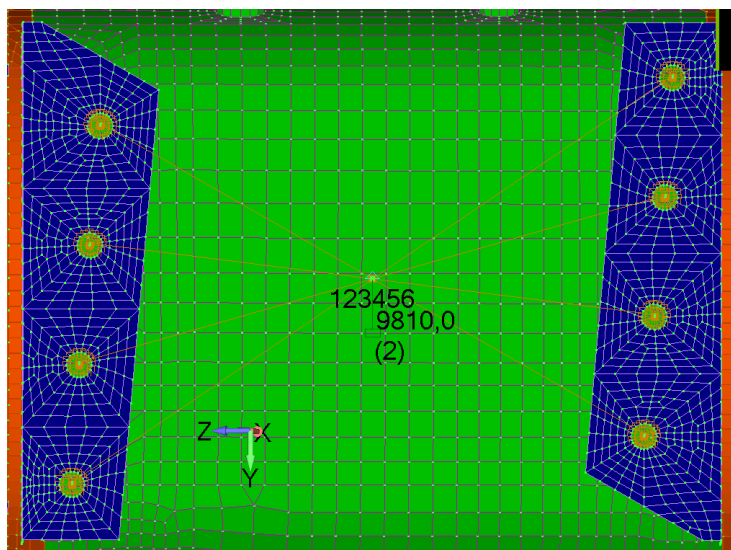


Рисунок 4.16 – Места закрепления кронштейнов ресивера ГС

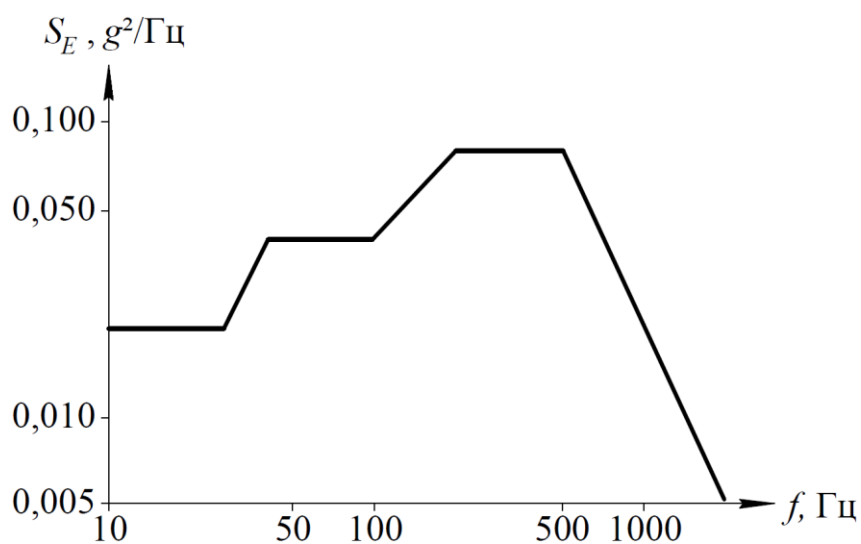


Рисунок 4.17 – Кривая вибрации «Е»

Выполняется расчёт усталостной повреждаемости, приводятся картины распределения данной величины в логарифмической шкале:

- от воздействия суммарной нагрузки D_{Σ} . Расчёт с использованием численного алгоритма из п. 4.2 и модифицированного выражения (3.5), см. рисунок 4.18;
- от воздействия НЧ составляющей нагрузки $D_{НЧ}$ (см. рисунок 4.19). Расчёт с использованием разработанного метода;
- от воздействия ВЧ составляющей нагрузки $D_{ВЧ}$ (см. рисунок 4.20). Расчёт с использованием разработанного метода.

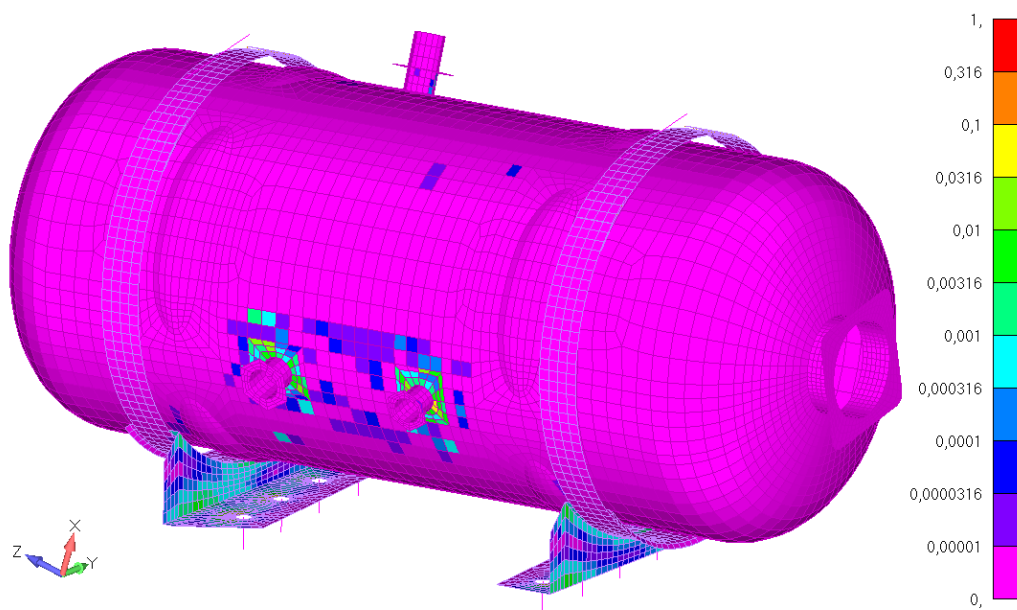


Рисунок 4.18 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия суммарной нагрузки

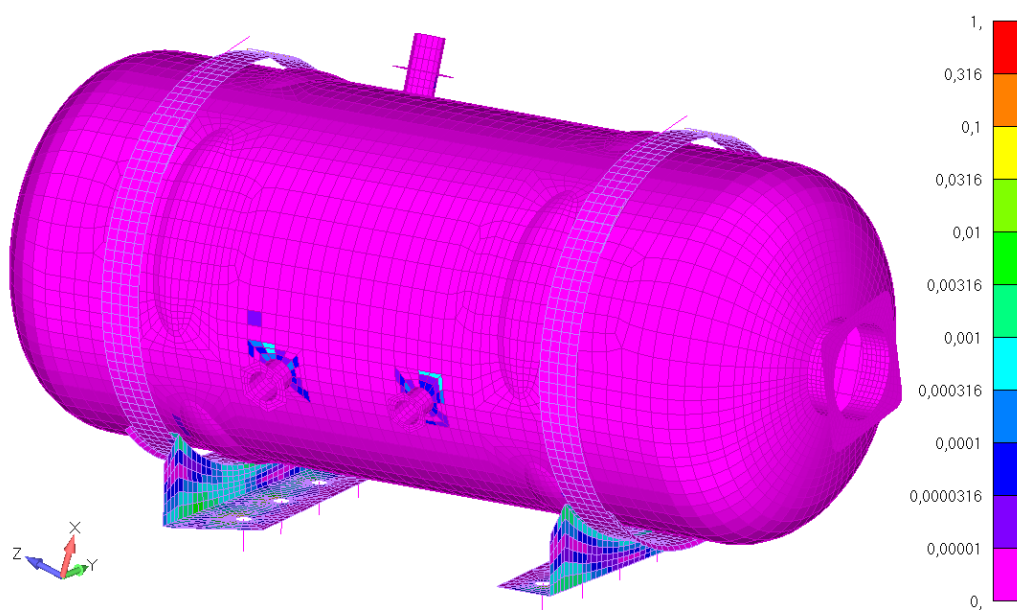


Рисунок 4.19 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия НЧ составляющей нагрузки ($f_{BЧ} = 128$ Гц)

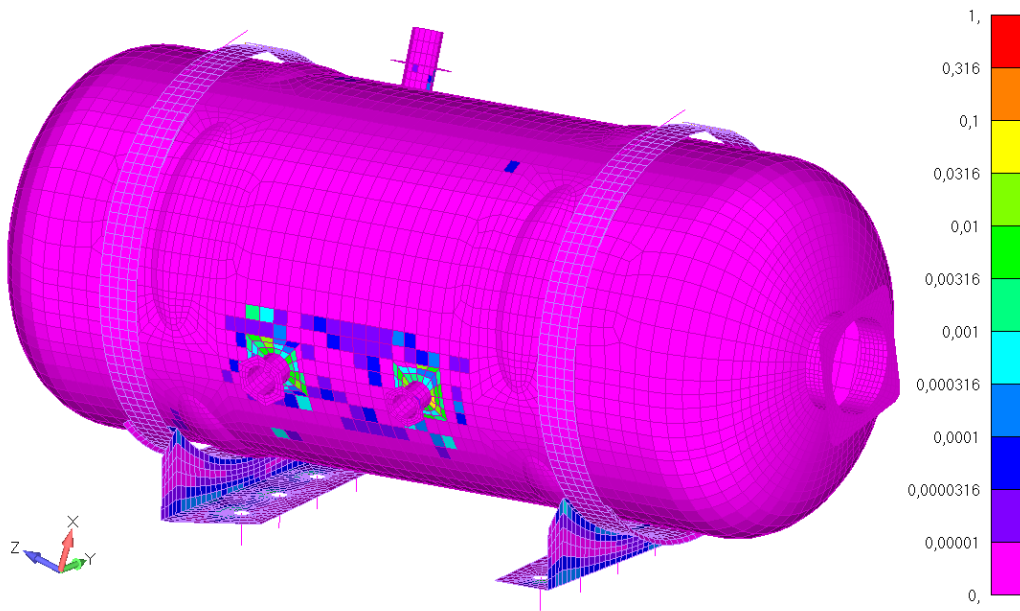


Рисунок 4.20 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия ВЧ составляющей нагрузки ($f_{ВЧ} = 128$ Гц)

Наибольшее значение усталостной повреждаемости в КЭМ получено в зоне крепления кронштейнов, т. к. их крепление смоделировано абсолютно жёстким (см. рисунок 4.16). При этом в зоне крепления кронштейнов превалирует вклад НЧ составляющей нагрузки (см. рисунок 4.19). Более подробное моделирование закрепления, с учётом способа крепления кронштейнов на элементах кессона крыла, может изменить картину распределения усталостной повреждаемости в кронштейнах.

Однако подробное моделирование крепления кронштейнов нецелесообразно, поскольку объектом данного исследования является конструкция ресивера ГС. Распределение усталостной повреждаемости в зонах № 1 и № 2 (см. рисунок 4.6) представлено на рисунках 4.21 – 4.26. В таблице 4.14 приведены наибольшие значения усталостной повреждаемости в данных зонах КЭМ от воздействия суммарной нагрузки и её составляющих (НЧ и ВЧ).

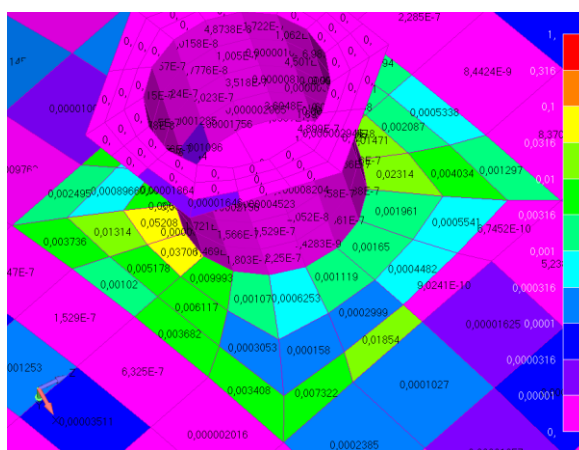


Рисунок 4.21 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия суммарной нагрузки в зоне № 1, $D_{\Sigma}^{max} = 0.05208$

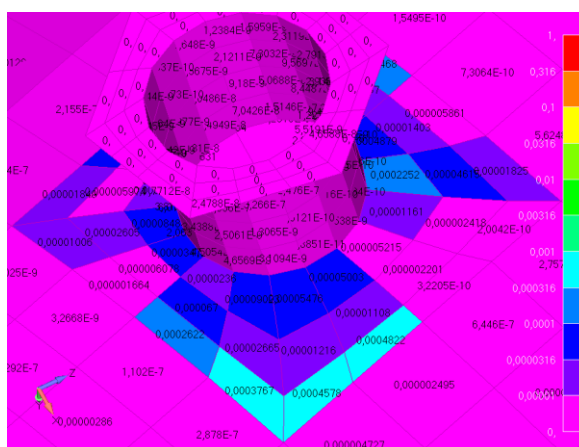


Рисунок 4.22 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия НЧ составляющей нагрузки в зоне № 1, $D_{HЧ}^{max} = 0.00048$ ($f_{BЧ} = 128$ Гц)

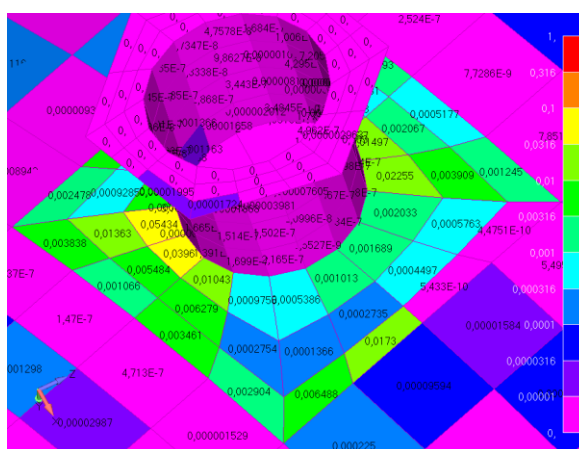


Рисунок 4.23 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия ВЧ составляющей нагрузки в зоне № 1, $D_{BЧ}^{max} = 0.05434$ ($f_{BЧ} = 128$ Гц)

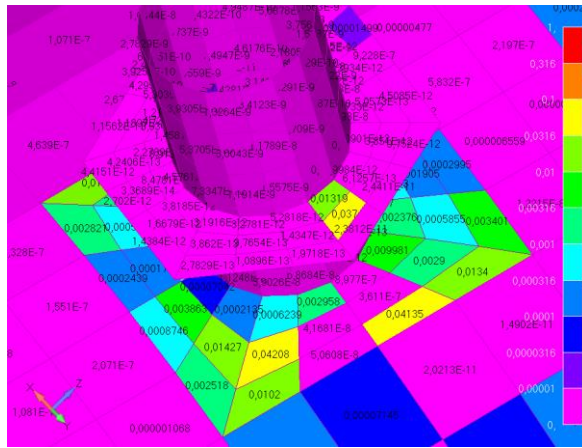


Рисунок 4.24 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия суммарной нагрузки в зоне № 2, $D_{\Sigma}^{max} = 0.04208$

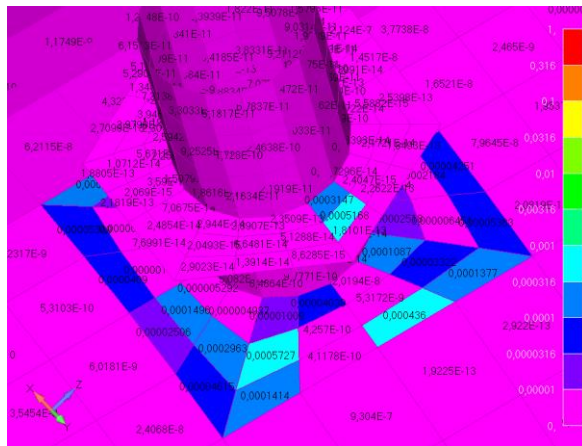


Рисунок 4.25 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия НЧ составляющей нагрузки в зоне № 2, $D_{НЧ}^{max} = 0.00057$ ($f_{ВЧ} = 128$ Гц)

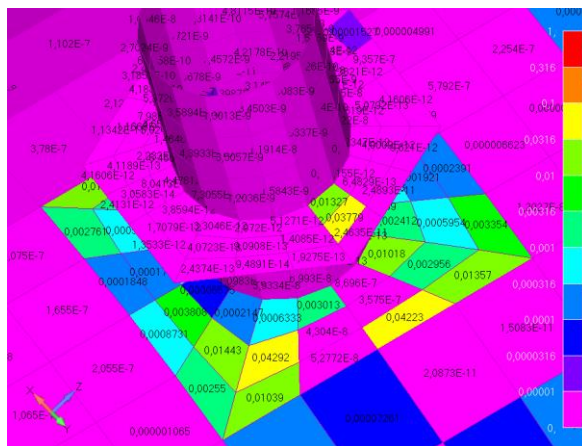


Рисунок 4.26 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия ВЧ составляющей нагрузки в зоне № 2, $D_{ВЧ}^{max} = 0.04292$ ($f_{ВЧ} = 128$ Гц)

Таблица 4.14 – Наибольшие значения усталостной повреждаемости в зонах КЭМ ресивера с наибольшей усталостной повреждаемостью, $f_{BЧ} = 128$ Гц

Зона конструкции ресивера	D_{Σ}^{max}	$D_{HЧ}^{max}$	$D_{BЧ}^{max}$
Зона № 1	0.05208	0.00048	0.05434
Зона № 2	0.04208	0.00057	0.04292

Наибольшие значения усталостной повреждаемости при анализе влияния НЧ и ВЧ составляющих нагрузки получены в разных зонах КЭМ: НЧ – в зоне № 2, $D_{HЧ}^{max} = 0.00057$; ВЧ – в зоне № 1, $D_{BЧ}^{max} = 0.05434$. При этом расчётная усталостная повреждаемость от действия ВЧ составляющей нагрузки в целом значительно выше, чем от действия НЧ составляющей $D_{BЧ} \gg D_{HЧ}$.

Усталостная повреждаемость от действия суммарной нагрузки меньше, чем сумма усталостных повреждаемостей от действия НЧ и ВЧ составляющих $D_{\Sigma}^{max} < D_{HЧ}^{max} + D_{BЧ}^{max}$, поскольку разложение интенсивности повреждаемости в ряд Маклорена (3.11) было выполнено в п. 3.2 при условии $Q \ll 1$ (параметр Q равен отношению спектральных моментов ВЧ и НЧ составляющих нагрузки). Однако сравниваемые значения D_{Σ}^{max} и $(D_{HЧ}^{max} + D_{BЧ}^{max})$ для различных КЭ в исследуемых зонах КЭМ отличаются незначительно: до 4.5 % в зоне № 1 и до 3.4 % в зоне № 2.

Влияние ВЧ составляющей нагрузки при анализе усталостной прочности ресивера ГС оказалось превалирующим, т. к. собственные частоты тонов 3 – 9, соответствующих преимущественно собственным колебаниям патрубков, превышают принятую граничную частоту $f_{BЧ} = 128$ Гц.

Рассматривается второй расчётный случай. Граничная частота принимается равной $f_{BЧ} = 256$ Гц, т. е. увеличивается в 2 раза по сравнению с предыдущим расчётом. Приводятся картины распределения усталостной повреждаемости в логарифмической шкале от действия НЧ составляющей $D_{HЧ}$ (см. рисунок 4.27) и ВЧ составляющей нагрузки $D_{BЧ}$ (см. рисунок 4.28). Распределение усталостной

повреждаемости от воздействия суммарной нагрузки D_{Σ} не изменяется и соответствует распределению, представленному на рисунке 4.18.

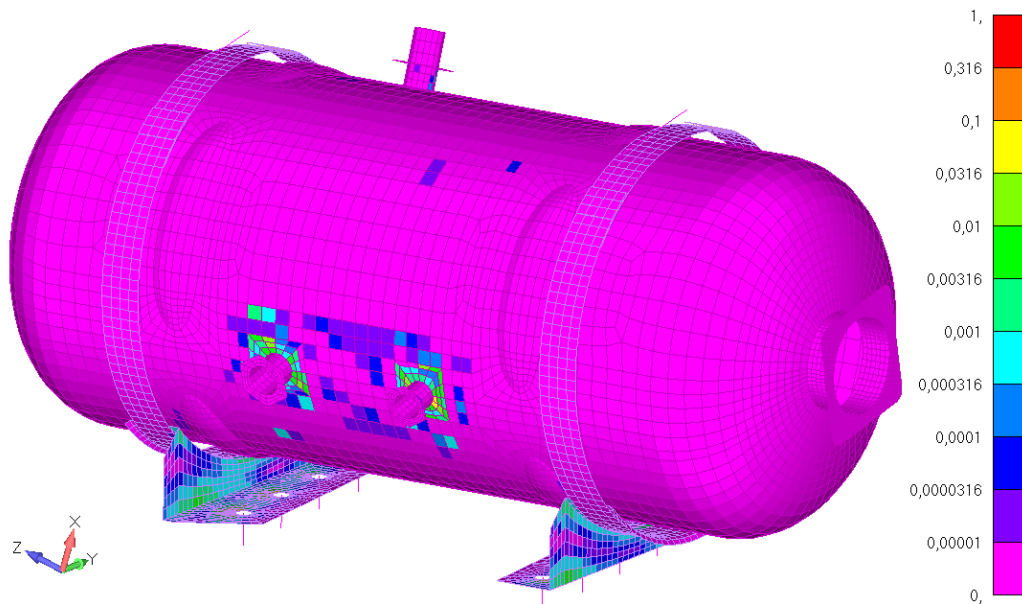


Рисунок 4.27 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия НЧ составляющей нагрузки ($f_{BЧ} = 256$ Гц)

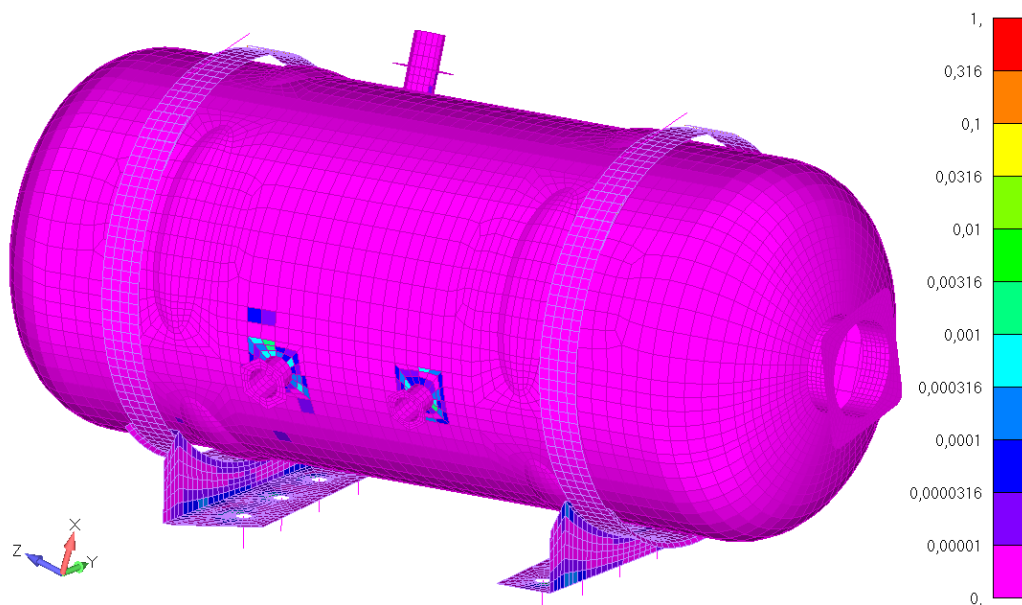


Рисунок 4.28 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия ВЧ составляющей нагрузки ($f_{BЧ} = 256$ Гц)

Поскольку частоты собственных колебаний тонов 1 и 2, как и в первом расчётном случае, меньше, чем граничная частота $f_{BЧ}$, то в зоне крепления кронштейнов превалирует вклад НЧ составляющей нагрузки (см. рисунок 4.27).

Распределение усталостной повреждаемости от действия НЧ и ВЧ составляющих в зонах № 1 и № 2 представлено на рисунках 4.29 – 4.32. Усталостная повреждаемость от воздействия суммарной нагрузки не изменяется, представлена на рисунках 4.21 и 4.24. В таблице 4.15 приведены наибольшие значения усталостной повреждаемости в зонах № 1 и № 2 для суммарной нагрузки и её спектральных составляющих.

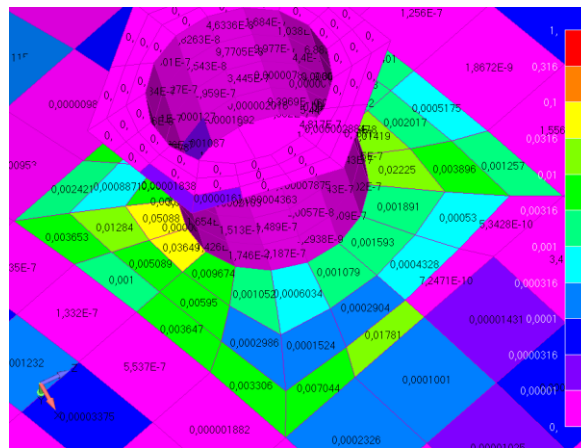


Рисунок 4.29 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия НЧ составляющей нагрузки в зоне № 1, $D_{HЧ}^{max} = 0.05088$ ($f_{BЧ} = 256$ Гц)

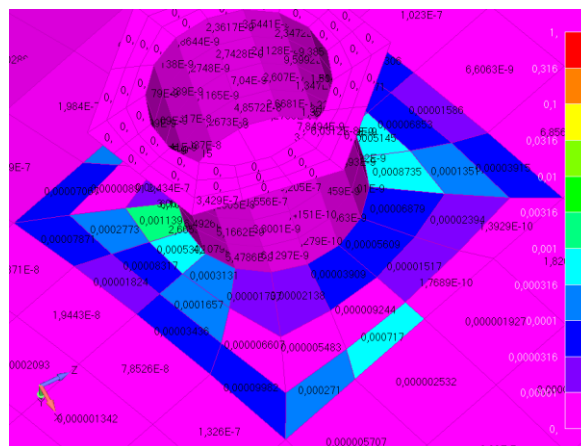


Рисунок 4.30 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия ВЧ составляющей нагрузки в зоне № 1, $D_{ВЧ}^{max} = 0.00114$ ($f_{BЧ} = 256$ Гц)

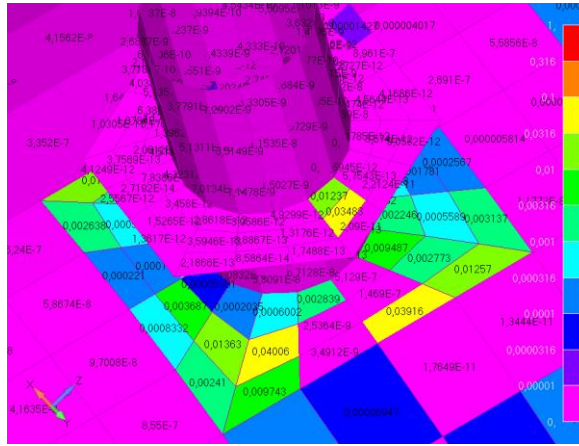


Рисунок 4.31 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия НЧ составляющей нагрузки в зоне № 2, $D_{НЧ}^{max} = 0.04006$ ($f_{ВЧ} = 256$ Гц)

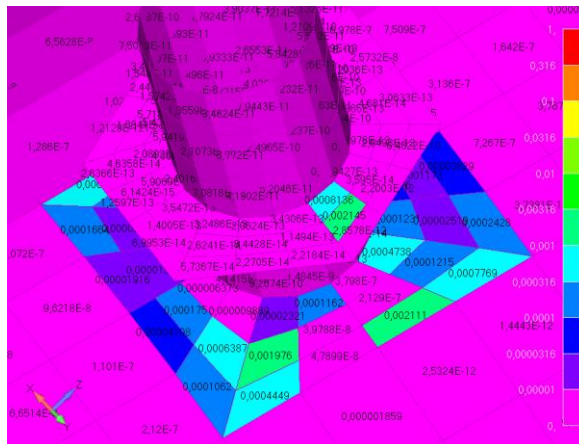


Рисунок 4.32 – Распределение усталостной повреждаемости от воздействия ВЧ составляющей нагрузки в зоне № 2, $D_{ВЧ}^{max} = 0.00215$ ($f_{ВЧ} = 256$ Гц)

Таблица 4.15 – Наибольшие значения усталостной повреждаемости в зонах КЭМ ресивера с наибольшей усталостной повреждаемостью, $f_{ВЧ} = 256$ Гц

Зона конструкции ресивера	D_{Σ}^{max}	$D_{НЧ}^{max}$	$D_{ВЧ}^{max}$
Зона № 1	0.05208	0.05088	0.00114
Зона № 2	0.04208	0.04006	0.00215

Наибольшие значения усталостной повреждаемости при анализе влияния НЧ и ВЧ составляющих нагрузки получены в разных зонах КЭМ: НЧ – в зоне № 1, $D_{НЧ}^{max} = 0.05088$; ВЧ – в зоне № 2, $D_{ВЧ}^{max} = 0.00215$. В расчётном случае $f_{ВЧ} = 256$ Гц

усталостная повреждаемость от действия НЧ составляющей нагрузки значительно выше, чем от действия ВЧ составляющей $D_{ВЧ} \ll D_{НЧ}$.

При выборе граничной частоты $f_{ВЧ} = 256$ Гц влияние ВЧ составляющей нагрузки на усталостную прочность ресивера ГС является небольшим (до 5.2 %), поскольку частоты собственных колебаний тонов 3 – 8, соответствующих преимущественно собственным колебаниям патрубков, оказались меньше 256 Гц. Среди представленных частот собственных колебаний ресивера только частота тона 9, равная 264 Гц, превышает значение 256 Гц.

Таким образом, в случае воздействия на конструкцию ресивера ГС стандартной случайной вибрации превалирующее влияние на усталостную прочность оказывает составляющая нагрузки в диапазоне частот от 128 до 256 Гц. Влияние ВЧ (от 256 Гц и выше) составляющей нагрузки на усталостную повреждаемость не превышает 5.2 %.

При выборе граничной частоты $f_{ВЧ}$ рекомендуется учитывать собственные характеристики анализируемой конструкции. В случае если частоты собственных колебаний, на которых наблюдается большой отклик конструкции (или отдельных её элементов), превышают частоту $f_{ВЧ}$, то влияние ВЧ составляющей нагрузки на усталостную прочность конструкции (или отдельных её элементов) может быть велико, как в случае с ресивером ГС при $f_{ВЧ} = 128$ Гц. Однако конструкция ресивера ГС является достаточно простой, тогда как при анализе усталости изделий, состоящих из большего количества элементов, идентификация низших собственных частот всех элементов конструкции может быть затруднительна.

4.6 Выводы по главе 4

Представлен численный алгоритм решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем в комплексе MSC Nastran. Проведено сравнение результатов численных экспериментов с аналитическим решением

для двух простых предварительно растянутых шарнирно опёртых конструкций: прямого стержня и прямоугольной пластины. Результаты проведённых численных экспериментов продемонстрировали высокую точность алгоритма: относительное отклонение сравниваемых величин не превысило 2 %. Это свидетельствует о том, что алгоритм является эффективным для решения инженерных задач анализа прочности и усталости конструкций.

С использованием численного алгоритма решения задачи о случайных колебаниях предварительно нагруженных систем была выполнена численная реализация метода анализа влияния ВЧ нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта. Подготовка КЭМ выполняется в программе Simcenter Femap, расчёты – в MSC Nastran. Если НЧ составляющая нагрузки задана во временной области, то используется анализ Direct Transient Response, а если в частотной – анализ Random Response.

Метод применён для численного анализа усталости ресивера ГС среднемагистрального пассажирского самолёта при воздействии стандартной случайной вибрации. Разработана КЭМ, задано нагружение согласно нормативным требованиям, предъявляемым к авиационному оборудованию, и вычислена усталостная повреждаемость от данного воздействия. Отмечено, что при анализе влияния НЧ и ВЧ составляющих нагрузки на усталостную прочность наибольшие значения усталостной повреждаемости получены в разных зонах КЭМ. Отражено, что количественное влияние ВЧ составляющей нагрузки на усталостную прочность анализируемого изделия существенно зависит от выбора граничной частоты. При выборе граничной частоты рекомендуется учитывать собственные характеристики анализируемой конструкции.

Заключение

В ходе выполнения цели по разработке численно-экспериментального метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта получены следующие **основные результаты**:

1. Получены экспериментальные данные о статистической незначимости влияния низкоамплитудных колебаний нагрузки на усталостную долговечность стальных элементарных образцов (при уровне значимости 0.05). Особенность испытаний: на каждый отнулевой цикл приходится большое число (от 225 до 2866) низкоамплитудных циклов с высоким средним значением нагрузки. Разработаны соответствующие рекомендации для стальных элементов конструкции самолёта.

2. Проведён сравнительный анализ спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости, основанный на обработке полётных данных опытного экземпляра среднемагистрального самолёта. Определён приоритетный спектральный метод для анализа усталостной прочности элементов конструкции самолёта: одномоментный метод. Он имеет самый низкий разброс значений усталостной повреждаемости (19.3 %) и выражается простым соотношением.

3. Разработан метод расчёта усталостной повреждаемости элементов конструкции самолёта от действия высокочастотной составляющей нагрузки, основанный на разложении в степенной ряд выражения одномоментного метода. Метод позволяет проводить анализ влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта при воздействии широкополосного процесса нагружения с ненулевым средним значением.

4. Выполнена численная реализация метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта. Проведён анализ усталостной прочности конструкции ресивера гидравлической системы среднемагистрального самолёта. Выявлено, что влияние высокочастотной составляющей нагрузки на усталостную прочность конструкций существенно зависит от выбора граничной частоты.

Список литературы

1. Зарецкий, М. В. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния конструкций авиационных изделий при совместной эксплуатации с носителем : дисс. ... канд. техн. наук / М. В. Зарецкий. – Москва : МАИ, 2014. – 102 с.
2. Свиридов, А. А. Разработка методик определения расчетных характеристик материалов для обеспечения статической прочности и ресурса авиационной конструкции : дисс. ... канд. техн. наук / А. А. Свиридов. – Жуковский : ЦАГИ, 2022. – 167 с.
3. Гусев, А. С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках / А. С. Гусев. – Москва : Машиностроение, 1989. – 248 с.
4. Щербань, К. С. Ресурсные испытания натурных конструкций самолетов / К. С. Щербань. – Москва : Физматлит, 2009. – 234 с.
5. Стрижиус, В. Е. Методы расчета усталостной долговечности элементов авиаконструкций / В. Е. Стрижиус. – справочное пособие. – Москва : Машиностроение, 2012. – 272 с.
6. Zorman, A. Vibration fatigue by spectral methods—A review with open-source support / A. Zorman, J. Slavič, M. Boltežar. – Text : electronic // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2023. – № 190. – P. 110-149. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0888327023000560> (date accessed: 02.02.2024).
7. Райхер, В. Л. Усталостная повреждаемость / В. Л. Райхер. – учебное пособие. – Москва : МАТИ, 2011. – 239 с.
8. Агамиров, Л. В. Усталостная долговечность и повреждаемость авиационных конструкций / Л. В. Агамиров, В. Л. Райхер. – Москва : МЭИ, 2018. – 134 с.
9. Когаев, В. П. Расчёты на прочность при напряжениях, переменных во времени / В. П. Когаев. – Москва : Машиностроение, 1977. – 232 с.
10. Palmgren, A. Die Lebensdauer von Kugellagern / A. Palmgren // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. – 1924. – Vol. 68. – № 14. – P. 339-341.
11. Miner, M. A. Cumulative Damage in Fatigue / M. A. Miner. – Text : electronic // Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1945. – Vol. 12. – № 3. – P. 159-164. – URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article/12/3/A159/1103202/Cumulative-Damage-in-Fatigue> (date accessed: 09.04.2025).
12. Одинг, И. А. Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов / И. А. Одинг. – Москва : Машгиз, 1962. – 260 с.
13. Орлова, Т. И. Мониторинг нагрузок и накопленной усталостной повреждаемости в условиях эксплуатации: реализация, результаты и возможности / Т. И. Орлова, В. В. Стрелков, В. И. Цымбалюк // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. – № 1 (5). – С. 1512-1520.

14. Максимова, О. М. Развитие и применение нейросетевых технологий для задач механики и строительных конструкций / О. М. Максимова // Вестник ИрГТУ. – 2013. – № 8 (79). – С. 81-88.

15. Способ оценки нагружения конструкции самолёта при лётных прочностных исследованиях с использованием искусственных нейронных сетей / М. Н. Лучинский, Е. В. Арнаутов, А. А. Орлов, [и др.]. – Жуковский, 2016.

16. Применение нейросетевых технологий искусственного интеллекта для мониторинга нагрузок в силовых элементах авиационных конструкций / А. А. Орлов, К. И. Сыпало, В. И. Городниченко, А. А. Баутин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2023. – Т. 89. – № 5. – С. 56-63.

17. Применение нейросетевых аппроксимационных моделей для задач мониторинга нагруженности элементов авиационных конструкций / А. А. Баутин, П. С. Бессонов, В. И. Клепцов, Ю. А. Свирский // Ученые записки ЦАГИ. – 2025. – Т. 56. – № 2. – С. 121-132.

18. Определение действующих нагрузок элементов шасси самолета RRJ-95 с использованием рекуррентной искусственной нейронной сети / А. А. Баутин, П. С. Бессонов, В. И. Клепцов, Ю. А. Свирский // Ученые записки ЦАГИ. – 2025. – Т. 56. – № 3. – С. 77-84.

19. Хабаров, С. С. Разработка системы непрерывного мониторинга технического состояния высоконагруженных конструкций на основе волоконно-оптической измерительной технологии : дисс. ... канд. техн. наук / С. С. Хабаров. – Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2020. – 131 с.

20. Система контроля технического состояния конструкций летательного аппарата (варианты) / Н. Л. Львов, С. С. Хабаров, А. А. Носов, Д. В. Сиваков. – Москва, 2015.

21. Курулюк, К. А. Видеограмметрическая система для бесконтактных измерений полей деформаций крупногабаритных объектов / К. А. Курулюк. – Текст : электронный // Труды МАИ. – 2018. – № 102. – 8 с. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/videogrammetricheskaya-sistema-dlya-beskontaktnyh-izmereniy-poley-deformatsiy-krupnogabaritnyh-obektov> (дата обращения: 10.09.2025).

22. Стрижиус, В. Е. Особенности диаграмм постоянной усталостной долговечности слоистых композитов / В. Е. Стрижиус // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. – 2019. – Т. 25. – № 3. – С. 120-132.

23. Бураго, Н. Г. Исследование сверхмногоцикловой усталости при высокочастотных колебаниях элементов авиационных конструкций / Н. Г. Бураго, И. С. Никитин, В. Л. Якушев // Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 года. – Казань : КФУ, 2015. – С. 621-622.

24. Никитин, И. С. Повреждаемость и усталостное разрушение элементов конструкций в различных режимах циклического нагружения / И. С. Никитин, Н. Г. Бураго, А. Д. Никитин // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86. – № 2. – С. 276-290.

25. Бессолова, О. А. Расчет усталостной повреждаемости при циклическом и случайном нагружении с ненулевым средним значением / О. А. Бессолова, В. Л. Райхер, А. С. Устинов // Ученые записки ЦАГИ. – 1989. – Т. 20. – № 3. – С. 72-80.

26. Сверхмногоцикловая усталость при высокочастотных колебаниях диска компрессора ГТД / Н. Г. Бураго, И. С. Никитин, П. А. Юшковский, В. Л. Якушев. – Текст : электронный // Вестник кибернетики. – 2015. – № 2 (18). – С. 33-40. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23917967> (дата обращения: 23.04.2025).

27. Махутов, Н. А. Исследование обобщенных кривых статического и циклического деформирования, повреждения и разрушения / Н. А. Махутов, М. М. Гаденин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2023. – Т. 89. – № 5. – С. 46-55.

28. Haibach, E. Betriebsfestigkeit Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung / E. Haibach. – 3. – Berlin etc. : Springer, 2006. – 765 p.

29. Завойчинская, Э. Б. О много- и гигацикловой усталости металлов и сплавов / Э. Б. Завойчинская, А. Р. Каблин // Журнал технической физики. – 2023. – Т. 93. – № 12. – С. 1736-1739.

30. Никитин, А. Д. Экспериментальное исследование сверхмногоцикловой усталости титановых сплавов / А. Д. Никитин, И. С. Никитин // Научные технологии. – 2015. – Т. 16. – № 7. – С. 51-58.

31. Критерий разрушения при сверхмногоцикловой усталости с определением критической плоскости / Н. Г. Бураго, А. Д. Никитин, И. С. Никитин, В. Л. Якушев // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, Самара, 18 - 22 сентября 2017 года. – Самара : СамГТУ, 2017. – Т. 1. – С. 95-98.

32. Никитин, И. С. Развитие повреждений при сверхмногоцикловой усталости / И. С. Никитин, А. Д. Никитин, Б. А. Стратула // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 120-129.

33. Никитин, И. С. Усталостное разрушение и оценка долговечности элементов авиационных конструкций при комбинированном циклическом нагружении / И. С. Никитин, А. Д. Никитин, Б. А. Стратула // Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022), Алушта, 04 - 13 сентября 2022 года. – Москва : МАИ, 2022. – С. 215-217.

34. Испытания элементов конструкций и узлов вертолета на усталостную прочность / Л. А. Бохоева, В. Ю. Курохтин, А. В. Перевалов [и др.] // Вестник Московского авиационного института. – 2017. – Т. 24. – № 1. – С. 7-16.

35. Разработка расчетно-экспериментального подхода к анализу долговечности авиационных конструкций, подверженных воздействию повышенных акустических нагрузок / Д. В. Барышева, С. В. Гордон, Н. В. Ким [и др.] // Сборник тезисов Всероссийского аэроакустического форума, Геленджик, 20 - 25 сентября 2021 года. – Жуковский : ЦАГИ, 2021. – С. 217-219.

36. Бессонов, П. С. Программа определения усталостной долговечности металлических конструкций при случайном вибрационно-акустическом нагружении / П. С. Бессонов. – Москва, 2021.

37. Vibro-acoustic amplitude and frequency modulations during fatigue damage evolution / D. Donskoy, B. Golchinfar, M. Ramezani [et al.]. – Text : electronic // Conference Proceedings of 45th Annual Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (QNDE 2018), Burlington, Vermont, USA, 15 - 19 July 2018. – College Park : American Institute of Physics, 2019. – Vol. 38 2102. – Article 040004. – 8 p. – URL: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article/888320> (date accessed: 06.11.2024).

38. The Use of Spectral Method for Fatigue Life Assessment for Non-Gaussian Random Loads / A. Niesłony, M. Böhm, T. Łagoda, F. Cianetti. – Text : electronic // Acta Mechanica et Automatica. – 2016. – Vol. 10. – № 2. – P. 100-103. – URL: <https://sciendo.com/article/10.1515/ama-2016-0016> (date accessed: 07.04.2025).

39. Irvine, T. Modified Spectral Fatigue Methods for S-N Curves with MIL-HDBK-5J Coefficients / T. Irvine, C. Larsen. – Text : electronic // Proceedings of the 14th European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Environmental Testing (ECSSMET), Toulouse, France, 27 - 30 September 2016. – Noordwijk, the Netherlands : ESA, 2016. – P. 10. – URL: https://academia.edu/114756314/Modified_Spectral_Fatigue_Methods_for_S_N_Curves_With_MIL_HDBK_5J_Coefficients (date accessed: 23.10.2024).

40. Bendat, J. S. Probability Functions for Random Responses: Prediction of Peaks, Fatigue Damage, and Catastrophic Failures : Contractor Report / J. S. Bendat. – Washington, District of Columbia, USA : NASA, 1964. – URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19640008076> (date accessed: 25.06.2024). – Text : electronic.

41. Lotsberg, I. Background for Revision of DNV-RP-C203 Fatigue Analysis of Offshore Steel Structure / I. Lotsberg. – Text : electronic // Proceedings of the 24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE 2005), Halkidiki, Greece, 12 - 17 June 2005. – New York : ASMEDC, 2005. – Vol. 3. – P. 297-306. URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2005/41979/297/303556> (date accessed: 24.06.2024).

42. Huang, W. Fatigue under Combined High and Low Frequency Loads / W. Huang, T. Moan. – Text : electronic // Proceedings of the 25th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE 2006), Hamburg, Germany, 04 - 09 June 2006. – New York : ASMEDC, 2006. – Vol. 3. – P. 149-156. – URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2006/47489/149/320447> (date accessed: 25.07.2024).

43. Lutes, L. D. Improved Spectral Method for Variable Amplitude Fatigue Prediction / L. D. Lutes, C. E. Larsen. – Text : electronic // Journal of Structural Engineering. – 1990. – Vol. 116. – № 4. – P. 1149-1164. – URL: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290733-9445%281990%29116%3A4%281149%29> (date accessed: 25.06.2024).

44. Larsen, C. E. Predicting the fatigue life of offshore structures by the single-moment spectral method / C. E. Larsen, L. D. Lutes. – Text : electronic // Probabilistic Engineering Mechanics. – 1991. – Vol. 6. – № 2. – P. 96-108. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/026689209190023W> (date accessed: 19.07.2024).
45. Wirsching, P. H. Fatigue Under Wide Band Random Stresses / P. H. Wirsching, M. C. Light // Journal of the Structural Division. – 1980. – Vol. 106. – № 7. – P. 1593-1607.
46. Ortiz, K. Fatigue Damage Prediction for Stationary Wideband Processes / K. Ortiz, N. K. Chen // Proceedings of the Fifth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP-5), Vancouver, British Columbia, Canada, 25 - 29 May 1987. – London : Civil Engineering Systems, 1987.
47. Benasciutti, D. Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes / D. Benasciutti, R. Tovo. – Text : electronic // International Journal of Fatigue. – 2005. – Vol. 27. – № 8. – P. 867-877. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142112305000617> (date accessed: 21.06.2024).
48. Zhao, W. On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes / W. Zhao, M. Baker. – Text : electronic // International Journal of Fatigue. – 1992. – Vol. 14. – № 2. – P. 121-135. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/014211239290088T> (date accessed: 25.06.2024).
49. Park, J.-B. A new fatigue prediction model for marine structures subject to wide band stress process / J.-B. Park, J. Choung, K.-S. Kim. – Text : electronic // Ocean Engineering. – 2014. – № 76. – P. 144-151. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0029801813003909> (date accessed: 25.07.2024).
50. Jun, S.-H. Development of a novel fatigue damage model for Gaussian wide band stress responses using numerical approximation methods / S.-H. Jun, J.-B. Park. – Text : electronic // International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. – 2020. – № 12. – P. 755-767. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S209267822030042X> (date accessed: 25.06.2024).
51. Dirlik, T. Application of Computes in Fatigue Analysis : Ph. D. Thesis / T. Dirlik. – Coventry, England : University of Warwick, 1985. – 243 p. – URL: <https://researchgate.net/publication/42538467> (date accessed: 02.02.2023). – Text : electronic.
52. Севастьянов, Ф. С. Закономерности развития повреждений в силовых элементах авиационных конструкций из полимерных композиционных материалов при воздействии виброакустических нагрузок : дисс. ... канд. техн. наук / Ф. С. Севастьянов. – Жуковский : ЦАГИ, 2025. – 187 с.
53. Ильичев, В. Д. Применение спектрального суммирования усталостных повреждений при сложно-напряженном состоянии конструкции / В. Д. Ильичев // Ученые записки ЦАГИ. – 1979. – Т. 10. – № 2. – С. 65-75.

54. Райхер, В. Л. Гипотеза спектрального суммирования и ее применение для определения усталостной долговечности при действии случайных нагрузок / В. Л. Райхер // Труды Центрального аэро-гидродинамического института им. проф. Н. Е. Жуковского. – 1969. – № 1134. – С. 39.

55. Mršnik, M. Vibration fatigue using modal decomposition / M. Mršnik, J. Slavič, M. Boltežar. – Text: electronic // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2018. – № 98. – P. 548-556. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0888327017302728> (date accessed: 02.02.2024).

56. Vibration Fatigue by Spectral Methods: from Structural Dynamics to Fatigue Damage - Theory and Experiments. Vibration fatigue by spectral methods / J. Slavic, M. Boltezar, M. Mrsnik, [et al.]. – 1. – Amsterdam : Elsevier, 2020. – 230 p.

57. Бессонов, П. С. Разработка алгоритмов анализа нагружения авиационных конструкций в задачах оценки усталостной долговечности : дисс. ... канд. техн. наук / П. С. Бессонов. – Жуковский : ЦАГИ, 2025. – 130 с.

58. Lagoda, T. The influence of the mean stress on fatigue life of 10HNAP steel under random loading / T. Lagoda, E. Macha, R. Pawliczek. – Text: electronic // International Journal of Fatigue. – 2001. – Vol. 23. – № 4. – P. 283-291. – URL: <https://researchgate.net/publication/240432489> (date accessed: 07.10.2025).

59. Niesłony, A. Mean stress value in spectral method for the determination of fatigue life / A. Niesłony, M. Böhm. – Text: electronic // Acta Mechanica et Automatica. – 2012. – Vol. 6. – № 2. – P. 71-74. – URL: <https://researchgate.net/publication/266886683> (date accessed: 24.03.2025).

60. Ерасов, В. С. Испытания на усталость металлических материалов (обзор) Часть 1. Основные определения, параметры нагружения, представление результатов испытаний / В. С. Ерасов, Е. И. Орешко // Авиационные материалы и технологии. – 2020. – № 4 (61). – С. 59-70.

61. Махутов, Н. А. Закономерности накопления малоцикловых повреждений с учетом эксплуатационных параметров процесса нагружения / Н. А. Махутов, М. М. Гаденин // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. – 2019. – № 56. – С. 45-57.

62. Бойко, Т. С. Методика теоретической оценки интегральной повторяемости перегрузок, действующих на самолет в типовом полете / Т. С. Бойко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2019. – № 3 (155). – С. 35-41.

63. Бидерман, В. Л. Механика тонкостенных конструкций: Статика / В. Л. Бидерман. – Москва : ЛЕНАНД, 2021. – 496 с.

64. Timoshenko, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars / S. P. Timoshenko. – Text: electronic // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1921. – Vol. 41. – № 245. – P. 744-746. – URL: <https://tandfonline.com/doi/full/10.1080/14786442108636264> (date accessed: 20.02.2026).

65. Timoshenko, S. P. Theory of plates and shells / S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger. – 2. – New York : McGraw-Hill Book Company, 1959. – 580 p.

66. Бидерман, В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – Москва : ЛЕНАНД, 2017. – 416 с.

67. Рыбаулин, А. Г. Исследование динамического напряженного состояния и долговечности тонкостенных авиационных конструкций с дискретными сварными соединениями при случайном нагружении : дисс. ... канд. техн. наук / А. Г. Рыбаулин. – Москва : МАИ, 2017. – 121 с.

68. Светлицкий, В. А. Случайные колебания механических систем / В. А. Светлицкий. – Москва : Машиностроение, 1976. – 216 с.

69. Hrennikoff, A. Solution of problems of elasticity by the framework method / A. Hrennikoff // Journal of Applied Mechanics. – 1941. – Vol. 8. – № 4. – P. 169-175.

70. Courant, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations / R. Courant. – Text : electronic // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1943. – Vol. 49. – № 1. – P. 1-23. – URL: <https://ams.org/bull/1943-49-01/S0002-9904-1943-07818-4/> (date accessed: 18.02.2026).

71. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. – Москва : Мир, 1986. – 318 с.

72. Bathe, K.-J. Finite Element Procedure / K.-J. Bathe. – Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 1996. – 540 p.

73. Жеков, К. Н. Практическое руководство по конечно-элементному анализу: Лучшие приемы и практики. Общий подход для универсального использования при расчете прочностных и тепловых задач / К. Н. Жеков. – Москва : ЛЕНАНД, 2019. – 200 с.

74. Бакушев, С. В. Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела / С. В. Бакушев. – Москва : URSS, 2021. – 426 с.

75. Xiaocheng, X. Random response analysis of pre-stressed structures using MSC/NASTRAN / X. Xiaocheng. – Beijing, China : China Academy of Launch Vehicle Technology, 1999. – 5 p. – URL: <https://semanticscholar.org/paper/Random-response-analysis-of-pre-stressed-structures-Xiaocheng/d1cfc5fec8e944eb38996eaeba37d517f0c6e79> (date accessed: 07.03.2025). – Text : electronic.

76. Ле В. Т. Расчетная оценка повреждаемости композитных авиационных панелей при множественном низкоскоростном ударе : дисс. ... канд. техн. наук / Ле В. Т. – Новосибирск : НГТУ, 2024. – 231 с.

77. Численное исследование деформирования и разрушения трехслойных панелей с дефектами под динамическими воздействиями / А. Л. Медведский, М. И. Мартиросов, Д. В. Дедова, А. В. Хомченко // Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАИ'2022), Москва, 04 - 13 сентября 2022. – Москва : МАИ, 2022. – С. 209-210.

78. Грибков, В. А. Динамическое взаимодействие оболочечных элементов конструкции ЛА в спектре частот неосесимметричных колебаний / В. А. Грибков, Д. С. Насонов, А. А. Шульга // Сборник тезисов XLV Академических чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых - пионеров освоения космического пространства (Королёвские чтения 2021), Москва, 30 марта - 02 апреля 2021 года. – Москва : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. – Т. 3. – С. 283-286.

79. Gribkov, V. A. Dynamic Interaction of Shell Elements of the Aircraft Structure in the Frequency Spectrum of Non-Axisymmetric Vibrations / V. A. Gribkov, D. E. Nasonov, A. A. Shulga. – Text : electronic // Conference Proceedings of XLV Academic Space Conference, Dedicated to the Memory of Academician S. P. Korolev and other Outstanding National Scientists - Pioneers of Space Exploration, Moscow, Russia, 30 March - 02 April 2021. – College Park : American Institute of Physics, 2023. – Vol. 2549. – 6 p. – URL: <https://pubs.aip.org/aip/acp/article-abstract/2549/1/130008/2903412/Dynamic-interaction-of-shell-elements-of-the?redirectedFrom=fulltext> (date accessed: 07.04.2024).

80. Белоусов, И. С. Экспериментальное определение вязкости межслойного разрушения композитного материала / И. С. Белоусов, В. А. Беспалов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2023. – Т. 89. – № 12. – С. 81-87.

81. Shlyannikov, V. N. Creep-fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zone models / V. N. Shlyannikov. – Text : electronic // Engineering Fracture Mechanics. – 2019. – № 214. – P. 449-463. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794418310956> (date accessed: 22.04.2025).

82. Сравнительное исследование характеристик современных алюминиевых сплавов / Г. И. Нестеренко, А. В. Кулемин, А. С. Ким [и др.] // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2019. – Т. 85. – № 7. – С. 50-55.

83. Dirlik, T. Dirlik and Tovo-Benasciutti Spectral Methods in Vibration Fatigue: A Review with a Historical Perspective / T. Dirlik, D. Benasciutti. – Text : electronic // Metals. – 2021. – Vol. 11. – № 9. – Article 1333. – 21 p. – URL: <https://researchgate.net/publication/354398383> (date accessed: 23.10.2024).

84. Grover, H. J. An observation concerning the cycle ratio in cumulative damage / H. J. Grover // Proceedings of the Third Pacific Area National Meeting of the American Society for Testing Materials, San Francisco, California, USA, 14 - 15 October 1959. – Philadelphia, Pennsylvania, USA : ASTM, 1960. – P. 120-124.

85. Wöhler, A. Ueber die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl / A. Wöhler // Zeitschrift fur Bauwesen. – 1870. – Vol. 20. – № 1. – P. 73-106.

86. Basquin, O. H. The Exponential Law of Endurance Tests / O. H. Basquin // Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the American Society for Testing Materials, Atlantic City, New Jersey, USA, 28 June - 2 July 1910. – Philadelphia, Pennsylvania, USA : ASTM, 1910. – Vol. 10. – P. 625-630.

87. Харина, В. К. Определение долговечности образцов, моделирующих продольные и поперечные стыки фюзеляжа самолета МС-21 / В. К. Харина // Научный вестник МГТУ ГА. – 2020. – Т. 23. – № 03. – С. 29-38.

88. A comparative review of time- and frequency-domain methods for fatigue damage assessment / M. Muñiz-Calvente, A. Álvarez-Vázquez, F. Pelayo [et al.]. – Text : electronic // International Journal of Fatigue. – 2022. – Vol. 163. – № 107069. – 13 p. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142112322003310> (date accessed: 19.05.2025).

89. Взаимозависимость параметров уравнения кривой усталости для авиационных материалов / О. В. Абашев, А. Н. Поляков, Е. И. Смагин, А. Г. Яшутин. – Текст : электронный // Инновационные научные исследования. – 2024. – № 1-1(38). – С. 76-91. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=67856264> (дата обращения: 10.01.2025).

90. Методы обеспечения безопасности эксплуатации авиаконструкций самолетов России с большими наработками / В. В. Коновалов, Б. Г. Нестеренко, Г. И. Нестеренко, В. Я. Сеник // Научный вестник ГосНИИ ГА. – 2018. – № 22. – С. 69-81.

91. Тимофеев, А. Н. Ресурс и срок службы авиационной конструкции с коррозионным повреждением : дисс. ... канд. техн. наук / А. Н. Тимофеев. – Новосибирск : СибНИА, 2020. – 181 с.

92. Кулемин, А. В. Развитие расчетных и экспериментальных методов обоснования эксплуатационной живучести самолетных конструкций : дисс. ... канд. техн. наук / А. В. Кулемин. – Жуковский : ЦАГИ, 2021. – 194 с.

93. Лыкова, А. В. Малоцикловая усталость конструкционных сплавов при сложных термомеханических воздействиях : дисс. ... канд. техн. наук / А. В. Лыкова. – Пермь : ПНИПУ, 2022. – 140 с.

94. Петров, М. Г. Метод расчёта долговечности цилиндрических композитных оболочек, нагруженных внешним давлением / М. Г. Петров // Материалы XVII Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, Бийск, 22 - 24 мая 2024 года. – Бийск : Технологии и оборудование химической, биотехнологической и пищевой промышленности, 2024. – С. 113-117.

95. Завойчинская, Э. Б. Усталостное масштабное-структурное разрушение и долговечность конструкций при пропорциональных процессах нагружения : дисс. ... доктора физ.-мат. наук / Э. Б. Завойчинская. – Москва : МГУ, 2018. – 303 с.

96. Оборин, В. А. Масштабно-инвариантные структурные закономерности развития поврежденности и разрушение при динамическом и усталостном нагружении : дисс. ... канд. физ.-мат. наук / В. А. Оборин. – Пермь : ИМСС УрО РАН, 2021. – 130 с.

97. Мыльников, В. В. Структурно-деформационные особенности и закономерности динамики эволюции усталостных характеристик металлических материалов в условиях различных видов нагружения : дисс. ... доктора физ.-мат. наук / В. В. Мыльников. – Комсомольск-на-Амуре : ННГАСУ, 2023. – 369 с.

98. Григорьева, А. Л. Моделирование образования и развития усталостных трещин в металлических материалах при малоцикловой усталости / А. Л. Григорьева, О. В. Башков // Материалы II Международной научно-практической конференции молодых ученых «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», Комсомольск-на-Амуре, 14 - 18 ноября 2022 года. – Комсомольск-на-Амуре : КнАГУ, 2022. – Т. 2. – С. 44-46.

99. Оценка повреждаемости материалов в условиях климатических воздействий методом акустической эмиссии / А. Б. Лаптев, В. С. Ерасов, В. В. Мурашов, А. Н. Луценко // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2017. – Т. 83. – № 8. – С. 33-39.

100. Кучумова, М. Д. Разработка метода высокочастотных ультразвуковых циклических испытаний металлических материалов / М. Д. Кучумова, К. Р. Сапожник, О. В. Башков // Материалы III Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», Комсомольск-на-Амуре, 06 - 10 апреля 2020 года. – Комсомольск-на-Амуре : КНАГУ, 2020. – Т. 1. – С. 74-77.

101. Елеонский, С. И. Исследование процесса накопления повреждений и эволюции остаточных напряжений по данным измерений локального деформационного отклика методом спекл-интерферометрии : дисс. ... канд. техн. наук / С. И. Елеонский. – Жуковский : ЦАГИ, 2021. – 215 с.

102. Баутин, А. А. Метод обнаружения повреждений в авиаконструкциях на основе мониторинга местного напряжённо-деформированного состояния : дисс. ... канд. техн. наук / А. А. Баутин. – Жуковский : ЦАГИ, 2024. – 154 с.

103. Климович, В. В. Исследование закона эквивалентности циклов нагружения в широком диапазоне асимметрии / В. В. Климович, Б. И. Ермоленко // Труды научно-технической конференции по выносливости и ресурсу авиационных конструкций. – Жуковский : ЦАГИ, 1976. – С. 61-63.

104. Беспалов, В. А. Исследование прочности и механизмов разрушения элементов конструкции летательного аппарата из композиционных материалов / В. А. Беспалов, Е. С. Петрова // Материалы X Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Технологии и оборудование химической, биотехнологической и пищевой промышленности», Бийск, 24 - 26 мая 2017 года. – Бийск : АлтГТУ, 2017. – С. 227-229.

105. Трунин, Ю. П. Усталость и живучесть типовых мест конструкций из полимерных композиционных материалов / Ю. П. Трунин // Техника воздушного флота. – 1999. – № 6. – С. 26-38.

106. Крыжевич, Г. Б. Влияние средних напряжений цикла на усталостную долговечность конструкций из полимерных композиционных материалов / Г. Б. Крыжевич. – Текст : электронный // Аэрокосмическая техника и технологии. – 2023. – Т. 1. – № 1. – С. 63-73. – URL: <http://aerocosmtech.ru/article/2949-401x-2023-1-3/> (дата обращения: 27.03.2024).

107. Стрижиус, В. Е. Некоторые закономерности усталостного разрушения элементов композитных авиаконструкций / В. Е. Стрижиус // Композиты и наноструктуры. – 2016. – Т. 8. – № 4 (32). – С. 265-271.

108. Kawai, M. Anisomorphic constant fatigue life diagrams of constant probability of failure and prediction of P–S–N curves for unidirectional carbon/epoxy laminates / M. Kawai, K. Yano. – Text : electronic // International Journal of Fatigue. – 2016. – Vol. 83. – P. 323-334. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142112315003886> (date accessed: 15.05.2025).

109. Петров, М. Г. Долговечность и неупругость композиционных материалов / М. Г. Петров // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16. – № 2. – С. 121-134.

110. Hectors, K. Cumulative Damage and Life Prediction Models for High-Cycle Fatigue of Metals: A Review / K. Hectors, W. De Waele. – Text : electronic // Metals. – 2021. – Vol. 11. – Cumulative Damage and Life Prediction Models for High-Cycle Fatigue of Metals. – № 2. – Article 204. – 32 p. – URL: <https://researchgate.net/publication/348687062> (date accessed: 19.05.2025).

111. Денисов, С. Л. Комплексные исследования проблем долговечности ортотропных полигональных пластин с учетом эффектов экранирования шума от некомпактных источников : дисс. ... канд. техн. наук / С. Л. Денисов. – Москва : ЦАГИ, 2017. – 186 с.

112. Langer, B. F. Fatigue failure from stress cycles of varying amplitude / B. F. Langer // Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1937. – Vol. 4. – № 4. – P. 160-162.

113. Manson, S. S. Practical implementation of the double linear damage rule and damage curve approach for treating cumulative fatigue damage / S. S. Manson, G. R. Halford. – Text : electronic // International Journal of Fracture. – 1981. – Vol. 17. – № 2. – P. 169-192. – URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00053519> (date accessed: 21.05.2025).

114. Richart, F. E. An Hypothesis for the Determination of Cumulative Damage in Fatigue / F. E. Richart, N. M. Newmark // Proceedings of the 48th Annual Meeting of the American Society for Testing Materials, Detroit, Michigan, USA, 21 - 25 June 1948. – Philadelphia, Pennsylvania, USA : ASTM, 1948. – Vol. 48. – P. 767-800.

115. Marco, S. M. A Concept of Fatigue Damage / S. M. Marco, W. L. Starkey. – Text : electronic // Transactions of the ASME. – 1954. – Vol. 76. – № 4. – P. 627-632. – URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/fluidsengineering/article/76/4/627/1142213/A-Concept-of-Fatigue-Damage> (date accessed: 19.05.2025).

116. Leis, B. N. A Nonlinear History-Dependent Damage Model for Low Cycle Fatigue / B. N. Leis. – Text : electronic // Proceedings of the Low Cycle Fatigue: Directions for the Future, Bolton Landing, New York, USA, 30 September - 04 October 1985. – Philadelphia, Pennsylvania, USA : ASTM, 1988. – P. 143-159. – URL: <https://astm.org/stp24480s.html> (date accessed: 22.05.2025).

117. Xiaode, N. Hardening law and fatigue damage of a cyclic hardening metal / N. Xiaode, L. Guangxia, L. Hao. – Text : electronic // Engineering Fracture Mechanics. – 1987. – Vol. 26. – № 2. – P. 163-170. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0013794487901949> (date accessed: 22.05.2025).

118. Качанов, Л. М. О времени до разрушения в условиях ползучести / Л. М. Качанов // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 8. – С. 26-31.

119. Chaboche, J. L. A Non-linear Continuous Fatigue Damage Model / J. L. Chaboche, P. M. Lesne. – Text : electronic // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 1988. – Vol. 11. – № 1. – P. 1-17. – URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1460-2695.1988.tb01216.x> (date accessed: 17.05.2025).

120. A probabilistic interpretation of the Miner number for fatigue life prediction / A. Fernandez-Canteli, S. Blason, J. A. F. O. Correia, A. M. P. de Jesus. – Text : electronic // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2014. – Vol. 8. – № 30. – P. 327-339. – URL: <https://researchgate.net/publication/288436327> (date accessed: 22.05.2025).

121. Bonte, M. H. A. Determining the von Mises stress power spectral density for frequency domain fatigue analysis including out-of-phase stress components / M. H. A. Bonte, A. De Boer, R. Liebrechts. – Text : electronic // *Journal of Sound and Vibration*. – 2007. – № 302. – P. 379-386. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X06008753> (date accessed: 24.03.2025).

122. Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice / Y.-L. Lee, J. Pan, R. Hathaway, M. Barkey. – Oxford : Butterworth-Heinemann, 2005. – 416 p.

123. Rice, S. O. Mathematical Analysis of Random Noise, Part III-IV / S. O. Rice // *Bell System Technical Journal*. – 1945. – Vol. 24. – № 1. – P. 46-156.

124. Benasciutti, D. Rainflow Cycle Distribution and Fatigue Damage in Gaussian Random Loading : Report del Dipartimento di Ingegneria / D. Benasciutti, R. Tovo. – Luglio : Università degli Studi di Ferrara, 2004. – URL: https://academia.edu/60210369/Rainflow_cycle_distribution_and_fatigue_damage_in_Gaussian_random_loadings (date accessed: 22.06.2024). – Text : electronic.

125. Madsen, H. O. Methods of Structural Safety / H. O. Madsen, S. Krenk, N. C. Lind. – Mineola : Dover Publications, 2006. – 416 p.

126. Cristofori, A. A stress invariant based spectral method to estimate fatigue life under multiaxial random loading / A. Cristofori, D. Benasciutti, R. Tovo. – Text : electronic // *International Journal of Fatigue*. – 2011. – Vol. 33. – № 7. – P. 887-899. – URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142112311000302> (date accessed: 27.06.2024).

127. Чухлебов, Р. В. Экспериментально-теоретический метод оценки вибрационной прочности авиационных изделий при действии полетных нагрузок : дисс. ... канд. техн. наук / Р. В. Чухлебов. – Москва : МЭИ, 2019. – 98 с.

128. Methods for Calculating the Fatigue Damage of a Structure for Various Spectra of Vibro-Acoustic Loads / P. Bessonov, Y. Svirsky, I. Sidorov, S. Dubinskii. – Text : electronic // *Proceedings of 32nd Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS 2020/21)*, Shanghai, China, 06 - 10 September 2021. – Bonn : International Council of the Aeronautical Sciences, 2021. – P. 1-11. – URL: https://icas.org/icas_archive/ICAS2020/data/preview/ICAS2020_0576.htm (date accessed: 06.11.2024).

129. Шульга, А. А. Влияние отбрасывания колебаний с малой амплитудой при расчёте усталостной повреждаемости / А. А. Шульга, Д. В. Барышева // *Материалы Международной молодёжной научной конференции «XXVI Туполевские чтения (школа молодых ученых)»*, Казань, 09 - 10 ноября 2023 года. – Казань : КАИ, 2023. – С. 220-227.

130. Экспериментальное исследование влияния «малых» по амплитуде нагрузок на долговечность стальных элементарных образцов / П. С. Бессонов, А. Л. Медведский, Ю. А. Свирский, А. А. Шульга // *Вестник Московского авиационного института*. – 2025. – Т. 32. – № 2. – С. 97-107.

131. О влиянии малых по амплитуде циклов нагружения на долговечность стальных образцов / А. А. Шульга, Д. В. Барышева, П. С. Бессонов [и др.] // Сборник тезисов IV Научно-практической конференции аспирантов, Жуковский, 04 декабря 2025. – Жуковский : ЦАГИ, 2025. – С. 161-168.

132. Шульга, А. А. Оценка вклада высокочастотной составляющей нагрузки в усталостную повреждаемость металлических конструкций / А. А. Шульга, Д. В. Барышева, А. Л. Медведский // Сборник тезисов II Научно-практической конференции аспирантов, Жуковский, 27 сентября 2023 года. – Жуковский : ЦАГИ, 2023. – С. 39-46.

133. Шульга, А. А. Оценка вклада высокочастотной составляющей нагрузки в усталостную повреждаемость авиационных конструкций одномоментным методом / А. А. Шульга, Е. А. Никитин, А. Л. Медведский. – Текст : электронный // Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики (АНТЭ-2024)», Казань, 03 - 04 октября 2024 года. – Казань : КАИ, 2024. – С. 46-48. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=79724192> (дата обращения: 09.04.2025).

134. Шульга, А. А. Расчёт усталостной повреждаемости авиационных конструкций при совместном действии нагрузок, заданных во временной и частотной областях / А. А. Шульга // Сборник статей научно-технической конференции «Прочность конструкций летательных аппаратов-2024», Жуковский, 12 - 13 декабря 2024. – Жуковский : Труды ЦАГИ, 2025. – Т. 2828. – С. 161-164.

135. Шульга, А. А. Оценка усталостной повреждаемости авиационных конструкций на этапе эксплуатации / А. А. Шульга // Сборник тезисов докладов IV Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы прочности авиационных конструкций и материалов», Седова Заимка, 26 - 28 февраля 2025. – Новосибирск : СибНИА, 2025. – С. 58-60.

136. Шульга, А. А. Сравнительный анализ спектральных методов расчёта усталостной повреждаемости элементов конструкции авиационной техники / А. А. Шульга, Е. А. Никитин, А. Л. Медведский // Сборник тезисов III Научно-практической конференции аспирантов, Жуковский, 03 декабря 2024 года. – Жуковский : ЦАГИ, 2024. – С. 110-118.

137. Медведский, А. Л. Сравнительный анализ спектральных методов расчета усталостной повреждаемости авиационных конструкций / А. Л. Медведский, Е. А. Никитин, А. А. Шульга // Ученые записки ЦАГИ. – 2025. – Т. 56. – С. 58-72.

138. Шульга, А. А. Разработка программного комплекса для анализа больших данных о нагруженности авиационных конструкций / А. А. Шульга, Н. А. Аликин // Материалы Международной молодёжной научной конференции «XXVII Туполевские чтения (школа молодых ученых)», Казань, 13 - 14 ноября 2025 года. – Казань : КАИ, 2025. – С. 1757-1760.

139. Шульга, А. А. Разработка программного комплекса для обработки полётных данных самолёта в части прочности и вибраций / А. А. Шульга, С. В. Гордон, Д. В. Барышева // Тезисы докладов XX Научно-технической конференции по аэроакустике, Суздаль, 24 - 29 сентября 2023 года. – Жуковский : ЦАГИ, 2023. – С. 241-242.

140. Шульга, А. А. Расчет преднагруженных металлических конструкций в комплексе MSC Nastran на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Часть 1 / А. А. Шульга, Н. А. Аликин, Д. В. Барышева. – Текст : электронный // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2025. – № 6(162). – Ст. 3. – 22 с. – URL: <https://engjournal.bmstu.ru/catalog/arise/hmmipq/2452.html> (дата обращения: 02.10.2025).

141. Шульга, А. А. Расчет преднагруженных металлических конструкций в комплексе MSC Nastran на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Часть 2 / А. А. Шульга, Н. А. Аликин, Д. В. Барышева. – Текст : электронный // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2025. – № 7(163). – Ст. 5. – 18 с. – URL: <https://engjournal.bmstu.ru/catalog/arise/dcpa/2461.html> (дата обращения: 02.10.2025).

Приложение А Акт о внедрении результатов работы



ПУБЛИЧНОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО «ЯКОВЛЕВ» (ПАО «ЯКОВЛЕВ»)

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель управляющего
директора – директор Инженерного
центра



А. И. Гайданский

07 20 26 г.

АКТ

О внедрении результатов диссертационной работы Шульги Александра Андреевича «Разработка метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолета», представленной на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 2.5.14. Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов

Настоящим актом подтверждаем, что результаты диссертационной работы «Разработка метода анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолета», выполненной инженером–конструктором 1–ой категории Шульгой Александром Андреевичем и представленной на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 2.5.14. Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов, были внедрены в деятельность ПАО «Яковлев» при выполнении опытно–конструкторских работ и научных исследований в области разработки и анализа прочности пассажирских самолётов.

Разработанный автором метод анализа влияния высокочастотных нагрузок на усталостную прочность элементов конструкции самолёта является частью работ по формированию научно–методического обеспечения Инженерного центра.

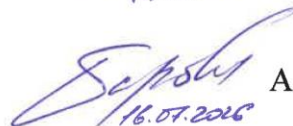
Созданный автором программный комплекс для обработки сигналов Lavas успешно применяется при анализе полётных данных опытных образцов самолётов МС–21 в части прочности и вибраций.

Заместитель директора
Инженерного центра по разработке



Г. О. Гвоздева

Начальник Конструкторского бюро



А. Ю. Барбин

Начальник Отделения прочности –
Заместитель главного конструктора
по прочности



П. Н. Гусев

16.07.2026

Приложение Б Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2026663764

**Программный комплекс Lavas для обработки полётных
данных самолёта в части прочности и вибраций**

Правообладатель: *Публичное акционерное общество "Яковлев"*
(RU)

Авторы: *Барышева Дарья Александровна (RU), Сергеев
Максим Сергеевич (RU), Шульга Александр Андреевич
(RU)*



Заявка № 2026663405

Дата поступления 24 апреля 2026 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 08 мая 2026 г.

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 00a570e47add8d531b4b8818e75f29506
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 04.09.2025 по 28.11.2026

Ю.С. Зубов